УДК 621.391

# $p$-этапные дискретные ортонормированные и биортонормированные вейвлет-базисы в описании сигналов и линейных нестационарных дискретных систем управления на отрезке $[0, L-1]$

В.В. Рыбин

**Аннотация**

Для анализа и синтеза нестационарных непрерывных и, в общем случае, непрерывно-дискретных систем управления разработан спектральный метод расчета [1-4]. В последнее десятилетие в практике цифровой обработки сигналов нашли широкое применение вейвлет-преобразования [5, 6, 7-9] сходные с обычным преобразованием Фурье, но лучше описывающие локальные свойства функций в спектральной области. Применение вейвлетов для анализа линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов рассмотрено в работах [10, 11-12]. В работах [11, 1] дискретные вейвлеты строятся путем дискретизации непрерывных вейвлетов. В работе [8] разработан алгоритм построения дискретного ортонормированного $p$-этапного вейвлет-базиса на отрезке $[0, L-1]$.

В данной статье рассматриваются алгоритмы построения $p$-этапных дискретных ортонормированных и биортонормированных вейвлет-базисов и демонстрируется их реализация в пакете расширения MLSY_SM СКМ Mathcad [11, 12].

**Ключевые слова**

Биортогональный базис вейвлетов; $p$-этапного вейвлет-базис; нестационарные системы автоматического управления; спектральная форма математического описания, системы компьютерной математики.

## 1. Основные понятия и определения построения $p$-этапного дискретного вейвлет-базиса

Рассмотрим способ построения дискретных вейвлет-базисов, предложенный в работе М. Фрейзера [8]. В этом способе для построения дискретных вейвлет-базисов используются коэффициенты низкочастотных фильтров $\{h_k\}_{k=0}^{N}$, которые порождают аналогичные непрерывные вейвлет-базисы с компактным носителем [5].

Пусть $Z_L = [0, L-1]$. Будем рассматривать $L$-мерное векторное пространство над полем $C$

$$l^2(Z_L) = \{z = (z_0, z_1, \ldots, z_{L-1}) = (z(0), z(1), \ldots, z(L-1)) : z(j) \in C, 0 \le j \le L-1\}$$

с обычным покомпонентным сложением и скалярным умножением

$$(z, w) = \sum_{k=0}^{L-1} z(k) w^*(k) \tag{1}$$

с определяемой им нормой

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{L-1} |z(k)|^2} \,. \tag{2}$$

Пусть $z = (z(0), z(1), \ldots, z(L-1))$. Тогда для $m,\ l \in \{0,1,\ldots,L-1\}$ дискретное прямое и обратное преобразование Фурье запишем в виде

$$\hat{z}(m) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{L-1} z(l) e^{-i\frac{2\pi l m}{L}}, \qquad z(l) = (\hat{z})^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{z}(m) e^{i\frac{2\pi l m}{L}} \,. \tag{3}$$

Определим оператор сдвига $R_k$ на $k$ тактов для $n \in Z_L$ как

$$(R_k z)(n) = z(n \div k) \,, \tag{4}$$

где $x \div y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \ge y; \\ L + x - y, & \text{если } x < y. \end{cases}$

Для $z, w \in l^2(Z_L)$ свертку $z * w \in l^2(Z_L)$ запишем в виде

$$z * w(m) = \sum_{n=0}^{L-1} z(m \div n) w(n) \,. \tag{5}$$

Предположим, что $w \in l^2(Z_{2M})$. Тогда $\{R_{2k} w\}_{k=0}^{M-1}$ есть ортонормированное множество из $M$ элементов тогда и только тогда, когда $|\hat{w}(n)|^2 + |\hat{w}(n+M)|^2 = 2$ при $n = 0,1,\ldots,M-1$.

Ортонормированный базис $l^2(Z_{2M})$ вида

$$\{R_{2k} u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k} v\}_{k=0}^{M-1} \,, \tag{6}$$

для некоторых $u, v \in l^2(Z_{2M})$ называется *вейвлет-базисом первого этапа* $l^2(Z_{2M})$, а $u$ и $v$ *порождающими векторами вейвлет-базиса первого этапа*.

Для $n \in Z$ определим $A(n)$ - систему матриц из $u$ и $v$, равенством

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(n) & \hat{v}(n) \\ \hat{u}(n+M) & \hat{v}(n+M) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Тогда система (6) есть ортонормированный базис $l^2\left(Z_{2M}\right)$ тогда и только тогда, когда система матриц $A(n)$ из $u$ и $v$ унитарная для каждого $n = 0,1,\ldots,M-1$.

Это эквивалентно условиям:

$$\left|\hat{u}(n)\right|^2 + \left|\hat{u}(n+M)\right|^2 = 2, \qquad (8)$$

$$\left|\hat{v}(n)\right|^2 + \left|\hat{v}(n+M)\right|^2 = 2 \qquad (9)$$

и

$$\hat{u}(n)\hat{v}^*(n) + \hat{u}(n+M)\hat{v}^*(n+M) = 0 \qquad (10)$$

для всех $n = 0,1,\ldots,M-1$.

Заметим, что вектор $u$ часто называют термином "*отцовский вейвлет*", он содержит низкие частоты (низкочастотный фильтр), а $v$ - термином "*материнский вейвлет*", он содержит высокие частоты (высокочастотный фильтр).

Если вектор $u \in l^2\left(Z_{2M}\right)$ такой, что $\left\{R_{2k}u\right\}_{k=0}^{M-1}$ есть ортонормированное множества из $M$ элементов, а $v \in l^2\left(Z_{2M}\right)$ определен равенством

$$v(k) = (-1)^{k-1}u^*(1 \div k) \qquad (11)$$

для всех $k$. Тогда $\left\{R_{2k}u\right\}_{k=0}^{M-1} \cup \left\{R_{2k}v\right\}_{k=0}^{M-1}$ есть вейвлет-базис первого этапа пространства $l^2\left(Z_{2M}\right)$.

