

УДК 621.452: 621.9

## **Методика расчета разрушения динамической мишени лазерным лучом на заданной дальности**

**Марчуков Е.Ю.\*, Кулалаев В.В.\*\*, Вовк М.Ю.\*\*\***

*Опытно-конструкторское бюро имени А. Люльки, филиал Уфимского  
моторостроительного производственного объединения,*

*ул. Касаткина, 13, стр. 8, Москва, 129301, Россия*

*\*e-mail: [Evgeny.Marchukov@okb.umpo.ru](mailto:Evgeny.Marchukov@okb.umpo.ru)*

*\*\*e-mail: [kulalayev.viktor@gmail.com](mailto:kulalayev.viktor@gmail.com)*

*\*\*\*e-mail: [mvovk@yandex.ru](mailto:mvovk@yandex.ru)*

### **Аннотация**

В работе разработана методика расчёта разрушения динамической мишени лазером, установленным на подвижной платформе, на заданной дальности на базе вариационного метода и решения уравнения Лагранжа. Показано, что появилась возможность решать нелинейные задачи тепломассопереноса, когда коэффициент теплопроводности является тензорной величиной в анизотропных средах. Такая ситуация полностью реализуется при воздействии мощного лазерного луча на физические среды различных мишеней при их разрушении на переменной дальности. Показаны сферы технического применения разработанной методики. Приведен пример применения методики для расчёта образования каверны в процессах промышленной лазерной сварки.

**Ключевые слова:** лазерный луч, тепломассоперенос, вариационный метод, уравнение Лагранжа, мишень, фокусировка, каверна.

Освоение ближнего и дальнего космоса невозможно без создания современных технологий сварки конструкционных узлов с применением лазерного излучения, когда поверхность конструкции может рассматриваться как условная мишень. При этом разработка методики расчёта теплового воздействия лазерного луча является одной из приоритетных научных задач, решение которой в работе проведено на базе вариационного метода [1-22]. Достоинством вариационного метода [1-3] является то, что появилась возможность решать нелинейные задачи тепломассопереноса, когда коэффициент теплопроводности является тензорной величиной в анизотропных средах [3-8]. Такая ситуация полностью реализуется при воздействии мощного лазерного луча на физические среды различных мишеней при их разрушении на заданной переменной дальности. В данных исходных условиях теплового воздействия мощного лазерного луча решение тепловой задачи разрушения среды мишени существенно упрощается с применением вариационного метода [4,7]. При этом решение сводится к поиску некоторой функции, описывающей образование подвижных стенок каверны с некоторым градиентом температуры на поверхности расплава. Решение указанной задачи проводится в интересах широкого класса различных промышленных технологических процессов, в том числе технологий освоения ближнего и дальнего космоса.

Представленная методика основана на решении нестационарной задачи воздействия луча мощного лазера, установленного на подвижной платформе на твёрдую поверхность динамической мишени - конструкции на переменной дальности. Размеры теплового пятна определены выходной апертурой фокусирующей оптики лазера. Под воздействием тепловых градиентов на поверхности мишени в зависимости от времени воздействия лазерного луча возникают подвижные границы разрушения тела мишени в виде образования каверны плавления и кипения материала. Если условная мишень представляет собой лист металла с заданной толщиной, то образовавшаяся каверна может сформировать сквозной проплав металла, что является не допустимым. Движение границ каверны описано в работе соответствующей математической моделью образования неизвестного квазистационарного температурного поля, которое образовано большой концентрацией тепловой энергии на ограниченной площади теплового пятна при заданном промежутке времени воздействия. Приведен пример применения метода для расчёта образования каверны в процессах промышленной лазерной сварки. Результаты работы могут быть использованы в интересах создания и отработки промышленных технологических процессов температурной обработки, резки и сварки различных материалов лазерными установками в различных физических средах.

