

УДК 681.5.23

Статистическая модель прогнозного профиля рельефа местности в задаче выполнения маловысотного полета воздушного судна по цифровой карте высот

Ямпольский С.М.^{1*}, Наумов А.И.^{2}, Кичигин Е.К.^{3***},
Рубинов В.И.^{3****}, Мох Ахмед Медани Ахмед Эламин^{3****}**

¹*Военная академия ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого, Китайгородский пр., 9/5, Москва, 109074, Россия*

²*Компания «Гефест и Т»,*

ул. Наркомвод, 1, Жуковский, Московская область, 140180, Россия

³*Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина, ул. Старых Большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия*

**e-mail: yampolsm@mail.ru*

***e-mail: al_naumov@rambler.ru*

****e-mail: kichigin92@yandex.ru*

*****e-mail: rubinov777@mail.ru*

В статье рассматриваются результаты численных исследований методик расчета статистических характеристик для значения высоты рельефа местности, определяемой по цифровой карте высот рельефа местности в условиях случайного характера плановых координат точки расчета. Данные статистические характеристики используются при формировании прогнозного профиля маловысотного полета воздушного судна по цифровой карте высот.

Ключевые слова: информационное обеспечение маловысотного полета, статистический подход, погрешность расчета характеристик случайной величины.

Задача синтеза информационного обеспечения маловысотного полета (МВП) по цифровой карте высот рельефа местности состоит в формировании массива

высот рельефа местности заданной размерности $H_{\delta_i}, i = 1, \dots, N$, вопереди лежащих точках по траектории полета воздушного судна (ВС) для каждого момента времени t расчета управляющего сигнала.

Наличие погрешностей в значениях текущих координат местоположения и вектора путевой скорости ВС его навигационным комплексом (НК), а также непосредственное влияние показателей точности определения параметров движения в вертикальной плоскости на характеристики безопасности полета ВС требуют решения задачи автоматического управления полетом в статистической постановке. Сущность статистического подхода заключается в том, что расчетные значения высоты рельефа местности $H_{p_i}, i = 1, \dots, N$, вопереди лежащих точках по траектории полета ВС следует рассматривать как случайные величины [1]. Знание законов распределения случайных величин H_{p_i} позволяет формировать в каждый момент времени t такой профиль «картографических высот», огибание которого с принятым на борту ВС законом управления обеспечит заданные вероятностные показатели безопасности маловысотного полета ВС над реальным рельефом местности. В статье исследуются погрешности методик определения статистических характеристик распределений для расчетных значений высот рельефа местности в точках впередилежащего прогнозного профиля.

Методики расчета статистических характеристик. При практической реализации статистического подхода к синтезу управления МВП по цифровой карте высот рельефа местности (ЦКВРМ) возникает задача расчета количественных характеристик распределения расчетного значения высоты рельефа H_p в зависимости

от характеристик распределения погрешностей плановых координат точки расчета. В работе [2] для решения этой задачи предложено две численные методики: таблично–аналитическая и таблично-аппроксимирующая. Таблично-аналитической методике присущ существенный недостаток, связанный с увеличением требуемого объема вычислительных ресурсов с ростом погрешностей определения ВС. В таблично-аппроксимирующей методике потребные вычислительные ресурсы постоянны, но при этом она характеризуется появлением методических погрешностей, обусловленных операциями аппроксимации.

Кратко поясним сущность таблично-аппроксимирующей методики. Предположим, что ошибки определения координат местоположения ВС удовлетворяют нормальному распределению. Выполним дополнительное разбиение области Ω_i , описывающей погрешности определения плановых координат, равномерной сеткой разбиения с шагом Δ_c на подобласти ω_{mn} (Рисунок 1):

$$\begin{aligned} \omega_{mn} &= \{(x, y), x_m \leq x < x_{m+1}, y_n \leq y < y_{n+1}\}, \\ x_m &= \hat{x}_{j, \text{БД}} + \sigma_x m \Delta_c, m = -M, \dots, (M - 1), \\ y_n &= \hat{y}_{j, \text{БД}} + \sigma_y n \Delta_c, n = -M, \dots, (M - 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Аппроксимируем непрерывную случайную величину $H^{\text{БД}}(\hat{x}_{j, \text{БД}}, \hat{y}_{j, \text{БД}})$ дискретной случайной величиной $\tilde{H}^{\text{БД}}(\hat{x}_{j, \text{БД}}, \hat{y}_{j, \text{БД}})$, порождаемой введенным разбиением области Ω_i :

$$\tilde{H}^{\text{БД}}(\hat{x}_{j, \text{БД}}, \hat{y}_{j, \text{БД}}) = \{H_{j, mn}, (x, y) \in \omega_{mn}, m = -M, \dots, (M - 1), n = -M, \dots, (M - 1)\}, \quad (2)$$

