

Труды МАИ. 2024. № 134
Trudy MAI, 2024, no. 134

Научная статья
УДК 531.383: 532.516
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178475>

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМ ТРЕХСЛОЙНЫМ СТАТОРОМ

Оксана Владимировна Блинкова^{1✉}, Дмитрий Вячеславович Кондратов²

¹Саратовская государственная юридическая академия,
Саратов, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Саратов, Россия

²Институт проблем точной механики и управления РАН,
Саратов, Россия

¹oksana_parfilova@mail.ru✉

²kondratovdv@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается механическая система, состоящая из двух пластин взаимодействующих друг с другом через слой вязкой сжимаемой жидкости, в которой поддерживается постоянное давление, в результате чего верхняя абсолютно жесткая пластина совершает вертикальные колебания. Нижняя пластина представляет собой упругий трехслойный статор. В данной статье проведено математическое моделирование для данной системы и найдено выражение для амплитудно-частотной характеристики, дальнейшее исследование которой позволит выявить и исключить резонансные явления в конструкциях подобного типа.

Ключевые слова: вязкая сжимаемая жидкость, щелевой канал, упругая трехслойная пластина, уравнение Навье-Стокса, амплитудные частотные характеристики (АЧХ)

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-29-00526

Для цитирования: Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Моделирование динамики взаимодействия сдвливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178475>

Original article

MODELING THE DYNAMICS OF INTERACTION OF A COMPRESSED LAYER OF A VISCOUS COMPRESSIBLE LIQUID WITH AN ELASTIC THREE-LAYER STATOR

Oksana V. Blinkova^{1✉}, Dmitry V. Kondratov,²

¹Saratov State Academy of Law,

Saratov, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,

Saratov, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences,

Saratov, Russia

¹oksana_parfilova@mail.ru✉

²kondratovdv@yandex.ru

Abstract. With the constant development of mechanical engineering, space and aviation industries, the tasks of investigating the interaction of two elastic plates with a viscous

liquid or gas between them are becoming more and more urgent. The study of elastic plates, the space between which is filled with a viscous liquid or gas, is becoming increasingly necessary. A mechanical system consisting of two plates interacting with each other through a layer of viscous compressible fluid in which constant pressure is maintained, as a result of which the upper absolutely rigid plate performs vertical oscillations is considered. The first plate is absolutely rigid - the vibrator, the second - is an elastic three-layer plate - the stator. The mathematical model in dimensionless variables is a coupled system of partial differential equations describing the dynamics of the motion of a viscous compressible fluid (Navier-Stokes equations and continuity equation) flowing between two plates with the corresponding boundary conditions. To solve the resulting problem of the interaction of a viscous compressible fluid and an elastic three-layer plate, we switched to dimensionless variables of the problem. Small parameters of the problem were chosen - the relative width of the viscous fluid layer and the relative deflection of the elastic stator. The selected small parameters of the problem made it possible to use the perturbation method to simplify the system of equations. The Bubnov-Galerkin method has found an expression for the amplitude-frequency characteristics of an elastic three-layer stator, further study of the expression will allow to identify and exclude resonant phenomena in structures of this type, take them into account when building new structures in modern mechanical engineering, aviation and space industries.

Keywords: viscous compressible fluid, slit channel, a bar-strip, elastic three-layer plate, Navier-Stokes equation, amplitude-frequency characteristics (AFC)

Funding: this work was supported by the financial support of the grant of the Russian Scientific Foundation (projects no. 23-29-00526)

For citation: Blinkova O.V., Kondratov D.V. Modeling the Dynamics of Interaction of a Compressed Layer of a Viscous Compressible Liquid with an Elastic Three-Layer Stator. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178475>

1. Введение

В современном обществе с постоянным развитием машиностроения, космической и авиапромышленностей все более актуальными становятся задачи на исследование взаимодействия двух упругих пластин с вязкой жидкостью или газом между ними. Случаи взаимодействия пластин через вязкую несжимаемую жидкость описаны в работах [1, 2], вибрация круглых пластин, погруженных в заполненный жидкостью контейнер, и вибрация консольных композитных пластин в воздухе и в воде изучается в [3, 4], взаимодействие слоя вязкого газа с круглой упругой пластиной описывается в работе [5], нелинейная динамика и устойчивость круглых цилиндрических оболочек рассматривается так же в [6], нелинейная динамика осесимметрично движущихся пластин - в [7], исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при вибрации описывается в [8], движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном штампом и шарнирно опертой пластиной рассматривается в [9], нелинейные волны в трех упругих соосных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними исследуются в [10], моделирование взаимодействия сдавливаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой однослойной пластиной проведено в работе [11].

