Труды МАИ. 2026. № 150.

Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.)

Научная статья
УДК 519.63:004.032.26
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189689
EDN: https://www.elibrary.ru/DZZJME

ЭФФЕКТ ТРАНСГРЕССИИ В СЛАБО НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Н.М. Видов[1,2], **А.С. Кулешов**[1]✉

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

[2]Научно-технологический университет «Сириус», г. Сочи, Россия

✉ alexander.kuleshov@math.msu.ru

Цитирование: Видов Н.М., Кулешов А.С. Эффект трансгрессии в слабо неголономных системах малой размерности // Труды МАИ: электрон. журнал. № 150.
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189689

Аннотация. В конце 80-х годов прошлого века в работах Я.В. Татаринова были заложены основы теории так называемых слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, зависящими от малого параметра. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении малого параметра соответствующие связи являются интегрируемыми, то есть при нулевом значении параметра мы имеем семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных постоянных интегрирования. Во-вторых, предполагается, что эти голономные системы являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами.

При ненулевом значении малого параметра поведение слабо неголономных систем можно представлять как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых постоянных интегрирования. В рамки теории слабо неголономных систем укладывается также поведение консервативных неголономных систем вблизи многообразия равновесий. В данной работе представлены два примера

механических систем, движение которых может быть описано с помощью теории слабо неголономных систем.

Ключевые слова: слабо неголономная система; многообразие равновесий; эффект трансгрессии.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20009).

TRANSGRESSION EFFECT IN WEAKLY NONHOLONOMIC SYSTEMS WITH SMALL DEGREES OF FREEDOM

N.M. Vidov [1,2], **A.S. Kuleshov** [1]✉

[1]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[2]Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia

✉ alexander.kuleshov@math.msu.ru

Citation: Vidov N.M., Kuleshov A.S. Transgression Effect in weakly nonholonomic systems with small degrees of freedom // Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.).
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189689

Abstract. In the late 1980s Ya. V. Tatarinov laid the foundations for the theory of so-called weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. First of all, it is assumed, that for zero value of this parameter the constraints of such a system become integrable; i.e., in this case, we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. Secondly, it is assumed, that these holonomic systems are completely integrable Hamiltonian systems.

When the small parameter is not zero, the behavior of such a system can be represented as a transgression: a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants. The behavior of conservative nonholonomic systems near the equilibrium manifold is also described within the framework of the theory of weakly nonholonomic systems. This paper presents two examples of mechanical systems whose motion can be described using the theory of weakly nonholonomic systems.

Keywords: weakly nonholonomic system; equilibrium manifold; transgression effect.

Funding: this work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-11-20009).

Введение. Слабо неголономные системы

При создании математических моделей различных явлений и процессов, относящихся к авиации, а также при описании авиационных технических устройств достаточно часто используются механические системы с дифференциальными неинтегрируемыми (неголономными) связями. В качестве примера здесь можно привести классическую работу М.В. Келдыша [1], в которой неголономная механическая система использовалась для описания «шимми»: эффекта интенсивных угловых автоколебаний переднего колеса самолета [2].

Системы с неголономными связями используются в алгоритмах коррекции курсового канала бесплатформенной инерциальной навигационной системы самолета [3], при моделировании и управлении движением роботизированной системы аэродромной буксировки воздушных судов [4], а также при изучении динамики, навигации и стабилизации движения одноосных колесных платформ и модулей [5-9], предназначенных для выполнения различных задач, связанных с авиацией. Поэтому представляется актуальным дальнейшее исследование общей теории движения неголономных механических систем, а также изучение конкретных примеров, позволяющих лучше понять некоторые аспекты этой теории. В 1986 году Я.В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем [10]. Дальнейшее развитие теория слабо неголономных систем получила в статьях Я.В. Татаринова [11, 12]. Рассмотрим механическую систему, положение которой задается $n+m$ обобщенными координатами $x_1,\ldots,x_{n+m}$. Предположим, что обобщенные координаты связаны m дифференциальными (в общем случае неголономными) связями вида:

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}\left(x_1,\ldots,x_{n+m},\varepsilon\right)\dot{x}_i = 0, \quad s=1,\ldots,m, \quad \operatorname{rank}\left(a_{si}\right)=n, \tag{1}$$

где ε – малый параметр. Будем считать, что при $\varepsilon = 0$ уравнения связей (1) являются интегрируемыми:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n+m} k_{rs}\left(x_1,\ldots,x_{n+m}\right)a_{si}\left(x_1,\ldots,x_{n+m},0\right)\dot{x}_i = \frac{d}{dt}\varphi_r\left(x_1,\ldots,x_{n+m}\right), \quad \det k_{rs} \neq 0, \quad r = 1,\ldots,m.$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$ связи будем называть «слабо неголономными», а саму рассматриваемую механическую систему – «слабо неголономной».

Введем новые обобщенные координаты $q_1,\ldots,q_{n+m}$ таким образом, что $q_i = x_i$, $i = 1,\ldots,n$ и $q_{n+\mu} = \varphi_\mu\left(x_1,\ldots,x_{n+m}\right)$, $\mu = 1,\ldots,m$. Тогда уравнения связей (1) переписываются в новых обобщенных координатах $q_1,\ldots,q_{n+m}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{q}_{n+\mu} = 0, \quad \mu = 1,\ldots m, \quad \text{при } \varepsilon = 0; \\ &\dot{q}_{n+\mu} = \varepsilon\sum_{\lambda=1}^{n} c_{s\lambda}\left(q_1,\ldots,q_{n+m},\varepsilon\right)\dot{q}_\lambda, \quad \mu = 1,\ldots m, \quad \text{при } \varepsilon \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть для рассматриваемой механической системы задана функция Лагранжа $L = L\left(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{n+m},q_1,\ldots,q_{n+m},\varepsilon\right)$. В таком случае при $\varepsilon = 0$ мы имеем семейство лагранжевых или гамильтоновых систем с параметрами $R_\mu = q_{n+\mu}$, возникающими после интегрирования слабо неголономных связей (2). При $\varepsilon \neq 0$ былые параметры $R_1,\ldots,R_m$ могут начать эволюционировать. Этот эффект назван в работах Я.В. Татаринова [10–12] трансгрессией. В данной работе описывается эффект трансгрессии в нескольких простейших неголономных системах.