где $H_{j, mn} = H^{\text{БД}}(0.5 * (x_m + x_{m+1}), 0.5 * (y_m + y_{m+1}))$.

В силу нормальности распределения ошибок определения координат местоположения ВС вероятность того, что случайная величина $\tilde{H}^{\text{ÖÊÀÈÏ}}(\hat{x}_{j,\text{ÈÐ}}, \hat{y}_{j,\text{ÈÐ}})$ примет значение $H_{j,mn}$, равна:

$$P_{mn} = [\Phi_0(u_{m+1}) - \Phi_0(u_m)][\Phi_0(v_{n+1}) - \Phi_0(v_n)],$$

$$u_m = m\Delta_c, u_{m+1} = (m+1)\Delta_c, v_n = n\Delta_c, v_{n+1} = (n+1)\Delta_c,$$

$$m = -M, \dots, (M-1), n = -M, \dots, (M-1).$$

где Φ_0 – функция Лапласа-Гаусса [1].

Тогда соответствующие аппроксимирующие выражения для математического ожидания и дисперсии принимают вид:

$$M[H_{pi}] \approx \frac{\sum_m \sum_n (H_{j,mn} P_{mn})}{\sum_m \sum_n P_{mn}}. \quad (4)$$

$$D[H_{pi}] \approx \frac{\sum_m \sum_n ((H_{j,mn} - M[H_{pi}])^2 P_{mn})}{\sum_m \sum_n P_{mn}}. \quad (5)$$

здесь выражение в знаменателях имеет смысл нормирующего коэффициента.

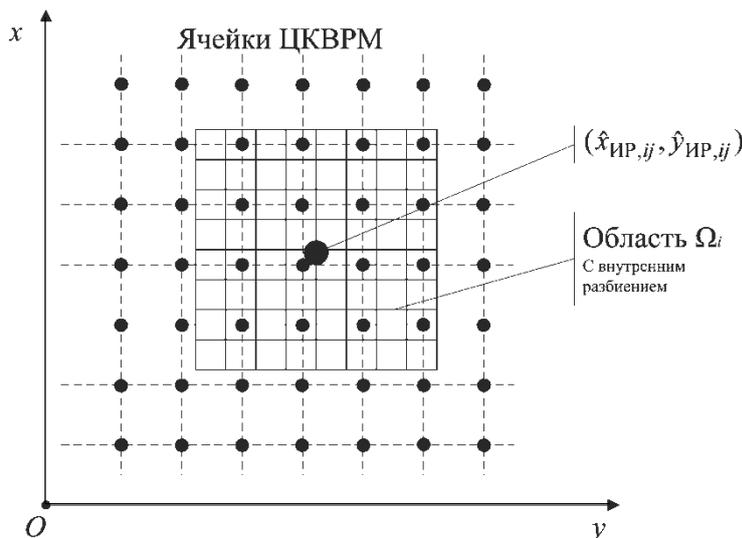


Рисунок 1 – Разбиение области Ω_i по отношению к ячейкам ЦКВРМ

При этом величины вероятностей P_{mn} могут быть вычислены заранее и храниться в памяти бортового вычислителя, что обеспечивает вычислительную эффективность практической реализации данной методики в бортовом вычислителе.