Наряду с исследованием и использованием в конструировании элементов на основе однослойных тонкостенных элементов конструкций, все тщательнее

рассматриваются и изучаются задачи с использованием конструкций, состоящих из различных слоистых материалов. Основы взаимодействия слоистых упругих элементов конструкций описаны в работах [12], моделирование колебаний трехслойного элемента опоры со слоем вязкой несжимаемой жидкости в щелевом канале исследовалось в [13, 14], деформирование и изгиб трехслойных элементов конструкций описаны в [15, 16, 17], анализ динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором рассмотрен в [18], постановка задачи моделирования взаимодействия упругого трехслойного статора с абсолютно твердым вибратором через вязкую сжимаемую жидкость описывалась в [19].

Многочисленные исследования в области взаимодействия однослойной и многослойной упругих пластин через слой вязкой сжимаемой жидкости являются актуальными в настоящее время, но пока они не настолько многочисленны, как требует этого современное развитие отраслей авиа и машиностроения. Для увеличения долговечности деталей и конструкции необходимо выявления тех режимов, при которых возникают резонансные явления, а для этого требуется нахождение и изучение амплитудно-частотной характеристики модели взаимодействия упругих слоистых пластин со слоем вязкой сжимаемой жидкости или газа в плоском щелевом канале.

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, физическая модель которой состоит из абсолютно жесткой пластины I (вибратора), трехслойной упругой пластины II (статора) и вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей пространство III между пластинами (рис.1). Будем считать, что поверхность вибратора изнутри является

плоской, а сам вибратор прикреплен к упругому подвесу. Допустим, что в слое жидкости поддерживается постоянно пульсирующее давление, в результате чего вибратор совершает вертикальные колебания, которые описываются гармоническим законом. Обозначим амплитуду колебания как z_m .

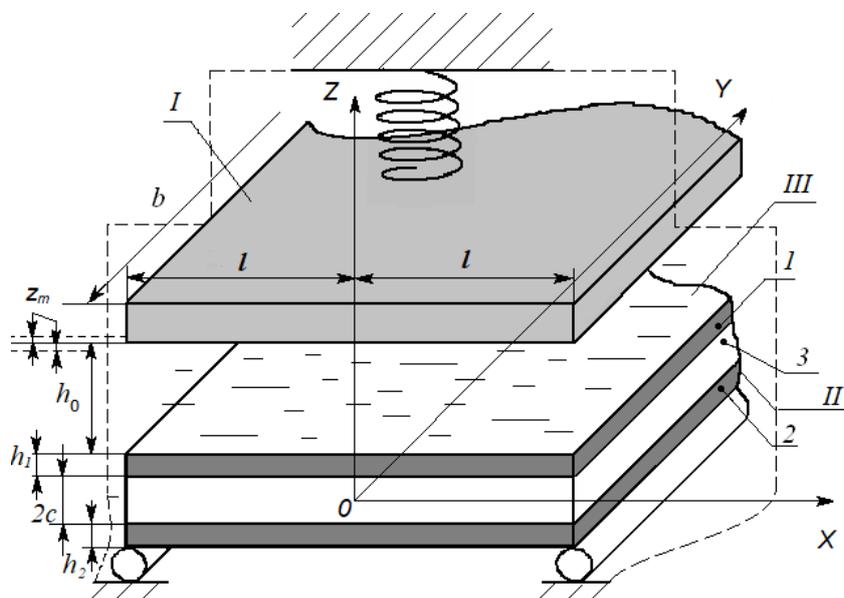


Рис.1 Физическая модель (Fig.1 Physical model)

Рассмотрим случай, когда статор представлен упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым заполнителем. Выберем случай, когда длина и ширина статора и вибратора ($2l$ и b) попарно совпадают. Предположим, что ширина стенок пластин значительно больше, чем их длина, то есть выполняется условие: $2b \gg 2l$. Допустим, что жесткость пластины вдоль стороны b гораздо больше ее жесткости вдоль стороны $2l$. В данном случае всеми производными по y можем пренебречь, так как плоскости данной конструкции в направлении оси y можем считать неограниченными.