Определим операцию отбрасывания компонент с нечетными индексами отображением $D: l^2\left(Z_{2M}\right) \to l^2\left(Z_M\right)$, положив для $z \in l^2\left(Z_{2M}\right)$

$$D(z)(n) = z(2n) \qquad (12)$$

при $n = 0,1,\ldots,M-1$, а операцию вставки нуля между двумя смежными значениями отображением $U: l^2\left(Z_M\right) \to l^2\left(Z_{2M}\right)$, положив для $z \in l^2\left(Z_M\right)$

$$U(z)(n) = \begin{cases} z(n/2), & \textit{если n четно}, \\ 0, & \textit{если n нечетно}. \end{cases} \qquad (13)$$

Оператор $D$ называют оператором *сгущающей выборки или децимации*, а $U$ - оператором *разряжающей выборки.*

Тогда $l$-кратная композиция этих операторов определяется отображениями $D^l: l^2\left(Z_L\right) \to l^2\left(Z_{L/2^l}\right)$, $U^l: l^2\left(Z_{L/2^l}\right) \to l^2\left(Z_L\right)$ и дается формулами

$$D^l(z)(n) = z(2^l n) \qquad (14)$$

и

$$U^l(z)(n)=\begin{cases} z(n/2^l), & \text{если } 2^l \text{ делит } n,\\ 0, & \text{если } 2^l \text{ не делит } n. \end{cases} \tag{15}$$

Предположим, что $L$ делится на $2^p$. Последовательность вейвлет-фильтров $p$-го этапа есть последовательность векторов $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p$ таких, что для каждого $l = 1,2,3,\ldots,p$ $u_l, v_l \in l^2\left(Z_{L/2^{l-1}}\right)$ и матрицы

$$A_l(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{u}_l(n) & \hat{v}_l(n)\\ \hat{u}_l\left(n+\dfrac{L}{2^l}\right) & \hat{v}_l\left(n+\dfrac{L}{2^l}\right) \end{bmatrix} \tag{16}$$

унитарны для всех $n = 0,1,,\ldots,(L/2^l)-1$.

Если $L$ делится на $2^l$, то $u_l, v_l \in l^2\left(Z_{L/2^{l-1}}\right)$ для $2 \le l \le p$ и $0 \le n \le \dfrac{L}{2^{l-1}} - 1$ можно определить равенствами

$$u_l(n)=\sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n+\frac{kL}{2^{l-1}}\right) \text{ и } v_l(n)=\sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n+\frac{kL}{2^{l-1}}\right). \tag{17}$$

Здесь $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p$ есть $p$-этапная последовательность вейвлет фильтров.

Положим $f_1 = v_1$ и $g_1 = u_1$. Определим $f_l, g_l \in l^2(Z_L)$, $l = 2,3,\ldots,p$ по формулам $f_l = g_{l-1} * U^{l-1}(v_l)$, $g_l = g_{l-1} * U^{l-1}(u_l)$, где отображение $U^l : l^2\left(Z_{L/2^l}\right) \to l^2(Z_L)$ определяется формулой (15), а свертка формулой (5). Тогда для некоторых $f_1, f_2, \ldots, f_p, g_p \in l^2(Z_L)$ множество

$$\{R_{2k} f_1\}_{k=0}^{(L/2)-1} \cup \{R_{4k} f_2\}_{k=0}^{(L/4)-1} \cup \ldots \cup \{R_{2^p k} f_p\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \{R_{2^p k} g_p\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \tag{18}$$

называется *$p$-этапным вейвлет-базисом*, если оно ортонормированный базис $l^2(Z_L)$.

Пусть $L$ делится на $2^l$, $g_{l-1} \in l^2(Z_L)$

$$\{R_{2^{l-1}k} g_{l-1}\}_{k=0}^{(L/2^{l-1})-1} \tag{19}$$

- ортонормированное множество, состоящее из $L/2^{l-1}$ элементов. Предположим, что $f_l, g_l \in l^2(Z_L)$ и $A_l(n)$ в формуле (16) унитарны для всех $n = 0,1,,\ldots,(L/2^l)-1$. Положим $f_l = g_{l-1} * U^{l-1}(v_l)$, $g_l = g_{l-1} * U^{l-1}(u_l)$. Тогда

$$\{R_{2^l k} f_l\}_{k=0}^{(L/2^l)-1} \cup \{R_{2^l k} g_l\}_{k=0}^{(L/2^l)-1} \tag{20}$$

есть ортонормированное множество из $L/2^l$.

Определим пространства

$$V_{j+1}^{p-j-1} = span\left\{\underset{*}{\varphi_{j+1,k} = R_{2^{j+1}k} g_{j+1}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j-1})-1}, \tag{21}$$

$$V_j^{p-j} = span\left\{\underset{*}{\varphi_{j,k} = R_{2^j k} g_j}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1} \tag{22}$$

и

$$W_j^{p-j} = span\left\{\underset{*}{\psi_{j,k} = R_{2^j k} f_j}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}. \tag{23}$$

Тогда пространство $l^2(Z_L)$ сформировано как последовательность вложенных друг в друга подпространств $V_j^{p-j},\ j = 0,1,2,\ldots,p-1$ $\left(V_0^p \subseteq V_1^{p-1} \subseteq \ldots \subseteq V_j^{p-j} \subseteq \ldots \subseteq V_{p-1}^1 \subseteq l^2(Z_L)\right)$, где $V_{j+1}^{p-j-1} = V_j^{p-j} \oplus W_j^{p-j}$ и $V_j^{p-j} \perp W_j^{p-j}$.

Рассмотренный способ построения дискретных ортонормированных вейвлетов имеет обобщение на пространство $l^2(Z)$ [8]. Это обобщение позволяет построить вейвлет-базис первого этапа пространства $l^2(Z_L)$ по масштабной последовательности $u \in l^1(Z)$. Определим $v \in l^1(Z)$ равенством $v(k) = (-1)^{k-1} u^*(1-k)$. Тогда $\{R_{2k} u_{(L)}\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k} v_{(L)}\}_{k=0}^{M-1}$ есть вейвлет-базис первого этапа для $l^2(Z_L)$, где $u_{(L)}, v_{(L)} \in l^2(Z_L)$ и определяются равенствами $u_{(L)}(n) = \sum_{k \in Z} u(n+kL)$ и $v_{(L)}(n) = \sum_{k \in Z} v(n+kL)$, в которых ряды сходятся абсолютно.