Анализ погрешности расчета. Величины $H_{j,mn}$, используемые в таблично-аппроксимирующей методике, содержат ошибки аппроксимации, что определяет наличие ошибки в расчете (4) и (5) даже в классе кусочно-линейчатых функций описания рельефа местности. Значения этих ошибок определяются величиной текущего шага разбиения Δ_c , (сторона элементарной ячейки), а также локальным градиентом функции, описывающей изменение высоты рельефа местности:

$$\delta M[H_{pi}] = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \sum_m \sum_n \int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta_c} \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta_c} (t_{00}^{mn} - H_{j,mn} + t_{10}^{mn}x + t_{01}^{mn}y + t_{11}^{mn}xy) e^{-\left(\frac{(x-\hat{x}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\hat{y}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_y^2}\right)} dx dy.$$

$$\delta M[H_{pi}] = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \sum_m \sum_n \int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta_c} \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta_c} (t_{00}^{mn} - H_{j,mn} + t_{10}^{mn}x + t_{01}^{mn}y + t_{11}^{mn}xy) e^{-\left(\frac{(x-\hat{x}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\hat{y}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_y^2}\right)} dx dy. \quad (6)$$

$$\delta D[H_{pi}] = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \sum_m \sum_n \int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta_c} \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta_c} (s_{00}^{mn} - \delta M[H_{pi}] + s_{10}^{mn}x + s_{01}^{mn}y + s_{11}^{mn}xy)^2 e^{-\left(\frac{(x-\hat{x}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\hat{y}_{j,\text{ED}})^2}{2\sigma_y^2}\right)} dx dy;$$

$$\delta\sigma[H_{pi}] = \sqrt{\delta D[H_{pi}]}, \quad (7)$$

где коэффициенты $t_{00}^{mn}, t_{10}^{mn}, t_{01}^{mn}, t_{11}^{mn}$ и $s_{00}^{mn}, s_{10}^{mn}, s_{01}^{mn}, s_{11}^{mn}$ определяются табличными значениями ЦКВРМ с учетом связи локальных индексов m, n с глобальными индексами k, l . В силу нерегулярности изменения коэффициентов $t_{00}^{mn}, t_{10}^{mn}, t_{01}^{mn}, t_{11}^{mn}$ и

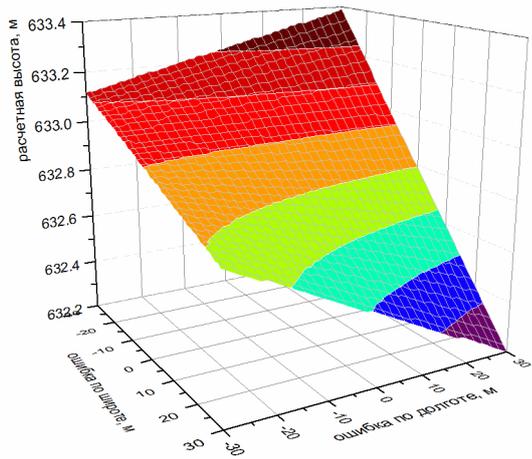
$s_{00}^{mn}, s_{10}^{mn}, s_{01}^{mn}, s_{11}^{mn}$, описывающих поверхность рельефа местности, получение аналитических количественных оценок $\delta M[H_{pi}], \delta \sigma[H_{pi}]$ в общем случае невозможно.

В развиваемом нами статистическом подходе к синтезу информационного обеспечения расчетное значение высоты рельефа местности H_p рассматривается как случайная величина. Эта случайность есть следствие случайных ошибок определения координат местоположения ВС. В инерциально-спутниковом режиме (ИСП) функционирования НКВС для принятой модели кусочно-линейчатой аппроксимации высоты рельефаместности [3] закон распределения для расчетной высоты рельефа местности внутри ячейки ЦКВРМ является нормальным, если ошибки плановых координат распределены нормально.

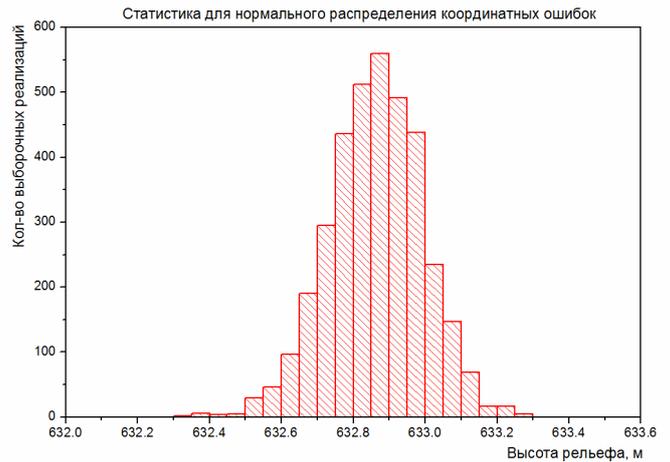
Подтверждением этого положения могут служить иллюстрации (рисунки 2 и 3), полученные путем численного моделирования гистограммы распределения расчетной высоты рельефа местности, полученные методом статистического моделирования для нормально распределенных ошибок плановых координат с $\sigma_{\delta x} = \sigma_{\delta y} = 10\text{ м}$ и двух точек из исследуемой территории Республики Судан:

- точка № 1 соответствует слабопересеченной местности, рисунок 2а; гистограмма распределения представлена на рисунке 2б;

- точка № 2 соответствует сильнопересеченной местности, рисунок 3а, гистограмма распределения представлена на рисунке 3б.

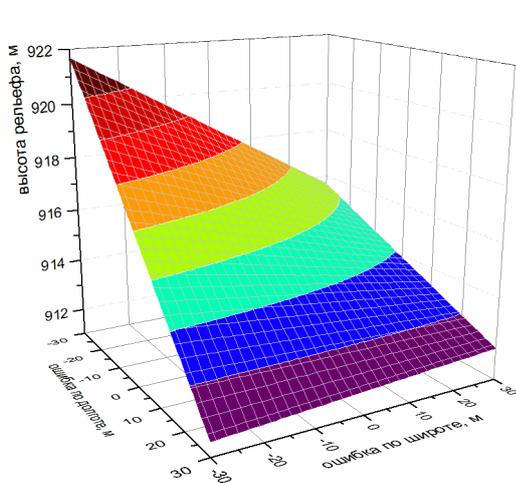


а)



б)

Рисунок 2 – Распределение расчетной высоты рельефа местности в области неопределенности плановых координат в ИСР функционирования НК ВС для условий слабопересеченной местности: а – поверхность расчетного рельефа в области неопределенности плановых координат; б – гистограмма для расчетной высоты для условий нормального распределения ошибок плановых координат в области $\pm 3\sigma$; $\sigma_{\delta x} = \sigma_{\delta y} = 10\text{ м}$



а)



б)

Рисунок 3 – Распределение расчетной высоты рельефа местности в области неопределенности плановых координат в ИСР функционирования НК ВС для условий сильнопересеченной местности: а – поверхность расчетного рельефа в области неопределенности плановых координат; б – гистограмма для расчетной высоты для условий нормального распределения ошибок плановых координат с $\sigma_{\delta x} = \sigma_{\delta y} = 10\text{ м}$

В случае перехода НК из ИСР в другие режимы функционирования, в которых погрешность определения плановых координат при сохранении нормальности распределения характеризуется увеличением с.к.о., область неопределенности плановых координат выходит за размеры одной ячейки ЦКВРМ, в связи с чем, аналитические способы проверки нормальности распределения становятся недоступными (в силу отсутствия аналитичности описания ЦКВРМ в общем случае). В этих условиях предположение о нормальности закона распределения может быть проверено с помощью метода проверки статистических гипотез. Учитывая, что параметры закона распределения (точное значение математического ожидания и дисперсии) нам априорно не известны, для проверки нормальности необходимо применять специальные критерии согласия эмпирических распределений с нормальным [4], например, модифицированный критерий χ^2 , когда параметры распределения оцениваются по негруппированной выборке. После оценки математического ожидания и дисперсии совокупность выборочных данных разбивается на k равновероятных интервалов и статистика модифицированного критерия подсчитывается по формуле [4]:

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k m_i^2 - n, \quad (8)$$

где n – объем статистической выборки, m_i – количество членов выборки, попавших в i -й интервал разбиения. Границы интервалов разбиения (точки x_i , $i = 0, 1, \dots, k$) определяются формулой

$$x_i = \bar{x} + c_i \hat{s}, \quad (9)$$

где \bar{x} – выборочная оценка математического ожидания, \hat{s} – выборочная оценка среднего квадратичного отклонения расчетного значения высоты рельефа как случайной величины, коэффициенты $c_i, i = 0, 1, \dots, k$ приведены в [4].

Более глубокое исследование возможной корреляции высот для различных ячеек карты высот будет проведено в следующих работах авторов.