Пусть щелевое пространство между вибратором I и трехслойным статором II будет заполнено вязкой сжимаемой жидкостью III, в которой поддерживается давление $p_0 + p_1(\omega t)$. Предположим, что толщина этого слоя жидкости значительно меньше длины пластин: $h_0 \ll 2l$. Температуру жидкости, вибратора и упругого статора считаем постоянной. Рассмотрим далее случай, когда возникающие прогибы статора и амплитуда колебаний вибратора являются намного меньше, чем средняя толщина слоя жидкости, т.е. $z_m \ll h_0$.

Пусть вибратор осуществляет движение по следующему закону: $z = h(t) = h_0 + z_m f(\omega t)$, где h_0 - среднее значение ширины щелевого зазора h , z_m - амплитуда колебаний вибратора в вертикальном направлении, ω - частота колебаний верхней пластины, t - время.

Таким образом, физическая модель представлена взаимодействующими друг с другом через сдавливаемый слой вязкой сжимаемой жидкости абсолютно жестким вибратором и упругим трехслойным статором.

Пусть x, z - декартовы координаты; V_x - проекция вектора скорости на ось x ; V_z - проекция вектора скорости на ось z ; t - время; p - давление; ρ - плотность; ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Динамика движения вязкой сжимаемой жидкости, находящейся между пластинами, описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности [20]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \nu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right);$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \nu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right); \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0;$$

Граничные условия системы уравнений (1) представляют собой условия прилипания вязкой жидкости к поверхностям абсолютно жесткого вибратора и упругого статора.

$$V_x = 0, \quad V_z = \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{при} \quad z = h_0 + z_m f_z(\omega t) + \frac{h}{2}; \quad (2)$$

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_z = \frac{\partial w_3}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = w_3 + \frac{h}{2}.$$

Здесь u – проекция упругого перемещения статора на ось x ; w_3 – упругое перемещение статора по нормали (т.е. его прогиб).

Условия свободного торцевого истечения жидкости в направлении оси x и в противоположном направлении запишем как условие совпадения давления на торце с давлением в жидкости:

$$p = p_0 + p_1(\omega t) \quad \text{при} \quad x = l, \quad (3)$$

$$p = p_0 + p_1(\omega t) \quad \text{при} \quad x = -l.$$

Уравнение динамики трехслойной пластины примет вид:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -q_{zx}$$

$$a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (4)$$

$$a_7 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_{zz}.$$

Здесь $m_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_3 c$, ρ_k – плотность материала k -го слоя,
 $k = 1, 2, 3$ – номер слоя;

q_{zx}, q_{zz} – напряжения со стороны слоя жидкости, действующие на внутреннюю поверхность упругого трехслойного стержня:

$$q_{zx} = \rho v \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \text{ при } z = w + c + h_1,$$

$$q_{zz} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_z}{\partial z} \text{ при } z = w + c + h_1.$$

Коэффициенты $a_i, i = \overline{1,7}$ обозначают жесткостные свойства слоев:

$$a_1 = K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c;$$

$$a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right]; a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right];$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3;$$

$$a_5 = 2G_3 c; a_6 = c [K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2]; a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right);$$

где $K_k^+ = K_k + \frac{3}{4} G_k$; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Условия свободного опирания на торцах примут следующий вид:

$$w = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = l;$$

$$w = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = -l. \quad (5)$$

Одно из условий (5) заменим условием симметрии:

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные: $\tau = \omega t$, $\xi = \frac{x}{l}$,

$$\zeta = \frac{z}{h_0}, \psi = \frac{h_0}{l} \ll 1, \lambda = \frac{z_m}{h_0}, V_x = \frac{z_m \omega l}{h_0} U_\xi(\xi, \zeta, \tau), V_z = z_m \omega U_\zeta(\xi, \zeta, \tau),$$

$$p = p_0 + \frac{\rho v \lambda \omega}{\psi^2} P(\xi, \tau) + p_1(\tau), \quad Ma^2 = \frac{l^2 \omega^2}{c^2}, \quad c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_{00}}}, \quad Re = \frac{h_0^2 \omega \rho_{00}}{\rho v}.$$