Заметим, что приведенные результаты можно обобщить на дискретные биортогональные базисы [12]. Это обобщение порождает дискретные биортонормированные $p$-этапные вейвлет-базисы разложения

$$\left\{\underset{*}{\tilde{\varphi}_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\tilde{\psi}_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\tilde{\psi}_{1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-1})-1} \cup \ldots \cup \left\{\underset{*}{\tilde{\psi}_{p-2,k}}\right\}_{k=0}^{(L/4)-1} \cup \left\{\underset{*}{\tilde{\psi}_{p-1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2)-1} \tag{24}$$

и восстановления

$$\left\{\underset{*}{\varphi_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi_{1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-1})-1} \cup \ldots \cup \left\{\underset{*}{\psi_{p-2,k}}\right\}_{k=0}^{(L/4)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi_{p-1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2)-1} \tag{25}$$

пространства $l^2(Z_L)$. А само пространство $l^2(Z_L)$ в этом случае формируется как последовательность вложенных друг в друга подпространств разложения $\tilde{V}_j^p$ или восстановления $V_j^p$ $j = 0,1,2,\ldots,p-1$, т.е. имеются две цепочки пространств биортогонального анализа $\tilde{V}_0^p \subseteq \tilde{V}_1^{p-1} \subseteq \ldots \subseteq \tilde{V}_j^{p-j} \subseteq \ldots \subseteq \tilde{V}_{p-1}^1 \subseteq l^2(Z_L)$ и $V_0^p \subseteq V_1^{p-1} \subseteq \ldots \subseteq V_j^{p-j} \subseteq \ldots \subseteq V_{p-1}^1 \subseteq l^2(Z_L)$, где $\tilde{V}_{j+1}^{p-j-1} = \tilde{V}_j^{p-j} \dotplus \tilde{W}_j^{p-j}$, $V_{j+1}^{p-j-1} = V_j^{p-j} \dotplus W_j^{p-j}$ и

$\underset{*}{\widetilde{V}}{}_j^{p-j} \perp W_j^{p-j}$, $V_j^{p-j} \perp \widetilde{W}_j^{p-j}$. Тогда любая функция $x \in l^2(Z_L)$ полностью характеризуется ее вейвлет коэффициентами разложения

$$\widetilde{s}_{0,k} = \sum_{l=0}^{L-1} x(l) \underset{*}{\widetilde{\varphi}_{0,k}}(l), \;\; k = 0,1,\ldots,\frac{L}{2^p}-1, \tag{26}$$

$$\widetilde{d}_{j,k} = \sum_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1} x(l) \underset{*}{\widetilde{\psi}_{j,k}}(l), \quad j = 0,1,\ldots,p-1, \quad k = 0,1,\ldots,\frac{L}{2^{p-j}}-1 \tag{27}$$

и может быть восстановлена по формуле

$$x(l) = \sum_{k=0}^{(L/2^p)-1} \widetilde{s}_{0,k}\, \underset{*}{\varphi_{0,k}}(l) + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1} \widetilde{d}_{j,k}\, \underset{*}{\psi_{j,k}}(l). \tag{28}$$

Для описания сигналов и систем управления преобразуем заданный биортонормированный $p$-этапный вейвлет-базис к стандартному виду $\left\{ \underset{*}{r_h}, \underset{*}{q_h} \right\}$, где

$$\underset{*}{r_h}(L,p,l) = \begin{cases} \underset{*}{\widetilde{\varphi}_{0,h}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h} = 0,1,\ldots,\frac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1; \mathrm{l} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-1; \\ \underset{*}{\widetilde{\psi}_{\mathrm{j},\frac{\mathrm{k\,L}}{2^{\mathrm{p}}}+\mathrm{m}}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h} = \dfrac{\left(2^{\mathrm{j}}+k\right)L}{2^p}+m; \\ L = 2^n; n = 1,2,\ldots; \mathrm{p} = 1,2,3,\ldots,n; \mathrm{j} = 0,1,2,\ldots\mathrm{p}-1; \\ k = 0,1,\ldots,2^j-1; \mathrm{m} = 0,1,\ldots,\frac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1, \mathrm{l} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-1 \end{cases} \tag{29}$$

- базис разложения, а

$$\underset{*}{q_h}(L,p,l) = \begin{cases} \underset{*}{\varphi_{0,h}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h} = 0,1,\ldots,\frac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1; \mathrm{l} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-1; \\ \underset{*}{\psi_{\mathrm{j},\frac{\mathrm{k\,L}}{2^{\mathrm{p}}}+\mathrm{m}}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h} = \dfrac{\left(2^{\mathrm{j}}+k\right)L}{2^p}+m; \\ L = 2^n; n = 1,2,\ldots; \mathrm{p} = 1,2,3,\ldots,n; \mathrm{j} = 0,1,2,\ldots\mathrm{p}-1; \\ k = 0,1,\ldots,2^j-1; \mathrm{m} = 0,1,\ldots,\frac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1, \mathrm{l} = 0,1,\ldots,\mathrm{L}-1 \end{cases} \tag{30}$$

- базис восстановления. Тогда любая функция $x \in l^2(Z_L)$ полностью характеризуется ее НСХ [12]

$$\underset{\underset{*}{r}}{X}(i,L) = \sum_{l=0}^{L-1} \underset{*}{r^*}(i,L,p,l)\, x(l), \tag{31}$$

и может быть восстановлена по формуле обращения [12]

$$x(l)=\sum_{i=0}^{L-1}\underset{*}{X_q}(i,L)\underset{*}{q}(i,L,p,l)\,. \qquad (32)$$

Спектральный аппарат описания линейных нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления в биортонормированных базисах рассмотрен в работе [12]. В работах [11, 12] разработаны пакеты расширения СКМ Mathcad, содержащий все элементарные алгоритмы спектрального метода анализа нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления в вейвлет-базисах. Эти пакеты можно пополнить подсистемами программ, которые реализуют спектральные алгоритмы в дискретных $p$-этапных вейвлет-базисах. Поэтому далее остановимся только на примерах реализации спектральных алгоритмов в $p$-этапных вейвлет-базисах.