Движение точки, подчиненной неголономной связи, под действием упругой силы

Пусть материальная точка массы m движется в трехмерном пространстве. Введем в этом пространстве неподвижную систему координат $Oxyz$. В этой системе положение точки определяется её координатами x, y, z. Пусть на точку действует упругая сила с потенциалом

$$V = \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2\right), \tag{3}$$

и, кроме того, движение точки стеснено неголономной связью

$$\dot{z} = \varepsilon\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right). \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ связь (4) интегрируется, и мы получаем $z = C_0 = \text{const}$. В этом случае мы имеем голономную систему с кинетической энергией

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),$$

и потенциальной энергией V, которая задается формулой (3). Уравнения движения точки, записанные в форме уравнений Лагранжа, имеют вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}. \tag{5}$$

Общее решение системы уравнений (5) записывается следующим образом:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad y = C_3 \cos\omega t + C_4 \sin\omega t, \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ движение точки представляет собой колебания в плоскости, параллельной плоскости Oxy и проходящей через точку $\left(0, 0, C_0\right)$.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. В этом случае получим уравнения движения рассматриваемой системы методом Аппеля. Для этого запишем энергию ускорений системы

$$S = \frac{m}{2}\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2\right). \tag{7}$$

Из уравнения связи, путем дифференцирования его по времени, получаем, что

$$\ddot{z} = \varepsilon\left(\ddot{x}y - \ddot{y}x\right). \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) для $\ddot{z}$ в формулу (7), находим окончательный вид энергии ускорений данной системы

$$S = \frac{m}{2}\left(\left(1 + \varepsilon^2 y^2\right)\ddot{x}^2 - 2\varepsilon^2 xy\,\ddot{x}\,\ddot{y} + \left(1 + \varepsilon^2 x^2\right)\ddot{y}^2\right).$$

Уравнения движения системы записываются в форме уравнений Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}}+\frac{\partial V}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{y}}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

или, в явном виде:

$$m\left(1+\varepsilon^2 y^2\right)\ddot{x}-m\varepsilon^2 xy\,\ddot{y}+cx=0,\quad m\left(1+\varepsilon^2 x^2\right)\ddot{y}-m\varepsilon^2 xy\,\ddot{x}+cy=0. \tag{9}$$

Разрешая систему уравнений (9) относительно старших производных, получим:

$$\ddot{x}=-\omega^2 x,\quad \ddot{y}=-\omega^2 y,\quad \omega^2=\frac{c}{m}. \tag{10}$$

Легко видеть, что уравнения (5) и (10) совпадают, следовательно, общее решение системы уравнений (10) имеет вид (6). Подставим его в уравнение связи (4) и получим:

$$\dot{z}=\varepsilon\omega\left(C_2C_3-C_1C_4\right),\ \text{откуда}\ \ z=\varepsilon\omega\left(C_2C_3-C_1C_4\right)t+C_0.$$

Таким образом, в случае $\varepsilon\neq 0$ движение точки представляет собой колебания в плоскости, параллельной плоскости Oxy, в сочетании с перемещением этой плоскости вдоль оси Oz с постоянной скоростью v, имеющей первый порядок малости по ε: $v=\varepsilon\omega\left(C_2C_3-C_1C_4\right)$. За время t порядка $1/\varepsilon$ точка удалится от начального положения вдоль оси Oz на конечное расстояние. В этом состоит эффект трансгрессии в данной задаче.

Рассмотренный выше пример позволяет легко убедиться в справедливости следующего общего факта [10-12]: движение консервативных неголономных систем вблизи равновесий укладывается в рамки теории слабо неголономных систем. Действительно, рассмотрим ту же систему, только теперь будем считать, что наложенная на систему неголономная связь имеет вид:

$$\dot{z}=\dot{x}y-\dot{y}x. \tag{11}$$

Как было показано нами выше, уравнения движения данной системы будут иметь вид (5). Равновесия рассматриваемой системы определяются условиями $x=0,\ y=0,\ z=C_0=\text{const}$, и в силу произвольности C_0 образуют многообразие равновесий, которым в данном случае является ось Oz. Перейдём к новым

переменным – возмущениям переменных x, y и z в окрестности многообразия равновесий: $x = \varepsilon\xi$, $y = \varepsilon\eta$, $z = C_0 + \varepsilon\zeta$. В новых переменных уравнение связи (11) перепишется следующим образом: $\dot{\zeta} = \varepsilon\left(\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}\right)$, то есть оно примет вид (4). Поэтому изучать движение слабо неголономных систем можно с помощью методов, которые обычно используются для изучения движения консервативных неголономных систем в окрестности многообразия равновесий, например с помощью метода нормальных форм [13–22]. Ниже методом нормальных форм исследована задача о движении другой слабо неголономной системы с малым числом степеней свободы – почти голономного маятника. Ранее эта задача исследовалась в работе [23] при помощи метода усреднения.

Задача о движении почти голономного маятника

Пусть в неподвижной вертикальной плоскости Oxy в однородном поле силы тяжести движется невесомая пластинка, несущая на себе два Т - образно расположенных лезвия, из которых поперечное медленно (с малой постоянной скоростью) смещается вдоль себя; на линии продольного лезвия к пластинке прикреплена точечная масса M (рисунок 1).

