

Модель двухпараметрического упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения

Куреннов С. С.

Харьковский авиационный институт (национальный аэрокосмический университет);

ХАИ, Чкалова ул., 17, Харьков, 61070, Украина

e-mail: ulem@list.ru

Аннотация

Предложена аналитическая модель расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной балки. Соединительный слой моделируется двухпараметрическим упругим основанием, несущие слои рассматриваются как балки Тимошенко.

Ключевые слова

клеевое соединение, трехслойная балка, двухпараметрическое упругое основание, балка Тимошенко

Введение

Существует несколько математических моделей односрезного клеевого соединения, позволяющих получить аналитическое решение. Исторически первой и наиболее простой является модель Фолькерсена. Более строгий подход предложен в классической работе Голанда и Рейсснера [1]. Вариационная постановка задачи позволила развить эту модель на вязкоупругое и нелинейно-упругое поведение клеевой прослойки [2]. Одномерные модели соединений развиты на произвольное число слоев [3] и для учета температурных деформаций [4]. Модель Голанда и Рейсснера была применена для расчета односрезных соединений с трещинами в клее и соединений с законцовками [5-7].

В моделях Фолькерсена, Голанда и Рейсснера касательные напряжения в клее достигают максимума на краях, что физически невозможно, поскольку внешний край соединительного слоя имеет свободную границу. Чтобы исключить данный недостаток, в работе [9] предложено считать нормальные напряжения в клее линейно изменяющимися по толщине шва. При этом несущие слои рассматриваются как балки Тимошенко. Более точный подход, основанный на гипотезе линейного распределения нормальных напряжений по

толщине несущих слоев и дифференциальных уравнениях равновесия, изложен в работе [9]. В настоящей работе соединительный (клеевой) слой рассматривается как двухпараметрическое упругое основание, которое способное перераспределять нагрузку, согласно модели В.З. Власова, П.Л. Пастернака, М.М. Филоненко-Бородича [10]. При таком подходе линейное изменение нормальных напряжений по толщине клеювого шва [8, 9] заменяется ступенчатым, однако в этом случае более точно учитывается влияние на напряженное состояние поперечных перемещений слоев и производных от них.

Построение решения

Рассмотрим соединение с показанными на рис.1 крайвыми условиями

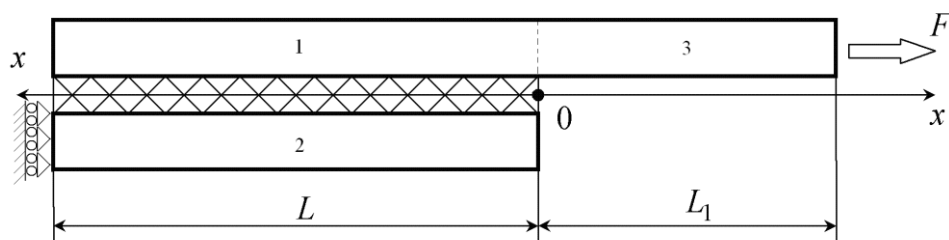


Рис. 1 Схема соединения

Крайвые условия, а именно шарнирная заделка второго слоя соответствует соединению двух одинаковых слоев накладкой.

Рассмотрим участок склейки, $x \in (-L, 0)$. На рис. 2. показаны силовые факторы, действующие на элементы слоев. Уравнения равновесия слоев имеют вид

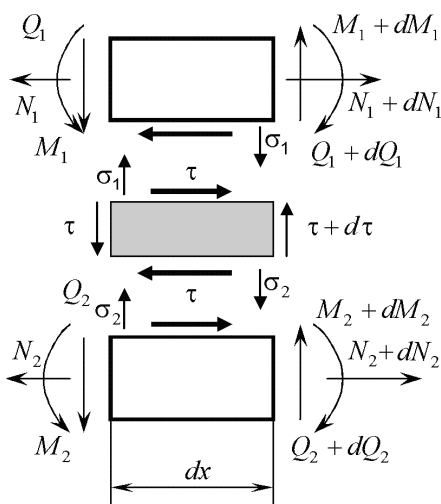


Рис. 2 – Напряжения и усилия в слоях

$$\frac{dN_1}{dx} = -\tau; \quad \frac{dQ_1}{dx} = \sigma_1; \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \frac{\delta_1}{2} \tau; \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \tau; \quad \frac{dQ_2}{dx} = -\sigma_2; \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \frac{\delta_2}{2} \tau; \quad (2)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad (3)$$

где N_i, Q_i, M_i – продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в i -ом несущем слое; τ, σ_i – касательные и нормальные напряжения в клеювом слое; δ_1, δ_2 – толщина 1-го и 2-го несущего слоя; δ_0 – толщина клеювого слоя.