**2. Примеры реализации $p$-этапных вейвлет-алгоритмов в базисе дискретных функций Добеши М-го порядка в СКМ Mathcad**

Рассмотрим здесь только некоторые элементарные $p$-этапные вейвлет-операции и элементарные $p$-этапные операции спектрального метода в базисе Добеши $M$-го порядка.

2.1. $p$-этапный алгоритм построения дискретного вейвлет-базиса Добеши М-го порядка

$p$-этапные вейвлет-базисы разложения (24) и восстановления (25) для вейвлетов Добеши М-го порядка совпадают, так как вейвлеты Добеши М-го порядка порождают ортонормированный базис. А сам алгоритм вычисления $p$-этапного вейвлет-базиса Добеши $M$-го порядка включает следующие шаги:

1) Пусть $2^p\,|\,L$ и $u_l, v_l \in l^2\left(Z_{L/2^{l-1}}\right)$, $l=1,2,3,\ldots,p$, где $Z_L=[0,\,L-1]$.

2) Найдем систему дискретных ортонормированных вейвлет-функций Добеши М-го порядка первого этапа $l^2\left(Z_L\right)$.

2.1) Положим $u(m)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad m<0;\\ h(m), & \text{если} \quad m=0,1,\ldots,2M-1;\\ 0, & \text{если} \quad m\ge 2M.\end{cases}$ где $h(m)$ - коэффициенты низкочастотного фильтра для вейвлетов Добеши М-го порядка [5]. Тогда $u_1(n)=\sum_k u(n+kL)$, где $n=0,1,\ldots,L-1$.

2.2) По $u_1$ найдем $v_1(k)=(-1)^{k-1}u_1(1\div k)$ для всех $k$, где $x\div y=\begin{cases}x-y, & \text{если } x\ge y;\\ L+x-y, & \text{если } x<y.\end{cases}$

3) Найдем $u_l, v_l$ по формулам $u_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right)$ и $v_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right)$ для $2 \le l \le p$ и $0 \le n \le \frac{L}{2^{l-1}} - 1$.

4) Положим $f_1 = v_1$ и $g_1 = u_1$. Определим $f_l, g_l \in l^2(Z_L), l = 2,3,\ldots,p$ по формулам $f_l = g_{l-1} * U^{l-2}(v_l)$, $g_l = g_{l-1} * U^{l-2}(u_l)$, где отображение $U^l : l^2\left(Z_{L/2^l}\right) \to l^2(Z_L)$ и свертка имеют вид:

$$U^l(w)(n) = \begin{cases} w(n/2^l), \text{ если } 2^l \text{ делит } n; \\ 0, \quad \text{если } 2^l \text{ не делит } n, \end{cases} \quad z * w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m \div n) w(n),\ z, w \in l^2(Z_L).$$

5) Положим $(R_k z)(n) = z(n \div k)$ для $n, k \in Z_L$ и $z \in l^2(Z_L)$. Находим ортонормированные базисы $\left\{\underset{*}{\psi}_{j,k} = R_{2^j k} f_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}$ и $\left\{\underset{*}{\varphi}_{j,k} = R_{2^j k} g_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}$ дискретных пространств $W_j^{p-j} = span\left\{\underset{*}{\psi}_{j,k}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}$ и $V_j^{p-j} = span\left\{\underset{*}{\varphi}_{j,k}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}$ для $j = 0,1,2,3,\ldots,p-1$.

Тогда $\left\{\underset{*}{\varphi}_{0,k}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi}_{0,k}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi}_{1,k}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-1})-1} \cup \ldots \cup \left\{\underset{*}{\psi}_{p-2,k}\right\}_{k=0}^{(L/4)-1} \cup \left\{\underset{*}{\psi}_{p-1,k}\right\}_{k=0}^{(L/2)-1}$

есть дискретный ортонормированный p-этапный вейвлет-базис Добеши M-го порядка пространства $l^2(Z_L)$.

```
FG(L,p,j,k,g) :=
      := | Dg ← length(g)
         | :
         | for l ∈ 1..p − 1                                                      if p ≥ 2
         |    for m ∈ 0..L − 1
         |       |            L−1
         |       | gl_{l,m} ←  Σ   gl_{l−1, | m−n if m≥n        } · uu_{l−1,n}
         |       |            n=0           | (L+m−n) if m<n
         |       |            L−1
         |       | fl_{l,m} ←  Σ   gl_{l−1, | m−n if m≥n        } · vv_{l−1,n}
         |       |            n=0           | (L+m−n) if m<n
         | for n ∈ 0..L − 1
         |    | ψ_{1,n} ← − fl_{p−j−1, | n−2^{p−j}·k if n≥2^{p−j}·k       }
         |    |                        | (L+n−2^{p−j}·k) if n<2^{p−j}·k
         |    | ψ_{0,n} ← gl_{p−j−1, | n−2^{p−j}·k if n≥2^{p−j}·k         }
         |    |                      | (L+n−2^{p−j}·k) if n<2^{p−j}·k
         | ψ
```

Рис. 1.

Фрагмент программного модуля, который реализует алгоритм вычисления $p$-этапного вейвлет-базиса Добеши М-го порядка в СКМ Mathcad, показан на рис. 1. Этот фрагмент отражает итерационный этап построения вейвлет-базиса Добеши М-го порядка. В программу передаются следующие параметры: $L = 2,4,8,\ldots$ - длина отрезка $[0, \mathrm{L}-1]$; $p$ - количество этапов вейвлет-базиса Добеши М-го порядка: $j = 0,1,2,\ldots,p-1$ и $k = 0,1,\ldots,L/2^{p-j}-1$ - параметры, определяющие вычисляемые дискретные вейвлеты $\varphi_{j,k}(l)$ и $\psi_{j,k}(l)$; параметр $g$ - идентификатор матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра вейвлетов Добеши $M$-го порядка [5, 11].