## Общие положения, обзор проблемы

Освоение новых технологий, исследования ближнего и дальнего космоса невозможно без создания современных технологий сварки конструкционных узлов космических систем с применением лазерного излучения, когда поверхность, обрабатываемой конструкции может рассматриваться как условная мишень. При этом разработка надёжной методики расчёта теплового воздействия лазерного луча на различные физические среды является одной из приоритетных и актуальных научных задач, решение которой в работе впервые проведено на базе вариационного метода. Достоинством вариационного метода [1-4, 22] является то, что появилась возможность решать нелинейные задачи тепломассопереноса, когда коэффициент теплопроводности является тензорной величиной в анизотропных средах [3-8]. Такая ситуация полностью реализуется при воздействии мощного лазерного луча на физические среды различных мишеней при их разрушении на заданной переменной дальности. В данных исходных условиях теплового воздействия мощного лазерного луча решение тепловой задачи разрушения среды мишени существенно упрощается с применением вариационного метода [3,4,7]. При этом решение сводится к поиску некоторой функции, описывающей образование подвижных стенок каверны с некоторым градиентом температуры на поверхности расплава. Решение указанной задачи проводится в интересах широкого класса различных промышленных технологических процессов, в том числе технологий освоения ближнего и дальнего космоса. Аналитический обзор поиска решения тепловых задач различных классов вариационным методом можно найти в [1-22].

## **Постановка цели задачи исследования**

В данных исходных условиях теплового воздействия мощного лазерного луча решение градиентной тепловой задачи разрушения среды мишени, с образованием, например – каверны с применением вариационного метода решение существенно упрощается. При этом решение сводится к поиску некоторой функции, описывающей образование подвижных стенок каверны с некоторым градиентом температуры на поверхности расплава. Решение указанной задачи проводится в интересах широкого класса различных промышленных технологических процессов. Например, при организации процесса лазерной сварки при сборке модулей узлов станций в условиях космоса или кузовных деталей в автомобилестроении, когда меняются расстояния и углы между платформами крепления оборудования с изменением кривизны свариваемых поверхностей.

Рассмотрим нестационарную задачу воздействия луча мощного лазера, установленного на подвижной платформе на твёрдую поверхность динамической мишени на переменной дальности, расчётная схема, которой представлена на рис.1. Вариационную задачу рассмотрим в следующей постановке. Лазерный луч заданной плотности мощности падает на поверхность мишени под заданным углом с образованием теплового пятна на определённой дальности. Размеры теплового пятна определены выходной апертурой фокусирующей оптики лазера. Под воздействием тепловых градиентов на поверхности мишени, в зависимости от времени воздействия лазерного луча, возникают подвижные границы разрушения тела мишени в виде образования каверны плавления и кипения материала [4,7,8]. Если мишень

представляет собой лист металла с заданной толщиной, то образовавшаяся каверна может сформировать сквозной прожог металла, что недопустимо с технологической точки зрения. Очевидно, что движение границ каверны зависит от образования неизвестного квазистационарного температурного поля, которое образовано большой концентрацией тепловой энергии на ограниченной площади теплового пятна при заданном времени воздействия.