Соотношения теории упругости

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{B_i}; \quad D_i \frac{d\varphi_i}{dx} = M_i; \quad \frac{dw_i}{dx} + \varphi_i = \frac{Q_i}{H_i}, \quad (4)$$

где u_i, w_i, φ_i – соответственно продольные, поперечные перемещения и угол поворота сечения i -го несущего слоя; B_i, D_i, H_i – соответственно жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг, которые для однородных слоев имеют вид $B_i = E_i \delta_i$, $D_i = \frac{\delta_i^3}{12} E_i$, $H_i = \frac{5}{6} G_i \delta_i$, где E_i и G_i – модули упругости, G_i – модули сдвига слоев.

Клеевой слой моделируется упругими элементами, показанными на рис. 3 в виде пружинок, и мембраной, поперечные перемещения которой w_0 .

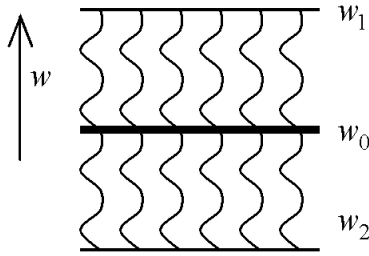


Рис. 3 – Модель клеевого слоя

Данная модель двухпараметрического упругого основания предложена в 50-х годах М.М. Филоненко-Бородичем и эквивалентна моделям упругих оснований с двумя коэффициентами постели В.З. Власова и П.Л. Пастернака [10]. Нормальные напряжения в клее согласно данной модели имеют вид

$$\sigma_i = (-1)^i k_1 (w_0 - w_i) - (-1)^i k_2 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right), \quad (5)$$

где $i = 1, 2$; k_1, k_2 – два коэффициента постели, которые могут быть вычислены следующим образом: $k_1 = 2E_0 \left[\delta_0 (1 - \mu_0^2) \right]^{-1}$, $k_2 = \frac{E_0 \delta_0}{12(1 + \mu_0)}$ [10]. Здесь E_0 и μ_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона клеевого слоя.

Касательные напряжения в клеевом слое обусловлены продольным смещением внутренних сторон несущих слоев и его относительным сдвигом:

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 \frac{dw_0}{dx}, \quad (6)$$

где G_0 – модуль сдвига соединительного слоя.

Систему дифференциальных уравнений (1)-(6) можно уменьшить, положив $N_1(x) + N_2(x) = F$, где $F = \text{const}$ есть приложенное продольное усилие (рис. 1).

Исключив из (3) напряжения, и применив формулы (1), (2), (4), получим

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} + \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} + \delta_0 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

Продифференцировав (6), и применив (1)-(4), получим

$$\delta_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + N_1 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{B_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{2} \frac{M_i}{D_i} - \frac{\delta_0}{G_0} \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{F}{B_2}. \quad (8)$$

Подставив (5) и (1) в уравнение (3) и исключив производные от перемещений при помощи (4), получим

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k_2}{k_1} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - 2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{k_2}{k_1 H_1} \frac{d^4 M_1}{dx^4} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_1} + \frac{1}{H_1} \right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{M_1}{D_1} - \frac{k_2}{k_1 H_2} \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \\ & + \left(\frac{k_2}{k_1 D_2} + \frac{1}{H_2} \right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{M_2}{D_2} + \left(\frac{\delta_0}{k_1} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_2} \right) \right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} + \left(\frac{\delta_1}{2H_1} + \frac{\delta_2}{2H_2} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сложив уравнения (5) и исключив производные от поперечных перемещений слоев, применив (4), получаем четвертое уравнение