Программа формирует матрицу порядка $2\times(L-1)$, первая и вторая строки которой содержат соответственно дискретные вейвлеты $\varphi_{j,k}(l)$ и $\psi_{j,k}(l)$.

Результат работы этой программы при $L = 8$, $p = 2$ порождает $2$-этапный вейвлет-базис Добеши второго порядка (рис. 2).

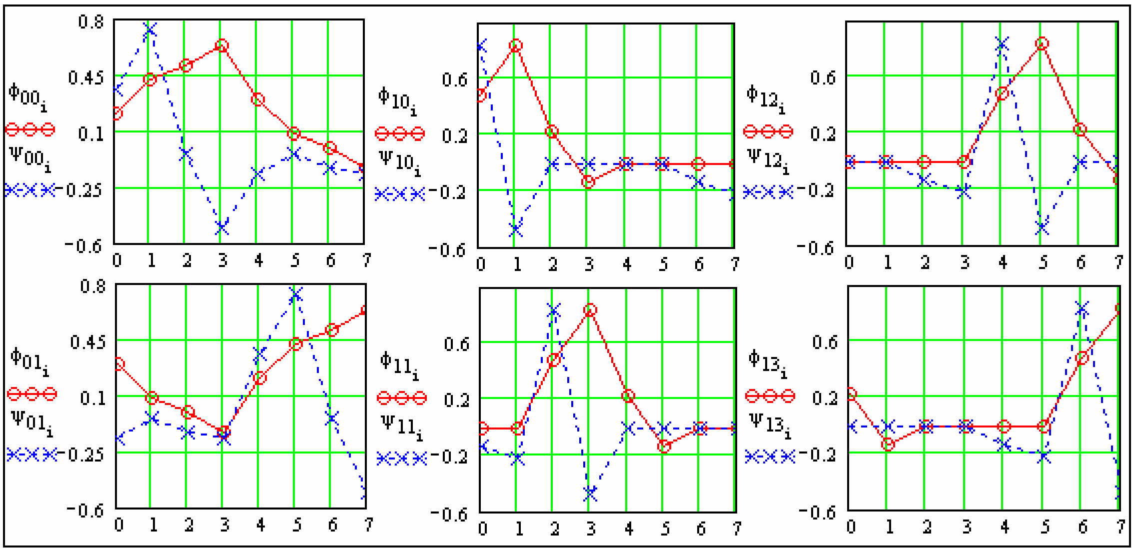

Рис. 2

2.2. Формирование стандартного вейвлет-базиса Добеши М-го порядка по $p$ -этапному вейвлет-базису

Для биортонормированного вейвлет-базиса приведение к стандартному виду осуществляется по формулам (29) и (30). В ортогональном случае эти формулы совпадают. Поэтому для стандартного вейвлет-базиса Добеши М-го порядка будем иметь

$$\underset{*}{z_h}(L,p,l)=\begin{cases}\underset{*}{\varphi_{0,h}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h}=0,1,\ldots,\dfrac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1; \mathrm{l}=0.1,\ldots,\mathrm{L}-1;\\ \underset{*}{\psi_{\mathrm{j},\frac{\mathrm{kL}}{2^{\mathrm{p}}}+\mathrm{m}}}(l) \quad \text{при } \mathrm{h}=\dfrac{(2^{\mathrm{j}}+k)L}{2^{p}}+m;\\ L=2^{n}; n=1,2,\ldots; \mathrm{p}=1,2,3,\ldots,n; \mathrm{j}=0,1,2,\ldots \mathrm{p}-1;\\ k=0,1,\ldots,2^{j}-1; \mathrm{m}=0,1,\ldots,\dfrac{\mathrm{L}}{2^{\mathrm{p}}}-1; \mathrm{l}=0.1,\ldots,\mathrm{L}-1.\end{cases} \tag{33}$$

Программный модуль, реализующий алгоритм формирования $z_h(L,p,l)$ в системе Mathcad, показан на рис 3. В программу передаются следующие параметры: $L=2,4,8,\ldots$ - количество тактовых точек на отрезке работы системы управления $[0, L-1]$; $L1=2,4,8,\ldots$ - количество вычисляемых дискретных функций Добеши М-го порядка $(L1\le L)$; $p=1,2,\ldots,n$ - количество этапов вейвлет-базиса Добеши М-го порядка $(2^p \le L=2^n)$, $g$ - идентификатор матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра вейвлетов Добеши $M$ -го порядка; $M$ - порядок вейвлетов Добеши. Результат работы этой программы для вейвлетов Добеши второго порядка при $L=8,\ L1=4,\ \ p=2$, порождает $2$ -этапный стандартный вейвлет-базис. (рис. 4).

```
SDBZZ2P(L,L1,p,g,M) := | n ← trunc(log(L)/log(2))
                       | for m ∈ 0.. L/2^p − 1
                       |   for l ∈ 0.. 2^n − 1
                       |     DM_{l,m} ← FG(2^n,p,0,m,g)_{0,l}
                       | for j ∈ 0.. p − 1
                       |   for k ∈ 0.. 2^j − 1
                       |     for m ∈ 0.. L/2^p − 1
                       |       for l ∈ 0.. 2^n − 1
                       |         DM_{l,(2^j+k)·L/2^p+m} ← FG(2^n,p,j,k·L/2^p + m,g)_{1,l}
                       | for l ∈ 0.. L − 1
                       |   for i ∈ 0.. L1 − 1
                       |     DM1_{l,i} ← DM_{l,i}
                       | DM1
```

Рис. 3

$L := 8 \qquad L1 := 4 \qquad p := 2 \qquad Z := SDBZZ1(L,L1,p,g2,2)$

$$Z^{T} = \begin{pmatrix} 0.204 & 0.421 & 0.512 & 0.637 & 0.296 & 0.079 & -0.012 & -0.137 \\ 0.296 & 0.079 & -0.012 & -0.137 & 0.204 & 0.421 & 0.512 & 0.637 \\ 0.354 & 0.729 & -0.046 & -0.512 & -0.171 & -0.046 & -0.137 & -0.171 \\ -0.171 & -0.046 & -0.137 & -0.171 & 0.354 & 0.729 & -0.046 & -0.512 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.