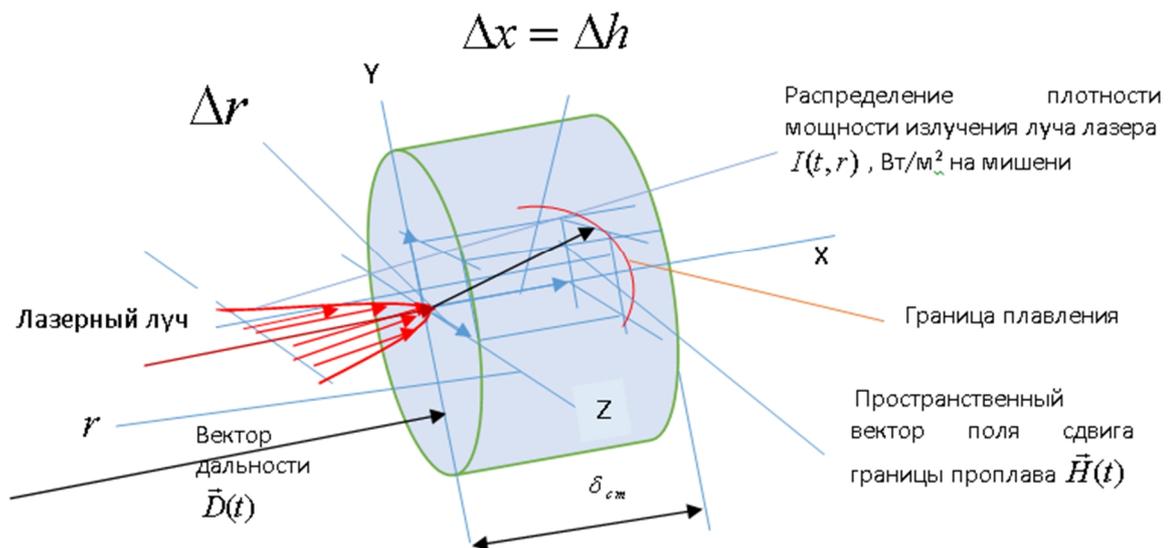


Рис. 1. Расчётная схема нестационарной задачи воздействия мощного лазерного луча на поверхность твёрдой мишени на переменной дальности

Следует отметить особенности расчётов в данной постановке тепловой задачи, которые определяются следующими обстоятельствами. Во-первых, следует произвести транспортировку тепла лазера в виде сконцентрированного теплового пятна (ТП) лазера с заданной  $F_0$  площадью. Площадь ТП определяется свойствами

оптического резонатора лазера и размерами выходной апертуры  $d_a$  фокусирующей оптики, которая определяет расхождение луча на заданной дальности  $D(t)$  в фиксированный момент  $t_o$  времени. С данного времени собственно и начинается тепловое воздействие на поверхность мишени. Во – вторых, при относительном движении платформ систем лазера и мишени в фазовом пространстве, тепловое воздействие луча лазера начинается только с момента  $t_o$ , начала нагрева поверхности мишени. Тогда дальность транспорта ТП лазера в общем случае сближения (или отдаления) объектов, в зависимости от требований процесса, определяется соотношением вида

$$D(t) = D_o - \int_{t_o}^t (\mp V_o(t) \cdot \cos \varphi(t) + V_M(t) \cdot \cos \beta(t)) dt, \quad (1)$$

где:  $D_o$  модуль вектора дальность до мишени в начальный момент  $t_o$ ;  $V_o(t)$  и  $V_M(t)$  скорости движения платформ системы излучающего лазера и мишени соответственно;  $\varphi(t)$  и  $\beta(t)$  - углы наклона векторов скоростей относительно линии визирования мишени (направления вектора дальности, см. рис.2).

Тогда реальное время воздействия сфокусированного на поверхности мишени ТП лазерного луча, т.е. время образования каверны с подвижными стенками расплава, приводится к виду

$$\tau = t_o - t. \quad (2)$$

Предполагается, что фокусирование лазерного луча на заданной дальности на поверхности динамической мишени производится адаптированной асферической

силовой оптикой, с изменяемым углом расхождения  $\theta(t)$  луча от текущей дальности по заранее известному закону управления

$$\theta_{yn}(t) = f(d_a, D_o, \omega_{зад}, D(t)) , \quad (3)$$

здесь площадь теплового пятна лазера остаётся постоянной независимо от текущей дальности  $F_\omega = \pi\omega_{зад}^2 \approx Const_1$ , тогда радиус ТП определён зависимостью вида

$$\omega_{зад} = \sqrt{\frac{F_\omega}{\pi}} = Const_2 . \quad (4)$$

Общая кинематическая схема динамики систем в фазовом поле представлена на рис. 2. Вариационный принцип в данной постановке тепловой задачи заключается в том, что при определении теплового потенциала и функции диссипации энергии, интегрирование производится по объёму с подвижными стенками в масштабе времени (2). Отметим, что известное уравнение Лагранжа описывает тепловой поток для заданного мгновенного положения подвижных границ и температуры независимо от предыстории развития термодинамического процесса [3,4]. Этот же принцип применим и для подвижных границ и свойств физической среды, зависящих от изменения температуры.

Приведенные замечания указывают на то, что вариационный принцип и уравнение Лагранжа могут быть обоснованно применимы для решения задач

теплообмена при лазерном облучении мишеней с различными физическими свойствами на заданных дальностях.