С учетом обозначений уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности (1)

примут вид:

$$\begin{aligned} & \left(Re + \lambda Ma^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \lambda U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{4 \partial^2 U_\xi}{3 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{3 \partial \zeta \partial \xi} \right); \\ & \psi^2 \left(Re + \lambda Ma^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \lambda U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left(\frac{4 \partial^2 U_\zeta}{3 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{3 \partial \zeta \partial \xi} + \frac{\psi^2 \partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} \right); \\ & Ma^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda Ma^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \left(Re + \lambda Ma^2 P \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия (2) переписутся в виде:

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \lambda f_z(\tau); \quad (7)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W_3}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W_3,$$

где $w_3 = w_m W_3$ - прогиб пластины.

Граничные условия для давления (3):

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0.$$

Нормальное напряжение в безразмерных переменных примет вид:

$$q_{zz} = -p_0 - \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) - p_1(\tau) \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W.$$

Касательное напряжение:

$$q_{zx} = \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi} \left(\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \text{ при } \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W.$$

Учитываем найденную связь для u , φ , $\frac{\partial w}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \text{где } b_1 = \frac{a_2 a_7 - a_3 a_6}{a_1 a_2 - a_6^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = b_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \text{где } b_2 = \frac{a_1 a_3 - a_7 a_6}{a_1 a_2 - a_6^2}.$$

Тогда уравнение динамики трехслойной пластины (4) в безразмерных переменных примет вид:

$$-w_m \left\{ \frac{1}{l^4} (a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2) \frac{\partial^4 W_3}{\partial \xi^4} + m_0 \omega^2 \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} \right\} = p_0 + p_1(\tau) + \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P. \quad (9)$$

Граничные условия запишутся:

$$W_3 = 0 \text{ при } \xi = \pm 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Таким образом, построена математическая модель динамической задачи взаимодействия двух пластин, одна из которых является трехслойной, через слой вязкой сжимаемой жидкости, состоящая из: уравнения динамики слоя вязкой сжимаемой жидкости (6); уравнения динамики упругого трехслойного статора (9); граничных условий на поверхностях пластин (7), граничных условий для давления на торцах и в торцевых щелях (8) и условий свободного опирания упругого статора (10).

3. Метод решения

Будем решать задачу методом возмущений. Рассмотрим одночленное разложение по малому параметру ψ и представим решение в виде ряда по малому параметру λ :

$$U_{\xi} = U_{\xi 0} + \lambda U_{\xi 1} + \dots,$$

$$U_{\zeta} = U_{\zeta 0} + \lambda U_{\zeta 1} + \dots,$$

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \dots,$$

$$W_3 = W_{30} + \lambda W_{31} + \dots$$

Получим уравнения:

$$\operatorname{Re} \frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 U_{\xi 0}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} = 0, \tag{11}$$

$$Ma^2 \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Граничные условия:

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{df}{dt} \text{ при } \zeta = 1;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{w_m}{z_m} \frac{dW_{30}}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0;$$

$$P_0 = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

$$\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Уравнение динамики пластины и граничные условия:

$$-w_m \left\{ \frac{1}{l^4} (a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2) \frac{\partial^4 W_{30}}{\partial \xi^4} + m_0 \omega^2 \frac{\partial^2 W_{30}}{\partial \tau^2} \right\} = p_0 + p_1(\tau) + \frac{\rho v_{zm} \omega}{h_0 \psi^2} P.,$$

$$W_{30} = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

$$\frac{\partial W_{30}}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Решение будем искать в виде:

$$U_{\xi 0} = A_{n\xi} \cos \tau + C_{n\xi} \sin \tau,$$

$$P_0 = A_{np} \cos \tau + C_{np} \sin \tau,$$

$$W_{30} = A_3 \cos \tau + C_3 \sin \tau + A_0,$$

$$f(\tau) = a_0 \sin \tau - c_0 \cos \tau.$$

Получим из системы, что:

$$U_{\xi 0} = \left(\sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \xi) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) \cos \tau + \left(\sum_{i=1}^4 C_i F_i(\varepsilon \xi) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} \right) \sin \tau, \text{ где}$$

$$F_1 = ch \varepsilon \xi sh \varepsilon \xi,$$

$$F_2 = \frac{1}{2} (ch \varepsilon \xi \sin \varepsilon \xi + sh \varepsilon \xi \cos \varepsilon \xi),$$

$$F_3 = \frac{1}{2} sh \varepsilon \xi \sin \varepsilon \xi,$$

$$F_4 = \frac{1}{4} (ch \varepsilon \xi \sin \varepsilon \xi - sh \varepsilon \xi \cos \varepsilon \xi).$$