2.3. Вычисление ДНПФ суммирующего и разностного звена в стандартном вейвлет-базисе Добеши $M$ -го порядка

Алгоритмы вычисления ДНПФ суммирующего и разностного звеньев [1-4, 11, 12] для стандартного вейвлет-базиса Добеши $M$ -го порядка, запишем в виде

$$\underset{\substack{z\,z\\ *\,*}}{P}(h,i,L,L) = \sum_{l=0}^{L-1} \underset{*}{z}(h,L,p,l) \sum_{m=0}^{l} \underset{*}{z}(i,L,p,m), \tag{34}$$

$$\underset{\substack{z\,z\\ *\,*}}{P}\;(h,i,L,L) = \underset{*}{z}(h,L,p,0)\,\underset{*}{z}(i,L,p,0) + \sum_{l=0}^{L-1} \underset{*}{z}(h,L,p,l) \nabla_{l}\, \underset{*}{z}(i,L,p,l). \tag{35}$$

Программный модуль, реализующий алгоритм вычисления ДНПФ суммирующего звена по формуле (34), показан на рис.5, а программный модуль, реализующий алгоритм вычисления ДНПФ разностного звена по формуле (35), показан на рис.6.

$$
SC1ZZ1(L,L1,p,g,M) := \begin{array}{|l} Q \leftarrow SDBZZ1(L,L1,p,g,M) \\ \text{for } h \in 0..L1-1 \\ \quad \text{for } i \in 0..L1-1 \\ \qquad A_{h,i} \leftarrow \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{p} \left(Q_{p,h} \cdot Q_{k,i}\right) \\ A \end{array}
$$

Рис. 5

$$
SR1ZZ1(L,L1,p,g,M) := \begin{array}{|l} Q \leftarrow SDBZZ1(L,L1,p,g,M) \\ \text{for } h \in 0..L1-1 \\ \quad \text{for } i \in 0..L1-1 \\ \qquad A_{h,i} \leftarrow Q_{0,h} \cdot Q_{0,i} + \sum_{p=1}^{L-1} Q_{p,h} \cdot \left(Q_{p,i} - Q_{p-1,i}\right) \\ A \end{array}
$$

Рис. 6

В эти программы передаются следующие параметры: $L = 2,4,8,\ldots$ - количество тактовых точек на отрезке работы системы управления $[0, L-1]$ $(L \geq L1)$; $L1 = 2,4,8,\ldots$ - порядок усечения матрицы ДНПФ; $p = 1,2,\ldots,n$ - количество этапов вейвлет-базиса Добеши М-го порядка $(2^p \leq L = 2^n)$, $g$ - идентификатор матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра вейвлетов Добеши $M$-го порядка; $M$ - порядок вейвлетов Добеши.

Результат работы этих программ при $L = 4,\ L1 = 4,\ \ p = 2$ в стандартном вейвлет-базис Добеши второго порядка, показан на рис. 7.

$$
L := 4 \quad L1 := 4 \quad p := 2 \quad C := SC1ZZ1(L,L1,p,g2,2) \quad R := SR1ZZ1(L,L1,p,g2,2)
$$

$$
C = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.866 & 0.707 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0.354 & -0.354 \\ -0.707 & -0.354 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.354 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.342 & -0.112 & -0.241 \\ 0.092 & 0.875 & -0.748 & 0.619 \\ 0.418 & 0.136 & 1.312 & 0.096 \\ -0.065 & -0.619 & 0.529 & 1.562 \end{pmatrix} \quad C \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Рис. 7

### 3. Примеры реализации $p$-этапных вейвлет-алгоритмов в базисе дискретных сплайн-вейвлетов М-го порядка в СКМ Mathcad

Рассмотрим здесь только некоторые элементарные $p$-этапные вейвлет-операции и элементарные $p$-этапные операции спектрального метода в базисе сплайн-вейвлетов с компактным носителем [12].

3.1. $p$-этапный алгоритм построения биортогональных дискретных сплайн-вейвлетов М-го порядка разложения и восстановления пространства $l^2[0, L-1]$

Алгоритм вычисления $p$-этапного биортогонального вейвлет-базиса разложения (24) и восстановления (25) пространства $l^2[0, L-1]$, включает следующие шаги:

1) Пусть $2^p | L$ и $u_l, \widetilde{u}_l, v_l, \widetilde{v}_l \in l^2\left(Z_{L/2^{l-1}}\right), l = 1,2,3,\ldots,p$, где $Z_L = [0, L-1]$.

2) Найдем систему дискретных биортонормированных вейвлет-функций разложения и восстановления М-го порядка первого этапа $l^2(Z_L)$.

2.1) Положим $u(m) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m < 0 \; u \; m \geq N, \\ h(m), & \text{если} \quad m = 0,1,\ldots,N-1. \end{cases}$ где $h(m)$ - коэффициенты низкочастотного фильтра восстановления сплайн-вейвлетов М-го порядка [5]. Тогда $u_1(n) = \sum_{k \in Z} u(n + kL)$, где $n = 0,1,\ldots,L-1$.

2.2) Положим $\widetilde{u}(m) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m < 0 \; u \; m \geq N1, \\ \widetilde{h}(m), & \text{если} \quad m = 0,1,\ldots,N1-1. \end{cases}$ где $\widetilde{h}(m)$ - коэффициенты низкочастотного фильтра разложения сплайн-вейвлетов М-го порядка [5]. Тогда $\widetilde{u}_1(n) = \sum_{k \in Z} \widetilde{u}(n + kL)$, где $n = 0,1,\ldots,L-1$.