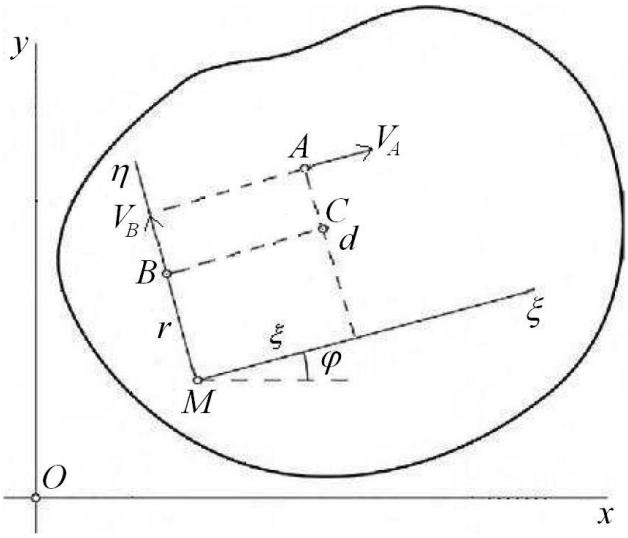


Рисунок 1 – Почти голономный маятник

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, единичные базисные векторы которой обозначим $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$,$\mathbf{e}_z$, а также подвижную систему координат $M\xi\eta\zeta$, жестко связанную с пластинкой, единичные базисные векторы которой

обозначим $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$. Пусть начало подвижной системы координат расположено в точке M (где расположена точечная масса), направление оси $M\xi$ совпадает с направлением поперечного лезвия A, а направление оси $M\eta$ совпадает с направлением продольного лезвия B. Ось $M\zeta$ перпендикулярна плоскости движения и совпадает по направлению с осью Oz (Рис. 1). Тогда радиусы – векторы точек A и B в системе координат $M\xi\eta\zeta$ имеют вид:

$$\mathbf{r}_A = \xi\mathbf{e}_\xi + d\mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{r}_B = d\mathbf{e}_\eta, \quad d = \text{const}, \quad r = \text{const}.$$

Будем считать, что переменная ξ меняется по закону: $\xi = \xi_0 + \varepsilon v t$, где ξ_0 и v – постоянные, а ε – малый параметр. Обозначим через C мгновенный центр скоростей пластинки. В системе координат $M\xi\eta\zeta$ радиус – вектор точки C имеет вид: $\mathbf{r}_C = \xi\mathbf{e}_\xi + r\mathbf{e}_\eta = (\xi_0 + \varepsilon v t)\mathbf{e}_\xi + r\mathbf{e}_\eta$.

В качестве переменных, которые определяют положение рассматриваемой системы, выберем координаты x и y мгновенного центра скоростей C относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ и угол φ поворота пластинки (угол между осями Ox и $M\xi$). Тогда уравнения неголономных связей, наложенных на данную систему, будут иметь вид:

$$\dot{x} = \dot{\xi}\cos\varphi = \varepsilon v\cos\varphi, \quad \dot{y} = \dot{\xi}\sin\varphi = \varepsilon v\sin\varphi. \tag{12}$$

Будем считать, что пластинка движется в однородном поле тяжести, то есть на точку M действует сила $\mathbf{F} = -Mg\mathbf{e}_y$. Динамические уравнения движения данной системы запишем в форме уравнений Аппеля. Для этого найдем сначала энергию ускорений данной системы. Она определяется формулой $S = M\mathbf{a}_M^2/2$, где $\mathbf{a}_M$ – ускорение точки M. В явном виде выражение для энергии ускорений записывается следующим образом:

$$S = \frac{M}{2}\left(\left(\xi^2 + r^2\right)\left(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4\right) + \dot{\xi}^2\dot{\varphi}^2 + 2\xi\dot{\xi}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - 2r\dot{\xi}\dot{\varphi}^3\right).$$

Потенциальная энергия данной системы равна $V = Mg\left(y - \xi\sin\varphi - r\cos\varphi\right)$. Уравнение, описывающее изменение угла φ, имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

то есть

$$\left(\xi^2 + r^2\right)\ddot{\varphi} + \xi\dot{\xi}\dot{\varphi} + gr\sin\varphi - g\xi\cos\varphi = 0. \qquad (13)$$

Таким образом, движение рассматриваемой системы описывается уравнениями (12), (13). В уравнении (13) сделаем замену переменных по формуле

$$\varphi = \psi + \operatorname{arctg}\frac{\xi}{r}. \qquad (14)$$

С учетом замены переменных (14) уравнения движения (12), (13) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\left(\xi^2 + r^2\right)\ddot{\psi} + \xi\dot{\xi}\dot{\psi} + g\sqrt{\xi^2 + r^2}\sin\psi - \frac{r\xi\dot{\xi}^2}{\xi^2 + r^2} = 0,\\ \dot{x} = \frac{r\cos\psi - \xi\sin\psi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\dot{\xi}, \quad \dot{y} = \frac{r\sin\psi + \xi\cos\psi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\dot{\xi}, \quad \dot{\xi} = \varepsilon v.\end{gathered} \qquad (15)$$

Из первого уравнения системы (15) получаем, что невозмущенная система (соответствующая нулевому значению малого параметра $\varepsilon = 0$) может интерпретироваться как математический маятник длины $l = \sqrt{\xi_0^2 + r^2}$, точка подвеса которого совпадает с мгновенным центром скоростей C. Именно поэтому рассматриваемая система и получила название «почти голономный маятник». Очевидно, что значение $\psi = 0$ является положением равновесия в невозмущенной системе, при этом в положении равновесия $\xi = \xi_0$, а x и y могут принимать произвольные постоянные значения. В малой окрестности этого равновесия будем считать переменные $\dot{\xi}$, ψ, $\dot{\psi}$ малыми и будем искать решение данной задачи при помощи метода нормальных форм [13–22].

Нормальная форма уравнений движения и её анализ.