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k_2}{H_1} \right) \frac{d^4 M_1}{dx^4} - \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{D_1} \right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{k_1}{D_1} M_1 - \left(1 + \frac{k_2}{H_2} \right) \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \left(\frac{k_1}{H_2} + \frac{k_2}{D_2} \right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} \\ & - \frac{k_1}{D_2} M_2 + \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \frac{k_2 \delta_1}{2H_1} - \delta_2 - \frac{k_2 \delta_2}{2H_2} \right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} - \frac{k_1}{2} \left(\frac{\delta_1}{H_1} - \frac{\delta_2}{H_2} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (8) находим $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ и исключив производные w_0 в уравнении (9),

получим систему трех дифференциальных уравнений относительно M_1 , M_2 и N_1 . Введем вектор $\vec{\mathbf{X}} = (M_1 \quad M_2 \quad N_1)^T$ и запишем полученную систему в матричном виде

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{\mathbf{X}}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{R}}, \quad (11)$$

где коэффициенты матриц \mathbf{A}_i ($i = 4, 2, 0$) могут быть легко получены из уравнений (7)-(10).

Коэффициенты матриц не приводим в связи с их громоздким видом и легкостью нахождения. В правой части системы (11) стоит вектор $\vec{\mathbf{R}} = \left(0; \frac{2}{\delta_0} \frac{F}{B_2}; 0 \right)^T$.

Общее решение системы однородных уравнений (11) ищем в виде суперпозиции базисных решений $\vec{\mathbf{X}}_0 = Ce^{\lambda x} \vec{\mathbf{h}}$, где λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_0) = 0, \quad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением 10 степени с четными степенями до 2 включительно. Следовательно, общее решение системы (11) имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i x} \vec{\mathbf{h}}_i + C_9 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + C_{10} x \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $a_1 = \frac{D_2}{D_1}$, $a_2 = \frac{B_1 B_2 (2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{2D_1 (B_1 + B_2)}$ и $b = \frac{B_1 F}{B_1 + B_2}$.

Векторы $\vec{\mathbf{h}}_i$, соответствующие корням уравнения (12) λ_i находятся из уравнения $(\mathbf{A}_4 \lambda_i^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_i^2 + \mathbf{A}_0) \vec{\mathbf{h}}_i = 0$, определяются с точностью до константы и представляет собой нетривиальное решение данной системы линейных уравнений.

Таким образом, получив M_1, M_2, N_1 (13) из формул (1) и (2) находим τ, Q_i, σ_i . Интегрируя выражения (4) и вводя соответствующие константы интегрирования, находим перемещения несущих слоев u_i, w_i, φ_i . Перемещения w_0 находим, интегрируя уравнение (6).

На консольном участке $x \in (0; L_1]$ напряженное состояние описывается уравнениями (4), при этом полагаем индекс $i = 3$. На этом участке поперечная сила постоянна ($Q_3 = const$) и зависит от краевых условий, тогда $u = \frac{F}{B_3} x + S_1$; $M_3 = S_2 x + S_3$, (здесь и далее S_i - константы интегрирования) и соответственно

$$\varphi_3 = \frac{S_2 x^2}{2D_3} + \frac{S_3}{D_3} x + S_4, \quad w_3 = -\frac{S_2 x^3}{6D_3} - \frac{S_3 x^2}{2D_3} - \left(S_4 - \frac{S_2}{H_3} \right) x + S_5.$$

Краевые условия и условия сопряжения в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{dw_1}{dx} + \varphi_1 \Big|_{x=-L} &= 0; \quad u_2 = \varphi_2 = \frac{dw_2}{dx} \Big|_{x=-L} = 0; \\ u_1 = u_3 \Big|_{x=0}; \quad w_1 = w_3 \Big|_{x=0}; \quad \varphi_1 = \varphi_3 \Big|_{x=0}; \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{du_3}{dx} \Big|_{x=0}; \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_3}{dx} \Big|_{x=0}; \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_3}{dx} \Big|_{x=0}; \\ \frac{du_3}{dx} \Big|_{x=L_1} &= \frac{F}{B_3}; \quad w_3 = \varphi_3 \Big|_{x=L_1} = 0; \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{dw_2}{dx} + \varphi_2 \Big|_{x=0} = 0; \\ \tau \Big|_{x=-L} &= \tau \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Еще четыре необходимых условия получим из уравнений (5), подставив в формулу напряжения и перемещения и приравняв коэффициенты при x и свободные члены (остальные слагаемые при этом тождественно равны). В результате получим систему

линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Модельная задача

В качестве примера расчета рассмотрим соединение, имеющее следующие параметры: $E_2 = 70$ ГПа, $G_2 = 25,9$ ГПа, $\delta_2 = 2$ мм, $E_1 = 40$ ГПа, $G_1 = 2,4$ ГПа, $\delta_1 = 3$ мм, $L = 30$ мм, $L_1 = 100$ мм, $G_0 = 0,5$ ГПа, $E_0 = 1,5$ ГПа, $\delta_0 = 0,2$ мм.