Во время перехода навигационного комплекса от ИСР к инерциальному режиму (ИР) в вычислителе сохраняются погрешности определения координат местонахождения летательного аппарата (ЛА) $2\sigma = 15 \dots 20$ м, а также компоненты вектора путевой скорости $0,3 \dots 0,5$ м/с. С учетом этих данных в начальный момент времени выключения ИСР НК ВС погрешность определения координат точек прогнозной траектории не превысит $\sigma = 10$ м, то есть $\pm 3\sigma = \pm 30$ м.

При проведении численных исследований погрешности расчета статистических характеристик при применении таблично-аппроксимирующей методики область разбиения Ω_i , соответствующая условию $\pm 3\sigma$ плановых координат, разбивалась на 60×60 элементарных ячеек. Следовательно, сторона одной элементарной ячейки Δ_c для указанных размеров Ω_i в начальный момент времени отключения ИСР составляет 1 м по осям Ox и Oy .

С увеличением времени работы НК после отключения коррекции ИСР число элементарных ячеек остается постоянным, но в связи с возрастанием ошибок определения координат x и y в ИР НК ВС величина стороны Δ_c элементарной ячейки увеличивается. В случае сближения размеров элементарной ячейки и ячейки ЦКВРМ (размер которой 90×90 м) аналитический расчет статистических

характеристик высоты рельефа местности становится невозможным вследствие нарушения нормальности распределения координат x и y , определяемой предельной величиной с.к.о. Применение таблично-аппроксимирующей методики исключается.

Определим с.к.о. за время полета самолета по заданной траектории. Оно не должно превысить погрешность определения координат инерциальной системы. Предположим, что эта погрешность составляет 1,875 км/ч (1 миля/ч). При этом ошибка определения координат составит 625 м за 20 минут полета, т.е. $3\sigma = 312$ м ($\sigma = 104$ м).

Совпадение размеров элементарной ячейки и ячейки ЦКВРМ возможно в том случае, когда сторона элементарной ячейки равна $\Delta_c = 90$ м, т.е. при $\sigma = 150$ м ($\pm 3\sigma = \pm 450$ м).

Таким образом, за 20 минут полета ВС с.к.о. ($\sigma = 104$ м) не превысит погрешность ($\sigma = 150$ м) инерциальной системы НК. Следовательно, размеры элементарной ячейки разбиения области Ω_i существенно меньше размеров ячейки цифровой карты.

Вычислим погрешность определения $\Delta M[H_p]$ в течение времени полета ВС 20 мин. (1200 с). Принимая во внимание $\sigma / \Delta_c = 10$, определим сторону элементарной ячейки, что составит $\Delta_c = 62,5$ м ≈ 63 м. По таблице 1 по величине 66,67 м первого столбца определим максимальную ошибку нахождения высоты $\max \Delta M[H_p] = 0,078$ м по таблице 2 с.к.о. $\max \delta \sigma[H_p] = 0,066$ м высоты рельефа местности. Численная оценка $\Delta M[H_p]$ и $\delta \sigma[H_p]$ для форм рельефа

местности, характерных для Республики Судан, в зависимости от размера области Ω (от значения Δ_c) и величины градиента рельефа, представлена графиками на рисунке 4 (погрешность вычисления математического ожидания) и рисунке 5 (погрешность вычисления среднеквадратичного отклонения), а также в таблицах 1 и 2.