Коэффициенты C_i , $i = 1, \dots, 4$ определяются, как:

$$\left\{ \begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi}; \\
C_2 &= -\frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{1}{F_2} \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} - C_1 \frac{F_1}{F_2} - C_3 \frac{F_3}{F_2} - \frac{F_4}{F_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{(4F_4^2 + F_2^2)} \left(F_2 \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - 2F_4 \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) + \\
&+ \left(-\frac{F_4}{F_2} \right) \frac{4C_1(F_3F_2 - F_1F_4)}{(4F_4^2 + F_2^2)} + \frac{F_4}{F_2} \frac{C_3(4F_3F_4 + F_1F_2)}{(4F_4^2 + F_2^2)}; \\
C_3 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi}; \\
C_4 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{(4F_4^2 + F_2^2)} \left(F_2 \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} - 2F_4 \frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} \right) + \frac{4C_1(F_3F_2 - F_1F_4)}{(4F_4^2 + F_2^2)} - \frac{C_3(4F_3F_4 + F_1F_2)}{(4F_4^2 + F_2^2)}.
\end{aligned} \right.$$

Таким образом,

$$U_{\xi 0} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \left[\frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} L_1(\zeta) + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} L_2(\zeta) \right] \cos \tau + \left[\frac{\partial C_{np}}{\partial \xi} L_3(\zeta) + \frac{\partial A_{np}}{\partial \xi} L_4(\zeta) \right] \sin \tau \right\};$$

где

$$L_1(\zeta) = \frac{1}{2A} \left((1 - F_1(\varepsilon\zeta))A + BF_2(\varepsilon\zeta) - 4CF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_2(\zeta) = \frac{1}{A} \left(-CF_2(\varepsilon\zeta) + AF_3(\varepsilon\zeta) - BF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_3(\zeta) = \frac{1}{2A} \left((-F_1(\varepsilon\zeta))A + BF_2(\varepsilon\zeta) - 4CF_4(\varepsilon\zeta) \right);$$

$$L_4(\zeta) = \frac{1}{A} \left(-CF_2(\varepsilon\zeta) + A \left(F_3(\varepsilon\zeta) - \frac{1}{2} \right) - BF_4(\varepsilon\zeta) \right).$$

Здесь $A=4F_4^2 + F_2^2$, $B=F_1F_2 - F_2 + 4F_3F_4$, $C=F_4 + F_3F_2 - F_1F_4$.

P_0 и полученное $U_{\xi 0}$ подставим в уравнение неразрывности (третье уравнение) и используем граничные условия, получим систему уравнений для

определения коэффициентов A_{np} и C_{np} , приравнивая их при $\sin \tau$ и $\cos \tau$.

При небольших λ :

$$Ma^2 \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta} \right) = 0;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1;$$

$$U_{\xi 0} = 0, U_{\zeta 0} = \frac{w_m}{z_m} \frac{dW_{30}}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0;$$

$$\begin{cases} -Ma^2 A_{np} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial C_{n\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} L_3(\zeta) + 2 \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} L_4(\zeta) = 0; \\ Ma^2 C_{np} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial A_{n\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} L_1(\zeta) + 2 \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} L_2(\zeta) = 0. \end{cases}$$

Из граничных условий получаем значения коэффициентов $A_{n\zeta}$ и $C_{n\zeta}$ в граничных точках:

$$A_{n\zeta} = a_0, C_{n\zeta} = c_0 \text{ при } \zeta = 1;$$

$$A_{n\zeta} = \frac{w_m}{z_m} C_3, C_{n\zeta} = -\frac{w_m}{z_m} A_3 \text{ при } \zeta = 0.$$