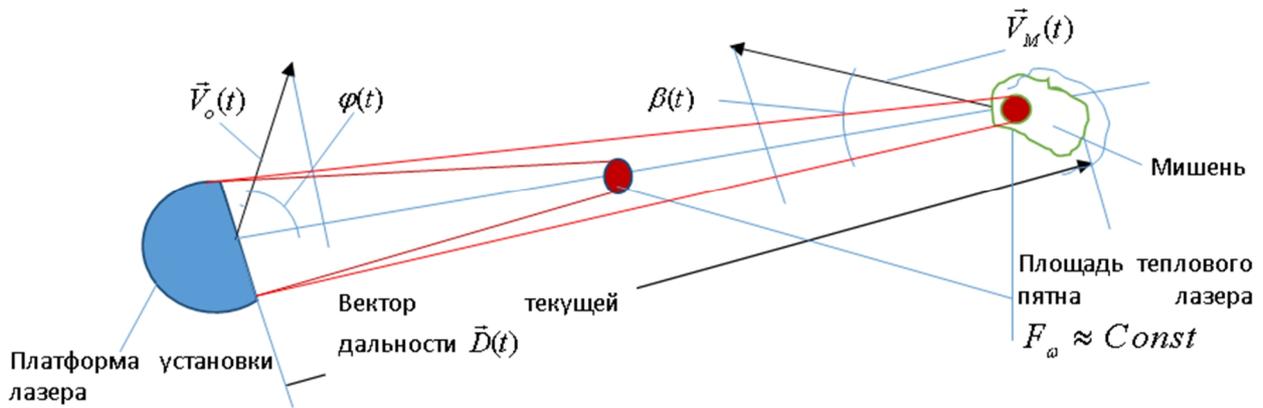


Рис. 2. Общая кинематическая схема динамики платформ систем в фазовом пространстве

Таким образом сформирована **цель** данной работы: разработка новой методики расчёта разрушения динамической мишени лазерным лучом на переменной дальности на базе вариационного метода.

### Решение тепловой задачи

Нестационарное распределение температуры по линейным координатам в изотропном твердом теле при осевой симметрии процесса нагрева определяется известными зависимостями [4]:

$$T_x(\tau) = T_{nl} \cdot \left\{ 1 - \frac{x - \Delta x(\tau)}{\Delta h_x(\tau)} \right\}^3 ;$$

$$T_r(\tau) = T_{nl} \cdot \left\{ 1 - \frac{x - \Delta r(\tau)}{\Delta h_r(\tau)} \right\}^3 , \quad (5)$$

где: -  $x$  ,  $r$  - координаты в цилиндрической системе (см.рис.1); -  $\Delta h_x(\tau)$  ;  $\Delta h_r(\tau)$  - глубина проникновения тепла в нерасплавленный металл соответственно, которое подвергается варьированию.

Смещение границ поверхности проплава каверны определены из закона сохранения энергии и приводятся к виду:

$$\Delta x(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{\eta_s \cdot I_x(t)}{\rho \cdot L_p(t)} dt ;$$

$$\Delta r(\tau, \bar{r}) = \int_0^{\tau} \int_{-1}^1 \frac{\eta_s \cdot I_r(t, \bar{r})}{\rho \cdot L_p(t)} \cdot dt \cdot d\bar{r} , \quad (6)$$

здесь:  $\eta_s$  - обобщенный интегральный коэффициент потерь энергии луча лазера при транспортировке и воздействии на поверхность мишени;  $L_p(t)$  - удельная энергия разрушения материала мишени;  $\rho$  - плотность материала мишени.

Заметим, что глубины:  $\Delta x(\tau)$  и  $\Delta r(\tau, \bar{r}(t))$  границ плавления по координатам рассчитываются вне вариационного метода и просто могут быть рассчитаны на заданной дальности в определённое время по соотношениям (6).