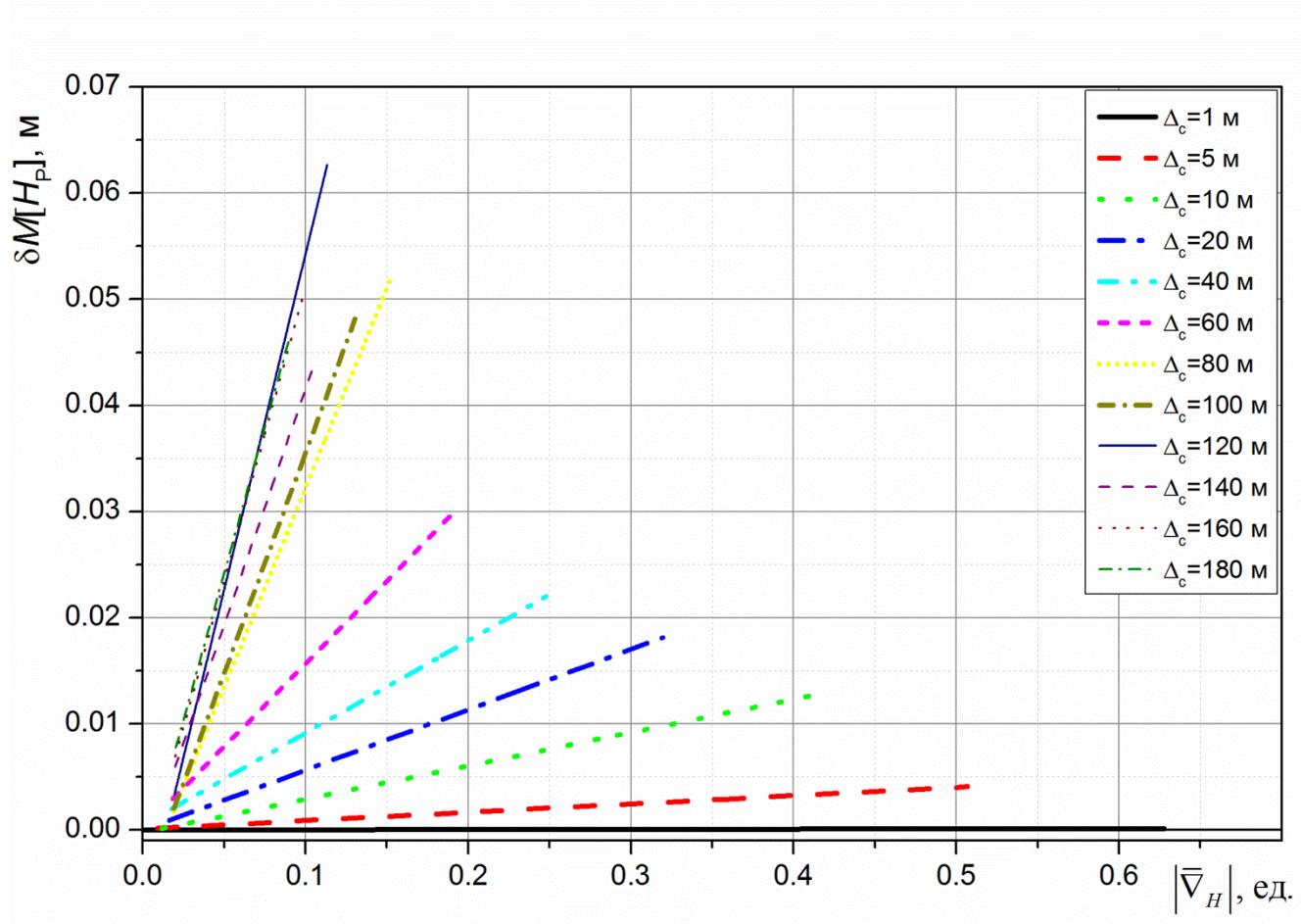


Рисунок 4 – Линейные регрессионные зависимости для погрешности расчета математического ожидания высоты рельефа местности при таблично-аппроксимирующей методике: Δ_c – шаг равномерной сетки разбиения области интегрирования Ω_j ; $|\bar{V}_H|$ – среднее значение модуля градиента поля высот рельефа местности в области интегрирования Ω_j

В силу случайности значений ошибок на графиках приведены линейные регрессионные зависимости $\delta = \hat{a} + \hat{b}|\bar{V}_H|$ модулей методических погрешностей для

математического ожидания (4) и среднего квадратичного значения (5) от среднего значения градиента рельефа местности $|\bar{\nabla}_H|$ в области их вычисления.