Разложим правые части уравнений (15) в ряд по переменным ψ, $\dot{\psi}$ и $\dot{\xi}$ до членов третьего порядка малости включительно.

В результате получим:

$$\left(\xi^2+r^2\right)\ddot{\psi}+\xi\dot{\xi}\dot{\psi}+g\sqrt{\xi^2+r^2}\psi-\frac{r\xi\dot{\xi}^2}{\xi^2+r^2}-\frac{g\sqrt{\xi^2+r^2}}{6}\psi^3=0,$$

$$\dot{x}=\frac{r}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\dot{\xi}-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi\dot{\xi}-\frac{r}{2\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi^2\dot{\xi}, \tag{16}$$

$$\dot{y}=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\dot{\xi}+\frac{r}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi\dot{\xi}-\frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi^2\dot{\xi},\quad \dot{\xi}=\varepsilon v.$$

В первом приближении система уравнений (16) имеет вид:

$$\ddot{\psi}+\frac{g}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi=0,\quad \dot{x}=\frac{r}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\dot{\xi},\quad \dot{y}=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\dot{\xi},\quad \dot{\xi}=\varepsilon v. \tag{17}$$

Второе и третье уравнение системы (17) перепишем следующим образом:

$$\frac{dx}{d\xi}=\frac{r}{\sqrt{\xi^2+r^2}},\quad \frac{dy}{d\xi}=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}. \tag{18}$$

Интегрируя уравнения (18), получим:

$$x=r\ln\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+r^2}}{r}\right)+C_x,\quad y=\sqrt{\xi^2+r^2}+C_y,$$

откуда находится зависимость $y=y(x)$:

$$y-C_y=r\,\mathrm{ch}\left(\frac{x-C_x}{r}\right).$$

Следовательно, в первом приближении движение почти голономного маятника представляет собой колебания в окрестности медленно поворачивающегося направления фиксированного лезвия. При этом мгновенный центр скоростей смещается по цепной линии (трансгрессия).

Вместо переменных x и y введем новые переменные X и Y по формулам:

$$X=x-r\ln\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+r^2}}{r}\right),\quad Y=y-\sqrt{\xi^2+r^2}\,.$$

В новых переменных уравнения движения почти голономного маятника (16) примут вид:

$$\left(\xi^2+r^2\right)\ddot{\psi}+\xi\dot{\xi}\dot{\psi}+g\sqrt{\xi^2+r^2}\psi-\frac{r\xi\dot{\xi}^2}{\xi^2+r^2}-\frac{g\sqrt{\xi^2+r^2}}{6}\psi^3=0,\quad \dot{\xi}=\varepsilon v,$$
$$\dot{X}=-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi\dot{\xi}-\frac{r}{2\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi^2\dot{\xi},\quad \dot{Y}=\frac{r}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi\dot{\xi}-\frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2+r^2}}\psi^2\dot{\xi}. \tag{19}$$

Приведем теперь уравнения первого приближения к диагональному виду. Для этого введем новые переменные ζ_1 и ζ_2 по формуле:

$$\zeta_1=\psi-\frac{i\dot{\psi}}{\sqrt{\frac{g}{\sqrt{\xi^2+r^2}}}}=\bar{\zeta}_2.$$

В новых переменных система уравнений первого приближения записывается следующим образом:

$$\dot{\zeta}_1=\frac{i\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}\zeta_1,\quad \dot{\zeta}_2=-\frac{i\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}\zeta_2,\quad \dot{X}=0,\quad \dot{Y}=0,\quad \dot{\xi}=\varepsilon v.$$

Используя метод, описанный в работе [17], приведем систему уравнений (19) к нормальной форме. Нормальная форма третьего порядка будет иметь вид:

$$\dot{z}_1=\frac{i\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}z_1-\frac{\xi}{4\left(\xi^2+r^2\right)}z_1\dot{\xi}-\frac{i\xi^2}{32\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{7}{4}}}z_1\dot{\xi}^2-\frac{i\sqrt{g}}{16\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}z_1^2z_2,$$
$$\dot{z}_2=-\frac{i\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}z_2-\frac{\xi}{4\left(\xi^2+r^2\right)}z_2\dot{\xi}+\frac{i\xi^2}{32\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{7}{4}}}z_2\dot{\xi}^2+\frac{i\sqrt{g}}{16\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}}z_1z_2^2, \tag{20}$$
$$\dot{z}_X=-\frac{r\xi^2}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2}\dot{\xi}^3-\frac{r}{4\sqrt{\xi^2+r^2}}z_1z_2\dot{\xi},$$
$$\dot{z}_Y=\frac{r^2\xi}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2}\dot{\xi}^3-\frac{\xi}{4\sqrt{\xi^2+r^2}}z_1z_2\dot{\xi},\quad \dot{\xi}=\varepsilon v,$$

Где обозначено

$$z_1=\zeta_1+O\left(\varepsilon^2\right),\quad z_2=\zeta_2+O\left(\varepsilon^2\right),\quad z_X=X+O\left(\varepsilon^2\right),\quad z_Y=Y+O\left(\varepsilon^2\right).$$

Найдем решение системы уравнений (20). Для этого вместо переменных z_1 и z_2 введем новые переменные Δ и θ по формулам:

$$z_1 = \Delta\exp(i\theta), \quad z_2 = \Delta\exp(-i\theta).$$

Можно показать, что переменные Δ и θ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Delta} = -\frac{\xi}{4\left(\xi^2+r^2\right)}\Delta\dot{\xi}, \quad \dot{\theta} = \frac{\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{g}\Delta^2}{16\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{\xi^2\dot{\xi}^2}{32\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{7}{4}}}. \tag{21}$$

Интегрируя первое уравнение системы (21), получим явное выражение для $\Delta = \Delta(\xi)$:

$$\Delta = \varepsilon C_\delta \left(\xi^2+r^2\right)^{-\frac{1}{8}}. \tag{22}$$