Величины плотности мощности в тепловом пятне лазерного луча на заданной дальности определяются соотношениями:

$$I_x(t) = \frac{2 \cdot P_o}{\pi \cdot \omega^2(t)} ;$$

$$I_r(t, \bar{r}) = \frac{2 \cdot P_o}{\pi \cdot \omega^2(t)} \cdot \exp\{-2 \cdot \bar{r}^2(t)\} , \quad (7)$$

здесь:  $P_o$  - максимальная выходная мощность излучения лазера;

$\bar{r}(t) = r/\omega(t) \in [(-1) - (+1)]$  приведенный безразмерный радиус луча лазера по поперечному сечению на заданной дальности  $D(t)$ ;  $\omega(t) = Const$  радиус теплового пятна лазерного луча на заданной дальности в масштабе текущего времени  $t = D(t)/V_s(t)$ , где  $V_s(t)$  скорость сближения (или удаления) объектов по линии визирования (по направлению луча лазера);  $D(t)$  текущая дальность между объектами в данный момент.

Удельная энергия разрушения материала мишени определяется соотношением

$$L_p(t) = c_p \cdot (T_{\max}(t) - T_o) + H'_{nl} , \quad (8)$$

где:  $c_p$  - теплоёмкость материала мишени; максимальная температура в ТП луча лазера определена зависимостью

$$T_{\max}(t) = \eta_T \cdot \sqrt[4]{\frac{I(t)}{\varepsilon_\lambda \cdot \sigma_o}} ; \quad (9)$$

$T_o$  - температура окружающей среды;  $\eta_T$  - интегральный коэффициент потерь тепла при расплаве мишени;  $\varepsilon_\lambda$  - степень спектральной черноты;  $\sigma_o$  - постоянная Больцмана;  $H'_{nl}$  - теплота плавления (данная величина может быть заменена на теплоту кипения  $H_{кип}$  из - за специфических свойств лазерного воздействия, например, на поверхности металлических мишеней).

К особенностям решения поставленной задачи следует отнести то, что при применении уравнения Лагранжа обобщенными координатами считаются:

$-\Delta h_x(t), \Delta h_r(t)$  - глубина и ширина проникновения тепла в нерасплавленный металл соответственно, а глубина и ширина границы плавления рассчитываются вне вариационного метода по приведенным выше зависимостям (6). Тогда векторы сдвига теплового поля – тепловые смещения по координатам принимают вид:

$$\begin{aligned} |\vec{H}_x| &= \int_x^{x+\Delta h_x} \rho \cdot c_p \cdot T_{nl} \cdot \left(1 - \frac{x-\Delta x}{\Delta h_x}\right)^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \Delta h_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_{nl} \left\{1 - \frac{x-\Delta x}{\Delta h_x}\right\}^4 ; \\ |\vec{H}_r| &= \int_r^{r+\Delta h_r} \rho \cdot c_p \cdot T_{nl} \cdot \left(1 - \frac{r-\Delta r}{\Delta h_r}\right)^3 dr = \frac{1}{4} \cdot \Delta h_r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_{nl} \left\{1 - \frac{r-\Delta r}{\Delta h_r}\right\}^4 . \end{aligned} \quad (10)$$

Составляющие уравнений Лагранжа определяем в общем виде, предварительно обозначив:  $i=1, 2$ , где 1 соответствует -  $x$ , а 2 соответствует -  $r$ . Тогда можно записать входящие в уравнения Лагранжа функции в общем виде:

- теплового потенциала

$$V_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Delta i}^{\Delta i + \Delta h_i} \rho \cdot c_p \cdot T_i^2 \cdot di ; \quad (11)$$

- диссипативной функции

$$D_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Delta i}^{\Delta i + \Delta h_i} \frac{1}{k} \cdot \dot{H}_i^2 \cdot di ; \quad (12)$$

- обобщенной силы сдвига

$$Q_i = T_{nl} \cdot \left( \frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_i} \right)_{i=\Delta i} , \quad (13)$$

здесь:  $i$  принимает значения 1 -  $x$  или 2 -  $r$ .