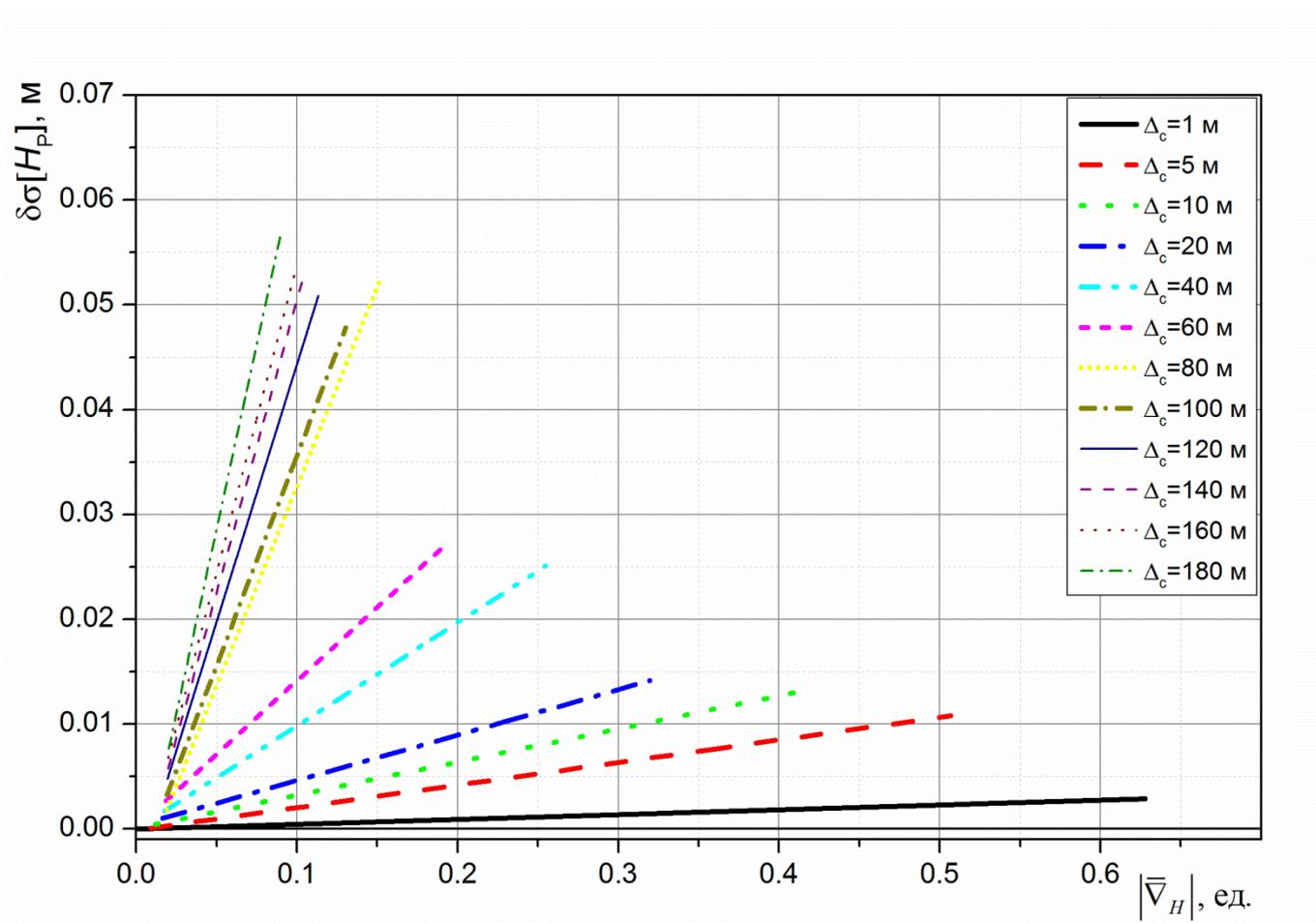


Рисунок 5 – Линейные регрессионные зависимости для погрешности расчета среднеквадратичного отклонения высоты рельефа местности при применении таблично-аппроксимирующей методики: Δ_c – шаг равномерной сетки разбиения области интегрирования Ω_j ; $|\bar{\nabla}_H|$ – среднее значение модуля градиента поля высот рельефа местности в области интегрирования Ω_j

В таблицах 1 и 2 приведены численные значения оценок коэффициентов линейной зависимости, их с.к.о., а также максимальные значения модуля погрешности. При моделировании принималось, что $\sigma_x/\Delta_c = 10$, $\sigma_y/\Delta_c = 10$.