Подставляя выражение (22) во второе уравнение системы (21) и интегрируя по времени, находим явное выражение для функции $\theta = \theta(t)$:

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \left(\frac{\sqrt{g}}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{g}\varepsilon^2 C_\delta^2}{16\sqrt{\xi^2+r^2}} - \frac{\varepsilon^2 v^2 \xi^2}{32\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{7}{4}}} \right) dt. \tag{23}$$

Используя найденные выражения (22) и (23) для переменных Δ и θ, найдем по ним явные выражения для z_1 и z_2, а по ним найдем явное выражение для переменной ψ. Оно имеет вид:

$$\psi = \frac{\varepsilon C_\delta}{\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{8}}}\cos\theta + \frac{\varepsilon^2 v\xi\left(8rv + \sqrt{g}C_\delta \sin\theta\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{5}{8}}\right)}{8g\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{\varepsilon^3 C_\delta \cos\theta\left(gC_\delta^2\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{5}{4}}\left(5+4\sin^2\theta\right) + 6v^2\left(2r^2-\xi^2\right)\right)}{192g\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{13}{8}}}. \tag{24}$$

Вернемся теперь к уравнениям, которым удовлетворяют z_X и z_Y:

$$\dot{z}_X = -\frac{r\xi^2}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2}\dot{\xi}^3 - \frac{r\varepsilon^2 C_\delta^2}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}}\dot{\xi}, \quad \dot{z}_Y = \frac{r^2\xi}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2}\dot{\xi}^3 - \frac{\xi\varepsilon^2 C_\delta^2}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}}\dot{\xi}. \tag{25}$$

Общее решение системы уравнений (25) записывается в виде:

$$z_X = -r\varepsilon^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{v^2\xi^2}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2} + \frac{C_\delta^2}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}} \right) d\xi + C_X,$$

$$z_Y = -\frac{r^2\varepsilon^2 v^2}{2g\left(\xi^2+r^2\right)} - \frac{\varepsilon^2 C_\delta^2}{2}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}} + C_Y. \qquad (26)$$

Используя формулы (22) и (26), получаем явные выражения для переменных x и y с точностью до членов третьего порядка малости:

$$x = C_X + r\ln\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+r^2}}{r}\right) - r\varepsilon^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{v^2\xi^2}{g\left(\xi^2+r^2\right)^2} + \frac{C_\delta^2}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}} \right) d\xi + f_x(\xi,\theta),$$

$$y = C_Y + \sqrt{\xi^2+r^2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{r^2v^2}{g\left(\xi^2+r^2\right)} + C_\delta^2\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{4}} \right) + f_y(\xi,\theta), \qquad (27)$$

где $f_x(\xi,\theta)$ и $f_y(\xi,\theta)$ (осциллирующие части) задаются формулами:

$$f_x(\xi,\theta) = -\frac{\varepsilon^2 C_\delta v}{\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{8}}}\left(\left(\xi + \frac{\varepsilon C_\delta r\cos\theta}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{8}}} \right)\sin\theta + \frac{\varepsilon v\left(8r^2+\xi^2\right)\cos\theta}{8\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}} \right),$$

$$f_y(\xi,\theta) = \frac{\varepsilon^2 C_\delta v}{\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{8}}}\left(\left(r - \frac{\varepsilon C_\delta \xi\cos\theta}{4\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{1}{8}}} \right)\sin\theta - \frac{7\varepsilon r v\xi\cos\theta}{8\sqrt{g}\left(\xi^2+r^2\right)^{\frac{3}{4}}} \right).$$

На рисунках 2 и 3 изображён график функции $y = y(x)$, построенный с учётом осциллирующих частей $f_x(\xi,\theta)$, $f_y(\xi,\theta)$ (точечный график) и без них (пунктирный график) при значениях $\varepsilon = 0.1$ (рисунок 2) и $\varepsilon = 0.01$ (рисунок 3). При вычислениях использовались следующие значения произвольных постоянных и параметров:

$$g = 1, \quad r = 1, \quad v = 1, \quad \xi_0 = 0, \quad C_\delta = 1, \quad \theta_0 = 0, \quad C_X = 1, \quad C_Y = 1. \qquad (28)$$