Представленные выше зависимости приводят уравнение Лагранжа к виду

$$\frac{\partial V_i}{\partial \Delta h_i} + \frac{\partial D_i}{\partial \Delta \dot{h}_i} = Q_i. \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (14) функции (11) – (13) и выполняя необходимые преобразования, получим следующую систему совместимых уравнений:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \Delta \dot{h}_i + \beta \cdot \Delta i) \cdot \Delta h_i &= \eta \cdot \frac{k}{\rho \cdot c_p}; \\ \Delta \dot{x}(t) &= \frac{\eta_s \cdot I_{x\max}(t)}{\rho \cdot L_p(t)}; \\ \Delta \dot{r}(t, \bar{r}) &= \frac{\eta_s \cdot I_r(t, \bar{r})}{\rho \cdot L_p(t)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где:  $k$  – коэффициент теплопроводности материала мишени, а коэффициенты:

$$\alpha = \frac{4}{112}; \quad \beta = \frac{11}{112}; \quad \eta = \frac{5}{14} \quad \text{определены по данным работы [4].}$$

Анализ системы дифференциально - интегральных уравнений (15) показывает, что здесь неизвестными являются:  $\Delta h_i$  и  $\Delta i$ , которые в общем случае совместимы. При этом неизвестная  $\Delta h_i$  находится вариационным методом, а неизвестная  $\Delta i$  находится из решений уравнений (6) как дополнительная величина. Тогда система уравнений (15) может быть приведена к одному нелинейному дифференциально - интегральному уравнению вида

$$28 \cdot \Delta h_i \cdot \frac{d\Delta h_i}{dt} + 77 \cdot \Delta i \cdot \Delta h_i = 280 \cdot \frac{k}{\rho \cdot c_p}, \quad (16)$$

где величина  $i$  принимает значение  $x$  или  $r$ .

Таким образом, решая уравнение (16) возможно определить линейное, вдоль координат  $x$  и  $r$ , смещение поверхности расплава и температуры вглубь материала мишени при воздействии лучом лазера с известной геометрией ТП на заданной переменной  $D(t)$  дальности, т.е. в нестационарных условиях. При этом описать развитие образовавшейся каверны с подвижными стенками проплава в трёхмерном пространстве уравнениями (6). Решение уравнения (16) найдено в общем виде

$$\ln\left(\frac{1}{1-a \cdot \Delta h_i}\right) - a \cdot \Delta h_i = c \cdot \tau, \quad (17)$$

здесь размерные величины постоянных параметров  $a$  и  $c$  зависят только от физических свойств материала мишени и приводят уравнение (17) к безразмерному виду.

Приведём пример расчетов сдвига поверхности плавления и температуры по направлению глубины – оси ( $x$ ) при проведении, например, сварочных кузовных работ в автомобилестроении [6]. Материал мишени сталь 20 с физическими свойствами: теплоёмкость -  $c_p = 462$ , Дж/(кг К); теплопроводность -  $k = 47$ , Вт/(м К); плотность -  $\rho = 7796$ , кг/м<sup>3</sup>. Решение уравнения (17), в этом случае, имеет вид

$$\ln\left(\frac{1}{1-157 \cdot \Delta h_x}\right) - 157 \cdot \Delta h_x = 2.155 \cdot \tau. \quad (18)$$

Как видно из соотношения (18) вариационный метод с уравнением Лагранжа решение поставленной задачи привёл к функциональной зависимости смещения границы температуры от поверхности проплава металла от времени воздействия

тепла лазера на заданной дальности. При этом в явном виде выделить линейное смещение затруднено. Очевидно, что смещение границы температуры легко определить графически следующим образом. Обозначим:

$$L_1(\Delta h_x) = \ln\left(\frac{1}{1-157 \cdot \Delta h_x}\right) \text{ и } L_2(\Delta h_x, t) = 157 \cdot \Delta h_x + 2.155 \cdot \tau.$$

Теперь легко построить графики функций от  $\Delta h_x$  в первом случае и от  $\Delta h_x$  и времени  $t$  во втором, что проиллюстрировано на рис.3. Соответствующая обработка полученных графиков рис. 3 приводит к получению функциональных зависимостей линейного смещения границы проплава вдоль координаты ( $x$ ) по времени  $\Delta h_x(t)$  и скорости смещения  $V_x(t) = \frac{d\Delta h_x(t)}{dt}$ , что показано на рис. 4 и рис. 5. Такой же алгоритм применим и для определения радиального смещения  $\Delta h_r(t)$  границы температуры каверны на заданной дальности воздействия луча лазера на различные материалы мишеней.