Проинтегрируем обе части системы от 0 до 1 и подставим полученные значения коэффициентов, получим:

$$\begin{cases} -Ma^2 A_{np} + \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{p} + \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{q} = -2\varepsilon^2 c_0 - 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} A_3; \\ Ma^2 C_{np} + \frac{\partial^2 C_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{d} + \frac{\partial^2 A_{np}}{\partial \xi^2} \tilde{f} = -2\varepsilon^2 a_0 + 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} C_3; \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{2} \tilde{p} = \int_0^1 L_3(\zeta) d\zeta, \quad \frac{1}{2} \tilde{q} = \int_0^1 L_4(\zeta) d\zeta,$$

$$\frac{1}{2} \tilde{d} = \int_0^1 L_1(\zeta) d\zeta, \quad \frac{1}{2} \tilde{f} = \int_0^1 L_2(\zeta) d\zeta.$$

Уравнение колебания трехслойного статора запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{-w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} \frac{\partial^4 A_3}{\partial \xi^4} + w_m m_0 \omega^2 A_3 - \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} A_{np} = 0; \\ \frac{-w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} \frac{\partial^4 C_3}{\partial \xi^4} + w_m m_0 \omega^2 C_3 - \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} C_{np} = 0; \\ \frac{-w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} \frac{\partial^4 A_0}{\partial \xi^4} = p_0. \end{cases}$$

Получаем систему из 5 уравнений для поиска коэффициентов A_{np} , C_{np} , A_3 ,

C_3 , A_0 .

Будем искать решение системы методом Бубнова-Галеркина в следующем

виде:

$$A_{np} = (1 - \xi^2) A, \quad C_{np} = (1 - \xi^2) C, \quad A_3 = (1 - \xi^2)^2 a_{33}, \quad C_3 = (1 - \xi^2)^2 c_{33},$$

$$A_0 = \frac{p_0 l^4}{-24 w_m (a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}.$$

Подставим в систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -Ma^2(1-\xi^2)A - 2C\tilde{p} - 2A\tilde{q} = -2\varepsilon^2 c_0 - 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} (1-\xi^2)^2 a_{33}; \\ Ma^2(1-\xi^2)C - 2C\tilde{d} - 2A\tilde{f} = -2\varepsilon^2 a_0 + 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} (1-\xi^2)^2 c_{33}; \\ -\frac{w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} \frac{\partial^4 A_3}{\partial \xi^4} + w_m m_0 \omega^2 A_3 - \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} A_{np} = 0; \\ -\frac{w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} \frac{\partial^4 C_3}{\partial \xi^4} + w_m m_0 \omega^2 C_3 - \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} C_{np} = 0; \\ A_0 = \frac{p_0 l^4}{-24w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}. \end{array} \right.$$

Умножая левую и правую части первых двух уравнений системы на $(1-\xi^2)$, а

третьего и четвертого уравнений на $(1-\xi^2)^2$ и интегрируя от -1 до 1, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{16}{15}Ma^2A - \frac{8}{3}C\tilde{p} - \frac{8}{3}A\tilde{q} = -\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} \frac{32}{35} a_{33}; \\ \frac{16}{15}Ma^2C - \frac{8}{3}C\tilde{d} - \frac{8}{3}A\tilde{f} = -\frac{8}{3}\varepsilon^2 a_0 + 2\varepsilon^2 \frac{w_m}{z_m} \frac{32}{35} c_{33}; \\ -\frac{384}{15} \frac{w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} a_{33} + \frac{256}{315} w_m m_0 \omega^2 a_{33} - \frac{32}{35} \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} A = 0; \\ -\frac{384}{15} \frac{w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{l^4} c_{33} + \frac{256}{315} w_m m_0 \omega^2 c_{33} - \frac{32}{35} \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} C = 0; \\ A_0 = \frac{p_0 l^4}{-24w_m(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}. \end{array} \right.$$

Решая систему, получим, что

$$A = \frac{3Q}{8\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{31}{8\tilde{f}} QS - \frac{8}{3}\tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}};$$

$$C = \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)};$$

$$a_{33} = \frac{32}{35\eta} \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} \left[\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right];$$

$$c_{33} = \frac{32}{35\eta} \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)}.$$