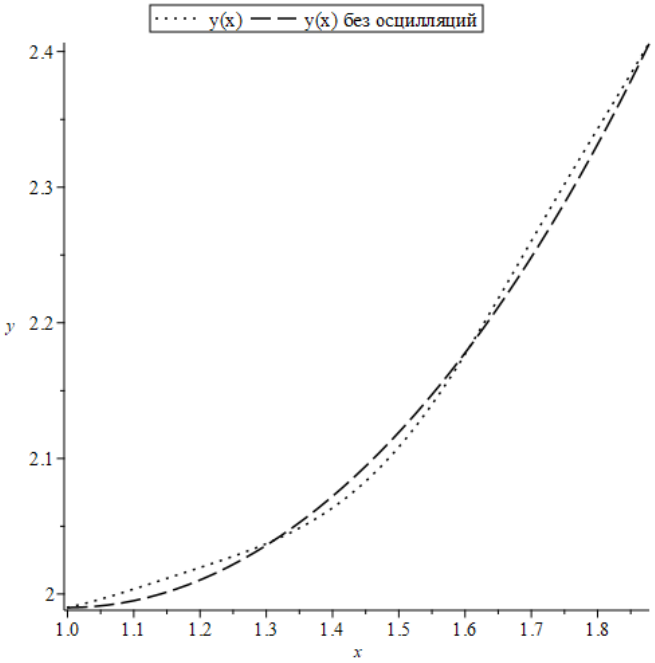


Рисунок 2 – График $y(x)$ при $\varepsilon = 0.1$

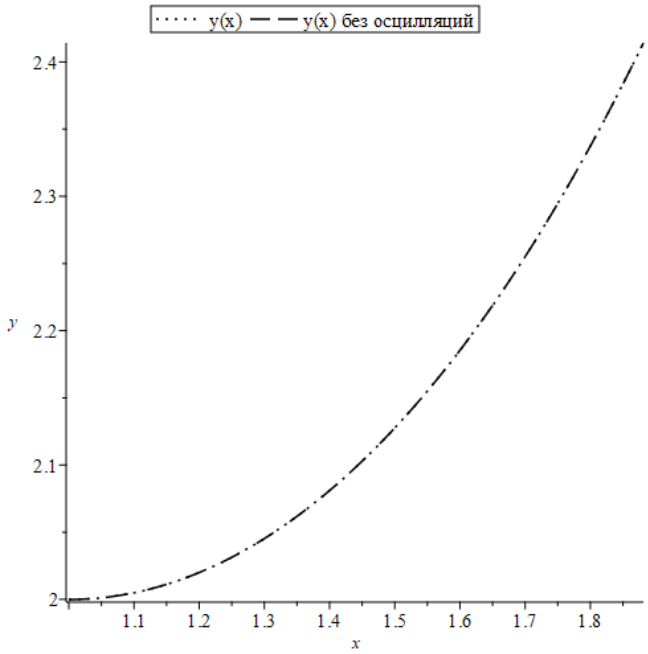


Рисунок 3 – График $y(x)$ при $\varepsilon = 0.01$

Также предполагается, что время t изменяется на отрезке $t \in \left[0, 1/\varepsilon\right]$.

Сравним полученное решение с численным решением системы уравнений (16). Начальные условия определяются из формул (24) и (27) подстановкой $t = 0$ и значений параметров и произвольных постоянных (28). Обозначим $\Delta x = x_{\text{ч}} - x$, $\Delta y = y_{\text{ч}} - y$, где индексом «ч» обозначено решение, построенное численно, а значения функций без индекса определяются полученными формулами (24), (27).

Графики ошибок строились на отрезке $t \in \left[0, 1/\varepsilon\right]$ для значений $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$. На рисунках 4–7 приведены графики ошибок Δx и Δy. Из них мы заключаем, что величины Δx и Δy имеют четвертый порядок малости по ε. Полученный результат позволяет предполагать, что указанное решение, с точностью до членов третьего порядка малости по ε, найдено верно.

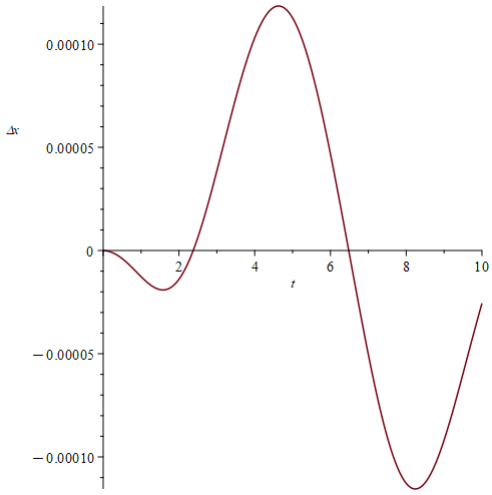


Рисунок 4 - График $\Delta x(t)$ при $\varepsilon = 0.1$

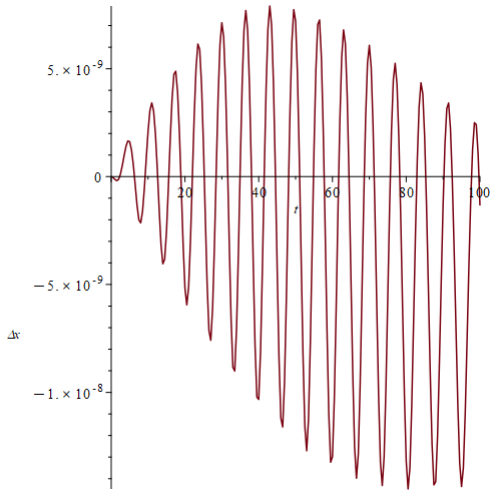


Рисунок 5 - График $\Delta x(t)$ при $\varepsilon = 0.01$

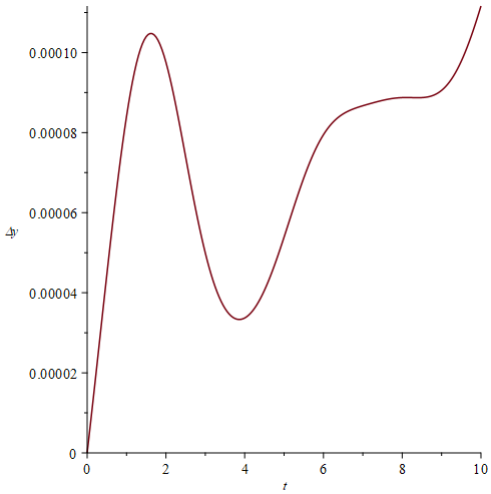


Рисунок 6 - График $\Delta y(t)$ при $\varepsilon = 0.1$

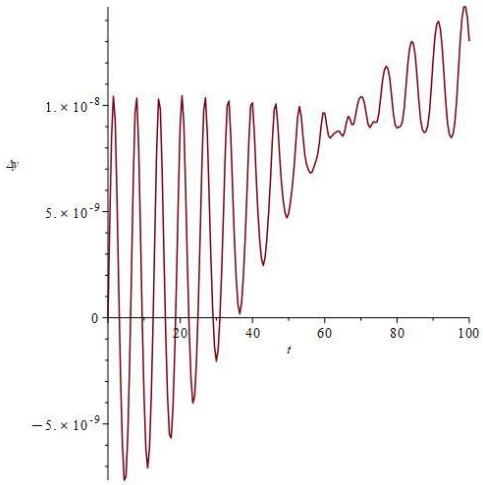


Рисунок 7 - График $\Delta y(t)$ при $\varepsilon = 0.01$

Заключение

В данной работе были приведены два примера слабо неголономных систем, в которых имеет место эффект трансгрессии. В задаче о движении материальной точки под действием упругой силы при наличии неголономной связи этот эффект состоит в движении точки вдоль оси Oz. В задаче о движении почти голономного маятника показано, что движение маятника представляет собой малые колебания вокруг медленно поворачивающегося направления фиксированного лезвия, при этом мгновенный центр скоростей движется по цепной линии, вершина которой смещается со скоростью третьего порядка малости (трансгрессия).