На рис. 4 и рис. 5 показаны графики напряжений в клеевом шве около концов соединения, вычисленные по предложенной модели и графики касательных напряжений по модели Фолькерсена (τ_W).

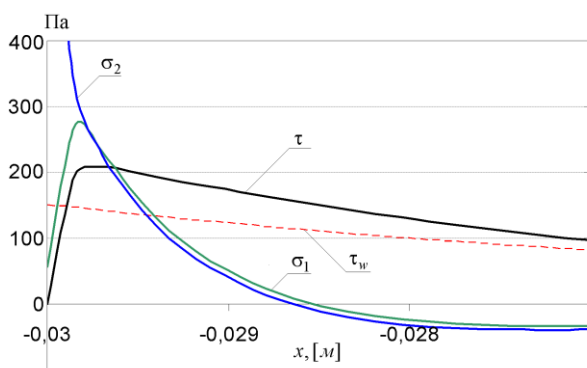


Рис. 4 – Напряжения в клеевом шве около заделки

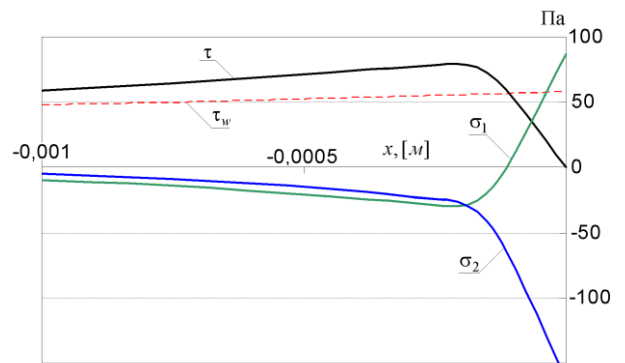


Рис. 5 – Напряжения в клеевом шве около консоли

Выводы

Расчеты показывают, что касательные напряжения, вычисляемые по предложенной модели, близки к напряжениям, даваемым теорией Голанда и Рейсснера, и отличаются лишь в малой зоне около края соединения на расстояниях от него порядка толщины клеевой прослойки. Нормальные напряжения на концах соединения значительно отличаются от напряжений, находимых по классической теории Голанда и Рейсснера. Эти напряжения могут даже отличаться знаком на разных сторонах клеевой прослойки. Внутри же области склейки σ_1 и σ_2 практически совпадают. Этим модель близка к предложенной в работе [8], отличие заключается в том, что линейное изменение нормальных напряжений по толщине шва, предложенное в упомянутой работе, заменено моделью двухпараметрического упругого основания.

Для тонких клеевых прослоек влияние второй производной от упругой линии и второго коэффициента постели незначительно, поэтому можно положить $k_2 = 0$.

Библиографический список:

1. Goland M., Reissner E. The stresses in Cemented Joints // J. App. Mech., Vol. 11, 1944, A11-A27.
2. Hart-Smith, L.J., Adhesive-Bonded Single-Lap Joints / Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112236, 1973.
3. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
4. Chen W.T., Nelson C.W. Thermal stress in bonded joints. IBM Journal of Research and Development, 23 (2), 1979. – p. 179-188.
5. Luo Q., Tong L. Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints // International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, 2007, p. 2349-2370.
6. Luo Q., Tong L. Analytical solutions for adhesive composite joints considering large deflection and transverse shear deformation in adherends // International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, 2008, p. 5914–5935.
7. Sandu M., Sandu A., Constantinescu D.M., Strength of adhesively bonded single strapped joints loaded in tension // Proceedings of the Romanian Academy, Series A, Vol. 11(4), 2010, p. 371-379.
8. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 11, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1975, С. 136–148.
9. Zhao B., Lu Z-H., Lu Y-N. Closed-form solutions for elastic stress–strain analysis in unbalanced adhesive single-lap joints considering adherend deformations and bond thickness // International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 31, 2011, p. 434–445
10. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели – М.: Госстройиздат, 1954.