Выражаем теперь коэффициенты A_{np} , C_{np} , A_3 , C_3 :

$$A_{np} = (1 - \xi^2) \left[\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right];$$

$$C_{np} = (1 - \xi^2) \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)};$$

$$A_3 = (1 - \xi^2)^2 \frac{32}{35\eta} \frac{\rho_0 z_m \nu \omega}{h_0 \psi^2} \left[\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right];$$

$$C_3 = (1 - \xi^2)^2 \frac{32 \rho_0 z_m \nu \omega}{35 \eta h_0 \psi^2} \frac{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)}.$$

Таким образом,

$$P_0 = (1 - \xi^2) \left[\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right] \cos \tau + (1 - \xi^2) \frac{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \sin \tau;$$

$$W_{30} = (1 - \xi^2)^2 \frac{32 \rho_0 z_m \nu \omega}{35 \eta h_0 \psi^2} \left[\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \frac{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \right] \cos \tau +$$

$$+ (1 - \xi^2)^2 \frac{32 \rho_0 z_m \nu \omega}{35 \eta h_0 \psi^2} \frac{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)}{\left(\frac{3}{8} \frac{1}{\tilde{f}} QS - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \sin \tau + \frac{p_0 l^4}{-24 w_m (a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)},$$

где

$$Q = \frac{16}{15} Ma^2 - \frac{8}{3} \tilde{d} - \chi, \quad S = -\frac{16}{15} Ma^2 - \frac{8}{3} \tilde{q} + \chi,$$

$$\eta = \left(\frac{384 (-w_m)(a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}{15 l^4} + \frac{256}{315} w_m m_0 \omega^2 \right), \quad \chi = 2 \varepsilon^2 \left(\frac{32}{35} \right)^2 \frac{w_m \rho_0 \nu \omega}{\eta h_0 \psi^2}.$$

Преобразовывая последнее выражение, получим:

$$W_{30} = (1 - \xi^2)^2 \frac{1}{\eta} \frac{32 \rho_0 \nu \omega z_m}{35 h_0 \psi^2} \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \frac{Q}{\tilde{f}} \left(-\frac{8}{3} \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right) + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \left(\frac{3}{8} \frac{QS}{\tilde{f}} - \frac{8}{3} \tilde{p} \right) \right)^2}}{\left(\frac{3}{8} \frac{QS}{\tilde{f}} - \frac{8}{3} \tilde{p} \right)} \times$$

$$\times \sin \left(\tau + \arctg \frac{\left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} \left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right) + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \left(\frac{3QS}{8\tilde{f}} - \frac{8}{3}\tilde{p} \right) \right)}{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)} + \pi n \right) + \frac{p_0 l^4}{-24w_m (a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2)}.$$

4. Полученные результаты

Получаем из последнего выражения формулу для подсчета амплитудно-частотной характеристики, которая примет вид:

$$AЧХ = \frac{1}{\eta} \frac{32}{35} \frac{\rho_0 \nu \omega z_m}{h_0 \psi^2} \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right)^2 + \left(\frac{3Q}{8\tilde{f}} \left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 c_0 - \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} S \right) + \varepsilon^2 \frac{a_0}{\tilde{f}} \left(\frac{3QS}{8\tilde{f}} - \frac{8}{3}\tilde{p} \right) \right)^2}}{\left(\frac{3QS}{8\tilde{f}} - \frac{8}{3}\tilde{p} \right)}.$$

Итак, в данной статье описана физическая модель системы, состоящей из абсолютно жесткого вибратора, упругого трехслойного статора и движущегося между ними слоя вязкой сжимаемой жидкости, составлена математическая модель, осуществлена постановка задачи в безразмерных переменных, приведено решение задачи и получено выражение для амплитудно-частотной характеристики. Дальнейшее исследование полученной АЧХ позволит выявить условия, при которых возникают резонансные явления, учесть их при конструировании новых деталей в современной машиностроительной и авиакосмической промышленности, в том числе, с целью увеличения износостойкости оборудования.