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ. 1945. № 564.
2. Загордан А.А. Современное состояние теории шимми // Труды МАИ. 2011. № 47. https://trudymai.ru/published.php?ID=26675.
3. Бабич О.А. Учет неголономной связи выходных сигналов бесплатформенных инерциальных навигационных систем в алгоритмах азимутальной коррекции // Гироскопия и навигация. 2012. № 4(79). С. 21–33.
4. Афонин Д.В. Методы, модели и алгоритмы управления роботизированной системой аэродромной буксировки воздушных судов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Курск. 2025.
5. Сачков Г.П., Фещенко С.В., Черноморский А.И. Устойчивость и стабилизация движения одноосной колесной транспортной платформы // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 24–37.
6. Алёшин Б.С., Черноморский А.И., Фещенко С.В. и др. Ориентация, навигация и стабилизация одноосных колесных модулей. М.: Издательство МАИ. 2012.
7. Черноморский А.И., Плеханов В.Е., Максимов В.Н. Математическая модель измерительного одноосного колесного модуля // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20, № 2.
8. Максимов В.Н., Черноморский А.И. Система управления неголономным одноосным колесным модулем для мониторинга геометрических параметров аэродромных покрытий // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 156–167.
9. Черноморский А.И., Курис Э.Д., Мельников В.Е. Программное

управление поступательно – вращательными перемещениями одноосного колёсного модуля // Труды МАИ. 2018. № 98. https://trudymai.ru/published.php?ID=87259

10. Татаринов Я. В. Слабо неголономные системы // Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24-30 сентября 1986 года. Аннотации докладов. Ташкент: ФАН. 1986. С. 592.

11. Татаринов Я. В. Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: Модельные задачи малой размерности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, № 5. С. 741–749.

12. Татаринов Я. В. Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, № 4. С. 604–614.

13. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений – I // Труды Московского Математического Общества. 1971. Т. 25. С. 119–262.

14. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений - II // Труды Московского Математического Общества. 1972. Т. 26. С. 199–239.

15. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

16. Edneral V. F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method // Differential Equations with Symbolic Computation / ed. By Wang Dongming, Zheng Zhiming. Basel : Birkhauser Basel. 2005. P. 173–200.

17. Кулешов А. С., Видов Н. М. Эффект трансгрессии в задаче о движении стержня по цилиндру // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10, № 3. С. 568–580.

18. Кулешов А. С., Видов Н. М. Эффект трансгрессии в задаче о качении шара в углублении // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11, № 3. С. 549–556.

19. Кулешов А. С., Видов Н. М. О движении пластинки по лезвию в поле сил специального вида // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12, № 4. С. 769–781.

20. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия

гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. https://trudymai.ru/published.php?ID=93297

21. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2022. № 126. https://trudymai.ru/published.php?ID=168988

22. Максимов Б.А. Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела при резонансе четвертого порядка в случае вырождения // Труды МАИ. 2025. № 144. https://trudymai.ru/publications.php?ID=185683

23. Кулешов А. С., Улятовская И. И. Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7, № 2. С. 356–361.

References

1. Keldysh M.V. Shimmi perednego kolesa trekhkolesnogo shassi [Shimmy of the front wheel of a three-wheeled landing gear]. Trudy TsAGI [Proceedings of TsAGI], 1945, no. 564. (In Russian).

2. Zagordan A.A. Sovremennoe sostoyanie teorii shimmi [Current state of the theory of shimmi]. Trudy MAI [Proceedings of MAI], 2011, no. 47. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=26675 (In Russian).

3. Babich O.A. Uchet negolonomnoy svyazi vkhodnykh signalov besplatformennoy inertsial'noy navigatsionnoy sistemy v algoritmakh azimutal'noy korrektsii [Accounting for the nonholonomic connection of output signals of strapdown inertial navigation systems in azimuthal correction algorithms]. Giroskopiya i navigatsiya [Gyroscopy and Navigation], 2012, no. 4(79), pp. 21–33. (In Russian).

4. Afonin D.V. Metody, modeli i algoritmy upravleniya robotizirovannoy sistemoy aerodromnoy buksirovki vozdushnykh sudov [Methods, models, and algorithms for controlling a robotized system for aerodrome towing of aircraft]. Dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences. Kursk, 2025. (In Russian).

5. Sachkov G.P., Feshchenko S.V., Chernomorskiy A.I. Ustoychivost' i

stabilizatsiya dvizheniya odnosoy kolesnoy transportnoy platformy [Stability and stabilization of motion of a uniaxial wheeled transport platform]. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solid Body], 2009, no. 4, pp. 24–37. (In Russian).

6. Alyoshin B.S., Chernomorskiy A.I., Feshchenko S.V. et al. Orientatsiya, navigatsiya i stabilizatsiya odnosoy kolesnykh modulyey [Orientation, navigation, and stabilization of uniaxial wheel modules]. Moscow: MAI Publishing House, 2012. (In Russian).

7. Chernomorskiy A.I., Plekhanov V.E., Maksimov V.N. Matematicheskaya model' izmeritel'nogo odnosoy kolesnogo modulya [Mathematical model of a measuring uniaxial wheel module]. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Bulletin of the Moscow Aviation Institute], 2013, vol. 20, no. 2. (In Russian).