Таблица 1 – Параметры погрешности расчета математического ожидания высоты рельефа местности при таблично-аппроксимирующей методике

Параметр $\Delta_c, \text{ м}$	$\hat{a}_{\delta M[H]}, \text{ м}$	$\sigma_{\hat{a}}, \text{ м}$	$\hat{b}_{\delta M[H]}, \text{ м}$	$\sigma_{\hat{b}}, \text{ м}$	$\max \delta M[H_p] , \text{ м}$
1,67	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	0,001
8,33	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	0,008	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,012
16,67	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	0,031	$4,0 \cdot 10^{-4}$	0,042
33,3	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	0,057	$6,9 \cdot 10^{-4}$	0,045
66,67	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	0,087	0,001	0,078
100,0	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$	0,156	0,002	0,089
133,3	0,005	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,376	0,005	0,168
166,67	0,006	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,414	0,006	0,213
200,0	0,009	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,632	0,010	0,255
233,3	0,003	$2,7 \cdot 10^{-4}$	0,444	0,009	0,158
266,67	0,004	$3,4 \cdot 10^{-4}$	0,553	0,010	0,195
300,0	0,003	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,553	0,011	0,128

Таблица 2 – Параметры погрешности расчета с.к.о. высоты рельефа местности при таблично-аппроксимирующей методике

Параметр $\Delta_c, \text{ м}$	$\hat{a}_{\delta \sigma[H]}, \text{ м}$	$\sigma_{\hat{a}}, \text{ м}$	$\hat{b}_{\delta \sigma[H]}, \text{ м}$	$\sigma_{\hat{b}}, \text{ м}$	$\max \delta \sigma[H_p], \text{ м}$
1,0	$7,9 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	0,005	$1,6 \cdot 10^{-5}$	0,003
5,0	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	0,022	$1,2 \cdot 10^{-4}$	0,014
10,0	$7,7 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	0,032	$3,0 \cdot 10^{-4}$	0,023
20,0	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	0,043	$5,6 \cdot 10^{-4}$	0,032
40,0	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,002	0,086
60,0	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$8,8 \cdot 10^{-5}$	0,14	0,002	0,066
80,0	0,005	$1,9 \cdot 10^{-4}$	0,381	0,005	0,190
100,0	0,005	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,401	0,007	0,139
120,0	0,005	$3,6 \cdot 10^{-4}$	0,491	0,011	0,205
140,0	0,005	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,558	0,010	0,192
160,0	0,005	$3,9 \cdot 10^{-4}$	0,588	0,012	0,178
180,0	0,007	$4,5 \cdot 10^{-4}$	0,706	0,014	0,210

Заключение. Анализ результатов проведенных численных исследований позволяет сделать следующие выводы по погрешностям расчета характеристик прогнозного профиля рельефа местности в задаче статистического подхода к

синтезу управления МВП ВС по ЦКВРМ при применении таблично-аппроксимирующей методики:

- методические погрешности расчета математического ожидания и с.к.о. значения высоты рельефа местности как функции от среднего значения градиента поля высот рельефа местности в области неопределенности плановых координат хорошо аппроксимируются линейными зависимостями, угловой коэффициент которых зависит от величины шага разбиения Δ_c ;

- с ростом величины Δ_c более 80 м (т.е. размеры ячейки сетки разбиения для интегрирования начинают превышать размеры ячейки ЦКВРМ) наблюдается стабилизация углового наклона зависимости погрешности расчета математического ожидания на уровне 0,55 ... 0,6 м, также замедляется увеличение углового коэффициента для зависимости погрешности расчета с.к.о.;

- максимальные погрешности расчета математического ожидания не превышают 0,3 м для оценки математического ожидания и 0,25 м для оценки с.к.о. высоты рельефа местности (для типовых ландшафтов Республики Судан), что позволяет рекомендовать таблично-аппроксимирующую методику к практическому применению при синтезе информационного обеспечения маловысотного контура управления самолета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: АСАДЕМА, 2003. 464 с.

2 А.И. Наумов, Е.К. Кичигин, Мох Ахмед Медани Ахмед Эламин. Методики вычисления статистических характеристик оценки высоты рельефа по цифровой карте высот рельефа местности при случайном характере задания координат точки расчета. Воронеж.: Академические Жуковские чтения. ВУНЦ ВВС «ВВА имени проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2013.

3 В.А. Меркулов, А.И. Наумов, Г.П. Чигин. Алгоритмическое обеспечение баз данных цифровой картографической информации интегрированных комплексов летательных аппаратов. Теория и системы управления, 1999, № 6.

4 А.И. Кобзарь. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИЗ, 2006. 816 с.