2.3) По $u_1$ и $\widetilde{u}_1$ найдем: $\widetilde{v}_1(k) = (-1)^{k-1} u_1(1 \div k)$, $v_1(k) = (-1)^{k-1} \widetilde{u}_1(1 \div k)$ для всех $k$, где $x \div y = \begin{cases} x - y, & \text{если}\, x \geq y; \\ L + x - y, & \text{если}\, x < y. \end{cases}$

3) Найдем $u_l, \widetilde{u}_l, v_l, \widetilde{v}_l$ по формулам

$$\widetilde{u}_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} \widetilde{u}_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right), \; \widetilde{v}_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} \widetilde{v}_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right)$$

и

$$u_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right), \; v_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n + \frac{kL}{2^{l-1}}\right)$$

для $2 \leq l \leq p$ и $0 \leq n \leq \dfrac{L}{2^{l-1}} - 1$.

4) Положим: $\widetilde{f}_1 = \widetilde{v}_1$, $f_1 = v_1$, $\widetilde{g}_1 = \widetilde{u}_1$, $g_1 = u_1$. Определим $\widetilde{f}_l, \widetilde{g}_l, f_l, g_l \in l^2(Z_L)$, $l = 2,3,\ldots,p$ по формулам $\widetilde{f}_l = \widetilde{g}_{l-1} * U^{l-2}(\widetilde{v}_l)$, $f_l = g_{l-1} * U^{l-2}(v_l)$, $\widetilde{g}_l = \widetilde{g}_{l-1} * U^{l-2}(\widetilde{u}_l)$, $g_l = g_{l-1} * U^{l-2}(u_l)$, где отображение $U^l : l^2\left(Z_{L/2^l}\right) \rightarrow l^2(Z_L)$ и свертка имеют вид:

$$U^l(w)(n)=\begin{cases} w(n/2^l), \text{ если } 2^l \text{ делит } n; \\ 0, \quad \text{ если } 2^l \text{ не делит } n, \end{cases} \qquad z*w(m)=\sum_{n=0}^{N-1} z(m\div n)w(n),\ z,w\in l^2(Z_L).$$

5) Положим $(R_k z)(n)=z(n\div k)$ для $n,k\in Z_L$ и $z\in l^2(Z_L)$. Находим ортонормированные базисы:

$$\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{i,k}}=R_{2^j k}\widetilde{f}_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},\ \left\{\underset{*}{\widetilde{\varphi}_{j,k}}=R_{2^j k}\widetilde{g}_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},\ \left\{\underset{*}{\psi_{i,k}}=R_{2^j k}f_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},\ \left\{\underset{*}{\varphi_{j,k}}=R_{2^j k}g_j\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1}$$

дискретных пространств:

$$\widetilde{W}_j^{p-j}=span\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{j,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},\qquad \widetilde{V}_j^{p-j}=span\left\{\underset{*}{\widetilde{\varphi}_{j,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},W_j^{p-j}=span\left\{\underset{*}{\psi_{j,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1},$$

$$V_j^{p-j}=span\left\{\underset{*}{\varphi_{j,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-j})-1} \quad \text{для } j=0,1,2,3,\ldots,p-1.$$

Тогда

$$\left\{\underset{*}{\widetilde{\varphi}_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1}\cup\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1}\cup\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-1})-1}\cup\ldots\cup\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{p-2,k}}\right\}_{k=0}^{(L/4)-1}\cup\left\{\underset{*}{\widetilde{\psi}_{p-1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2)-1}$$

и

$$\left\{\underset{*}{\varphi_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1}\cup\left\{\underset{*}{\psi_{0,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^p)-1}\cup\left\{\underset{*}{\psi_{1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2^{p-1})-1}\cup\ldots\cup\left\{\underset{*}{\psi_{p-2,k}}\right\}_{k=0}^{(L/4)-1}\cup\left\{\underset{*}{\psi_{p-1,k}}\right\}_{k=0}^{(L/2)-1}$$

есть дискретные биортонормированные $p$-этапные вейвлет-базисы разложения и восстановления сплайн-вейвлетов $M$-го порядка пространства $l^2(Z_L)$.

Этот алгоритм имеет несколько программных реализаций. Программные модули, реализующие алгоритм вычисления $p$-этапного вейвлет-базиса разложения и восстановления сплайн-вейвлетов $M$-го порядка здесь не приводятся.

*3.2. Формирование стандартного вейвлет-базиса сплайн-вейвлетов M-го порядка по $p$-этапному вейвлет-базису*

Пусть $M=0,1,2,3,\ldots$ - порядок B-сплайна. Тогда [1] $N=M+2=2,3,4,\ldots$ - число коэффициентов вейвлет-фильтра восстановления, а $N1=N+2k$ - число коэффициентов вейвлет-фильтра разложения. Если $N$ четное, то $k=0,2,4,\ldots$, если $N$ нечетное, то $k=1,3,5,\ldots$. Тогда $hSVR\varphi Mk$ - идентификатор матрицы порядка $N1\times 2$, которая содержит коэффициенты низкочастотного фильтра масштабирующей функции восстановления (первый столбец) и разложения (второй столбец) для сплайна порядка $M$ и выбранного $k$;

Для биортонормированного вейвлет-базиса приведение к стандартному виду осуществляется по формулам (29) и (30). Программный модуль, реализующий алгоритм формирования базиса разложения $r_h(L, p, l)$ в СКМ Mathcad, показан на рис 8.