8. Maksimov V.N., Chernomorskiy A.I. Sistema upravleniya negolonomnym odnosoy kolesnym modulyem dlya monitoringa geometricheskikh parametrov aerodromnykh pokrytiy [Control system for a nonholonomic uniaxial wheel module for monitoring geometric parameters of aerodrome surfaces]. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 156–167. (In Russian).

9. Chernomorskiy A.I., Kuris E.D., Mel'nikov V.E. Programmnoe upravlenie postupatel'no-vrashchatel'nymi peremeshcheniyami odnosoy kolesnogo modulya [Program control of translational-rotational movements of a uniaxial wheel module]. Trudy MAI [Proceedings of MAI], 2018, no. 98. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=87259 (In Russian).

10. Tatarinov Ya.V. Slabo negolonomnye sistemy [Weakly nonholonomic systems]. Shestoy Vsesoyuznyy s"ezd po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike [Sixth All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics]. Tashkent, September 24–30, 1986. Abstracts of reports. Tashkent: FAN, 1986, p. 592. (In Russian).

11. Tatarinov Ya.V. Sledstviya neintegriruemogo vozmushcheniya integriruemykh svyazey: Model'nye zadachi maloy razmernosti [Consequences of non-integrable perturbation of integrable constraints: Model problems of low dimension]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and

Mechanics], 1987, vol. 51, no. 5, pp. 741–749. (In Russian).

12. Tatarinov Ya.V. Sledstviya neintegriruemogo vozmushcheniya integriruemykh svyazey: nelineynye effekty vblizi mnogoobraziya ravnovesiy [Consequences of non-integrable perturbation of integrable constraints: nonlinear effects near the manifold of equilibria]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1992, vol. 56, no. 4, pp. 604–614. (In Russian).

13. Bryuno A.D. Analiticheskaya forma differentsial'nykh uravneniy – I [Analytical form of differential equations – I]. Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva [Proceedings of the Moscow Mathematical Society], 1971, vol. 25, pp. 119–262. (In Russian).

14. Bryuno A.D. Analiticheskaya forma differentsial'nykh uravneniy – II [Analytical form of differential equations – II]. Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva [Proceedings of the Moscow Mathematical Society], 1972, vol. 26, pp. 199–239. (In Russian).

15. Bryuno A.D. Lokal'nyy metod nelineynogo analiza differentsial'nykh uravneniy [Local method of nonlinear analysis of differential equations]. Moscow: Nauka, 1979. (In Russian).

16. Edneral V.F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method. In: Differential Equations with Symbolic Computation. Ed. by Wang Dongming, Zheng Zhiming. Basel: Birkhauser Basel, 2005, pp. 173–200.

17. Kuleshov A.S., Vidov N.M. Effekt transgressii v zadache o dvizhenii sterzhnya po tsilindru [The effect of transgression in the problem of a rod moving along a cylinder]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya [Bulletin of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2023, vol. 10, no. 3, pp. 568–580. (In Russian).

18. Kuleshov A.S., Vidov N.M. Effekt transgressii v zadache o kachenii shara v uglublenii [The effect of transgression in the problem of a ball rolling in a depression]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya [Bulletin of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2024, vol. 11, no. 3, pp. 549–556. (In Russian).

19. Kuleshov A.S., Vidov N.M. O dvizhenii plastinki po lezviyu v pole sil

spetsial'nogo vida [On the motion of a plate along a blade in a field of a special type]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya [Bulletin of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2025, vol. 12, no. 4, pp. 769–781. (In Russian).

20. Kholostova O.V., Safonov A.I. O bifurkatsiyakh polozheniy ravnovesiya gamil'tonovoy sistemy v sluchayakh dvoynogo kombinatsionnogo rezonansa tret'ego poryadka [On bifurcations of equilibrium positions of a Hamiltonian system in cases of double combination resonance of the third order]. Trudy MAI [Proceedings of MAI], 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93297 (In Russian).

21. Safonov A.I. O periodicheskikh dvizheniyakh gamil'tonovoy sistemy s dvumya stepenyami svobody v okrestnosti kratnogo rezonansa tret'ego poryadka [On periodic motions of a Hamiltonian system with two degrees of freedom in the neighborhood of a multiple resonance of the third order]. Trudy MAI [Proceedings of MAI], 2022, no. 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168988 (In Russian).

22. Maksimov B.A. Ob orbital'noy ustoychivosti mayatnikovykh kolebaniy tyazhelogo tverdogo tela pri rezonanse chetvertogo poryadka v sluchae vyrozhdeniya [On the orbital stability of pendulum oscillations of a heavy rigid body at a fourth-order resonance in the case of degeneration]. Trudy MAI [Proceedings of MAI], 2025, no. 144. URL: https://trudymai.ru/publications.php?ID=185683 (In Russian).

23. Kuleshov A.S., Ulyatovskaya I.I. Effekt transgressii v zadache o dvizhenii pochti golonomnogo mayatnika [The effect of transgression in the problem of motion of an almost holonomic pendulum]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya [Bulletin of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2020, vol. 7, no. 2, pp. 356–361. (In Russian).

Информация об авторах

Никита Михайлович Видов, аспирант, кафедра теоретической механики и мехатроники механико – математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; Научно-технологический университет «Сириус», г. Сочи, Россия; e-mail: nikitavidov98@gmail.com

Александр Сергеевич Кулешов, доктор физико – математических наук,

доцент кафедры теоретической механики и мехатроники механико – математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: alexander.kuleshov@math.msu.ru

Information about the authors

Nikita M. Vidov, Postgraduate Student, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia; e-mail: nikitavidov98@gmail.com

Alexander S. Kuleshov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: alexander.kuleshov@math.msu.ru

Получено 26 июня 2026 ● Принято к публикации 17 июля 2026 ● Опубликовано 28 октября 2026
Received 26 June 2026 ● Accepted 17 July 2026 ● Published 28 October 2026