Список источников

1. Агеев Р.В., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование гидроупругих колебаний жестко заземленной пластины на упругом основании // Математические методы в технике и технологиях. 2017. Т. 3. С. 29-34.
2. Агеев Р.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором, установленной на вибрирующем основании // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2010. Т. 4. № 1 (49). С. 7-14.
3. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of Sound and Vibration, 2013, vol. 332 (12), pp. 3064-3085. DOI: [10.1016/j.jsv.2013.01.007](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007)
4. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 254-263. DOI: [10.1016/j.compstruct.2012.07.017](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017)
5. Бучной Н.В., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Задача моделирования взаимодействия сдавливаемого слоя вязкого газа с круглой упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/1>
6. Amabili M., Pellicano F., Pandoussis M.P. Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying Flowing Fluid, Cambridge University Press, New York, USA, 2008, 374 p.

7. Mergen H Ghaesh, Marco Amabili, Michael P Paidoussis. Nonlinear dynamics of axially moving plates // Journal of Sound and Vibration, 2013, vol. 332, issue 2, pp. 391-406. DOI: [10.1016/j.jsv.2012.08.013](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.08.013)
8. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53453>
9. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53466>
10. Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в трех упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49679>
11. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Задача динамики взаимодействия сдавливаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)
12. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. - М.: Физматлит, 2005. - 576 с.
13. Быкова Т.В., Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Скородумов Е.С. Динамика взаимодействия упругой геометрически нерегулярной пластины со слоем вязкой жидкости и абсолютно твердым подвижным вибратором опоры // Математическое

- моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/11>
14. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попова А.А. Математическое моделирование гидроупругих колебаний трехслойного элемента опоры с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/1>
15. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
16. Зеленая А.С. Изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3. URL: <http://mathmod.esrae.ru/15>
17. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – М.: Физматлит, 2006. - 378 с.
18. Попов В.С., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1. С. 38-45.
19. Кондратов Д.В., Блинкова О.В. Математическая модель взаимодействия сдвигаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной

с легким несжимаемым наполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 1. С. 4-11.

20. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. - М.: Наука, 1964. - 815 с.

References

1. Ageev R.V., Popova A.A., Khristoforova A.V. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh*, 2017, vol. 3, pp. 29-34.
2. Ageev R.V. *Vestnik Caratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2010, vol. 4, no. 1 (49), pp. 7-14.
3. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface, *Journal of Sound and Vibration*, 2013, vol. 332 (12), pp. 3064-3085. DOI: [10.1016/j.jsv.2013.01.007](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007)
4. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water, *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 254-263. DOI: [10.1016/j.compstruct.2012.07.017](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017)
5. Buchnoi N.V., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2016, no. 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/1>
6. Amabili M., Pellicano F., Pandoussis M.P. *Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying Flowing Fluid*, Cambridge University Press, New York, USA, 2008, 374 p.

7. Mergen H Ghaesh, Marco Amabili, Michael P Paidoussis. Nonlinear dynamics of axially moving plates, *Journal of Sound and Vibration*, 2013, vol. 332, issue 2, pp. 391-406. DOI: [10.1016/j.jsv.2012.08.013](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.08.013)
8. Kondratov D.V., Kalinina A.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53453>
9. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53466>
10. Blinkov Yu.A., Kovaleva I.A., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49679>
11. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)
12. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyzkouprugoplasticheskikh elementov konstruktsii*. (Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements), Moscow, Fizmatlit, 2005, 576 p.
13. Bykova T.V., Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Skorodumov E.S. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2017, no. 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/11>
14. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popova A.A. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2016, no. 1. URL: <http://mathmod.esrae.ru/1>
15. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>

16. Zelenaya A.S. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2017, no. 3. URL: <http://mathmod.esrae.ru/15>
17. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslainnykh elementov konstruksii na uprugom osnovanii* (Deformation of three-layer structural elements on an elastic base), Moscow, Fizmatlit, 2006, 378 p.
18. Popov V.S., Khristoforova A.V. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2007, vol. 3, no. 1, pp. 38-45.
19. Kondratov D.V., Blinkova O.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 1, pp. 4-11.
20. Fabrikant N.Ya. *Aerodinamika* (Aerodynamics), Moscow, Nauka, 1964, 815 p.

Статья поступила в редакцию 19.12.2023

Одобрена после рецензирования 27.12.2023

Принята к публикации 27.02.2024

The article was submitted on 19.12.2023; approved after reviewing on 27.12.2023; accepted for publication on 27.02.2024