В программу передаются следующие параметры: $L = 2,4,8,\ldots$ - количество тактовых точек на отрезке работы системы управления $[0, L-1]$; $L1 = 2,4,8,\ldots$ - количество вычисляемых дискретных базисных функций сплайн-вейвлетов М-го порядка $(L \le L1)$; $h$ - идентификатор матрицы порядка $rovs(h) \times 2$, которая содержит коэффициенты низкочастотных фильтров восстановления (первый столбец) и разложения (второй столбец) сплайн-вейвлетов М-го порядка.

```
SDBRMMP1(L,L1,p,h) :=
 := | n ← trunc( log(L) / log(2) )
    | for l ∈ 0..2^n − 1
    |  for j ∈ 0..p − 1
    |   for k ∈ 0..2^j − 1
    |    for m ∈ 0..L/2^p − 1
    |     | DM_{l,m} ← FGBORP(2^n,p,p,m,h)_{0,1}
    |     | DM_{l,((2^j+k)·L)/2^p+m} ← FGBORP[2^n,p,p − j,((2^j − k − 1)·L)/2^p + m,h]_{1,1}
    | for l ∈ 0..L − 1
    |   for i ∈ 0..L1 − 1
    |     DM1_{l,i} ← DM_{l,i}
    | DM1
```

Рис. 8

Результат работы программ, реализующих алгоритмы (29), (30) при $p = 1$, $L = 8$, $L1 = 2$, $h = hSVR\phi 11$, порождает стандартный базис биортонормированных сплайн-вейвлетов (рис. 9).

$p := 1 \quad L := 8 \quad L1 := 2 \quad R := SDBRMMP1(L, L1, p, hSVR\phi 11)$

$i := 0..L-1 \quad V := SDBVMMP1(L, L1, p, hSVR\phi 11)$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.177 \\ 0 & 0.354 \\ -0.177 & 1.061 \\ 0.354 & 0.354 \\ 1.061 & -0.177 \\ 0.354 & 0 \\ -0.177 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.354 \\ 0 & 0.707 \\ 0.354 & 0.354 \\ 0.707 & 0 \\ 0.354 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R^T \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 9.

*3.3. Вычисление ДНПФ суммирующего и разностного звена в стандартном базисе* сплайн-вейвлетов $M$-го порядка

Алгоритмы вычисления ДНПФ суммирующего и разностного звеньев [1-4,11, 12] в стандартном базисе сплайн-вейвлетов $M$-го порядка, запишем в виде

$$P_{\underset{*}{r}\underset{*}{q}}(h,i,L,L) = \sum_{l=0}^{L-1} \underset{*}{r}(h,L,p,l) \sum_{m=0}^{l} \underset{*}{q}(i,L,p,m), \tag{36}$$

$$P_{\underset{*}{r}\underset{*}{q}}(h,i,L,L) = \underset{*}{r}(h,L,p,0)\,\underset{*}{q}(i,L,p,0) + \sum_{l=0}^{L-1} \underset{*}{r}(h,L,p,l)\nabla_l\, \underset{*}{q}(i,L,p,l). \tag{37}$$

Программный модуль, реализующий алгоритм вычисления ДНПФ суммирующего звена по формуле (36), показан на рис.10, а программный модуль, реализующий алгоритм вычисления ДНПФ разностного звена по формуле (37), показан на рис.11.

```
SC1MMP1(L,L1,p,h) := | Q1 ← SDBVMMP1(L,L1,p,h)
                     | Q2 ← SDBRMMP1(L,L1,p,h)
                     | for h ∈ 0..L1 − 1
                     |   for i ∈ 0..L1 − 1
                     |                L1−1   s
                     |      A_{h,i} ←  Σ     Σ   (Q2_{s,h} · Q1_{k,i})
                     |                s=0   k=0
                     | A
```

Рис. 10

```
SR1MMP1(L,L1,p,h) :=
 := | Q1 ← SDBVMMP1(L,L1,p,h)
    | Q2 ← SDBRMMP1(L,L1,p,h)
    | for h ∈ 0..L1 − 1
    |   for i ∈ 0..L1 − 1
    |     A_{h,i} ← Q2_{0,h} · Q1_{0,i} + Σ_{k=1}^{L1−1} Q2_{k,h} · (Q1_{k,i} − Q1_{k−1,i})
    | A
```

Рис. 11

В эти программы передаются следующие параметры: $L = 2,4,8,\ldots$ - количество тактовых точек на отрезке работы системы управления $[0, L-1]$ $(L \geq L1)$; $L1 = 2,4,8,\ldots$ - порядок усечения матрицы ДНПФ; $h$ - идентификатор матрицы порядка $rovs(h) \times 2$, которая содержит коэффициенты низкочастотных фильтров восстановления (первый столбец) и разложения (второй столбец) сплайн-вейвлетов М-го порядка.

Результат работы этих программ при $p = 1$, $L = 4$, $L1 = 4$, $h = hSVR\phi11$ показан на рис. 12.

$L := 4 \quad L1 := 4 \quad p := 1 \quad h := hSVR\phi 11$

$C1 := SC1MMP1(L, L1, p, h) \qquad R1 := SR1MMP1(L, L1, p, h)$

$$C1 = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.25 & 1.25 & -0.75 \\ 1.75 & 1.75 & 0.25 & 0.25 \\ -0.625 & -0.375 & 0.5 & 0 \\ 0.125 & -0.125 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$R1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 & -1.125 & 0.875 \\ -0.5 & 0.75 & 0.875 & -1.125 \\ 0.25 & 0.25 & 1.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad R1 \cdot C1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 12

Библиографический список

1. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974. – 336 с.

2. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. - М.: Машиностроение, 1975. – 272 с.

3. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. . – 664 с.

4. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.

5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
6. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 672 с.
7. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
8. Фрейзер М. Ввведение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. - М.: Издательство Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 487 с.
9. Чуи К. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир. 2001. – 412 с.
10. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632 с.
11. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши М-го порядка // Электронный журнал "Труды МАИ"- 2009, № 33. – http://www.mai.ru.
12. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Электронный журнал "Труды МАИ"- 2009, № 33. – http://www.mai.ru.

## Сведения об авторе

Рыбин Владимир Васильевич, доцент кафедры «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (государственного технического университета», тел. 8 (499) 158-48-11, электронная почта: dep805@mai.ru.