График на рис. 6 наглядно показывает, что максимальная скорость смещения линии температуры в осевом направлении наблюдается от линии расплава и затухает с увеличением глубины проникновения. При этом нестационарное распределение температуры по направлениям определено соотношениями (5). Таким образом, на основании представленного в работе алгоритма расчёта разрушения динамической мишени лазерным лучом и образования каверны на заданной дальности на базе вариационного метода и уравнения Лагранжа, можно проследить за динамикой процесса плавления и образованием каверны по времени облучения лазером различных материалов динамических мишеней, что проиллюстрировано на рис. 7.

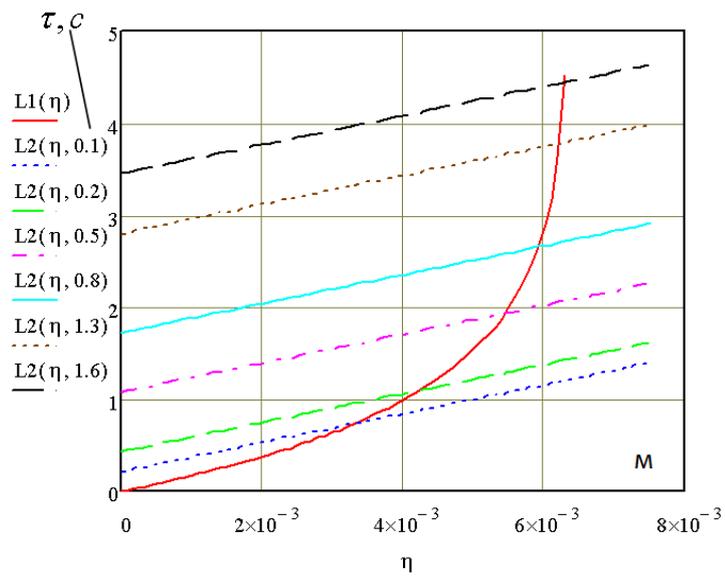


Рис. 3. К определению границ смещения температуры вглубь металла от поверхности проплава в каверне мишени (сталь 20) под воздействием лазерного луча на заданной дальности, здесь графики (прямые линии снизу-вверх) построены для моментов времени  $\tau = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1.3$  и  $1.6$  с

$$\Delta h_x(\tau) \cdot 10^{-3}, \text{ м}$$

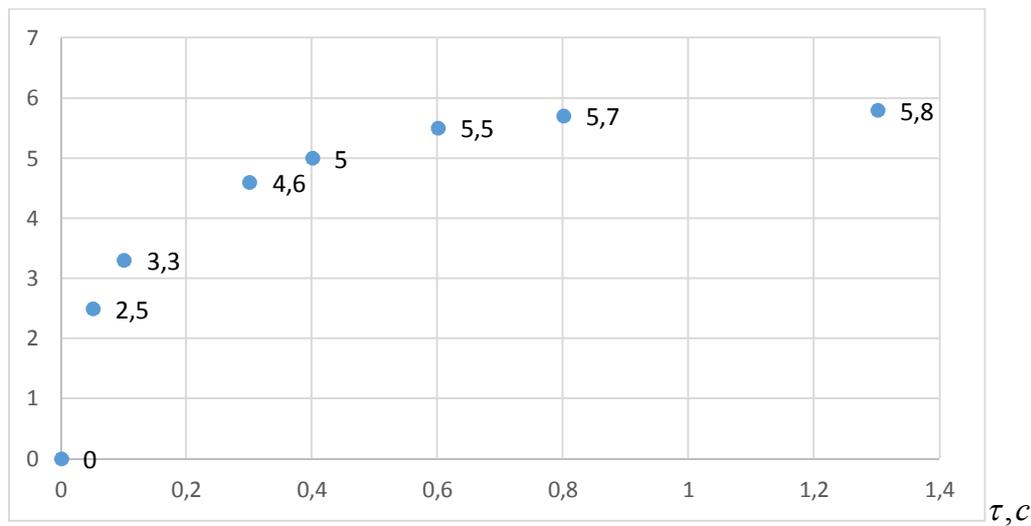


Рис. 4 . Смещение границы изменения температуры вглубь (по оси x) мишени (решение уравнения (19)) от поверхности расплава в реальном времени подвода тепла

$$V_x(\tau) \cdot 10^{-3}, \text{ м / с}$$

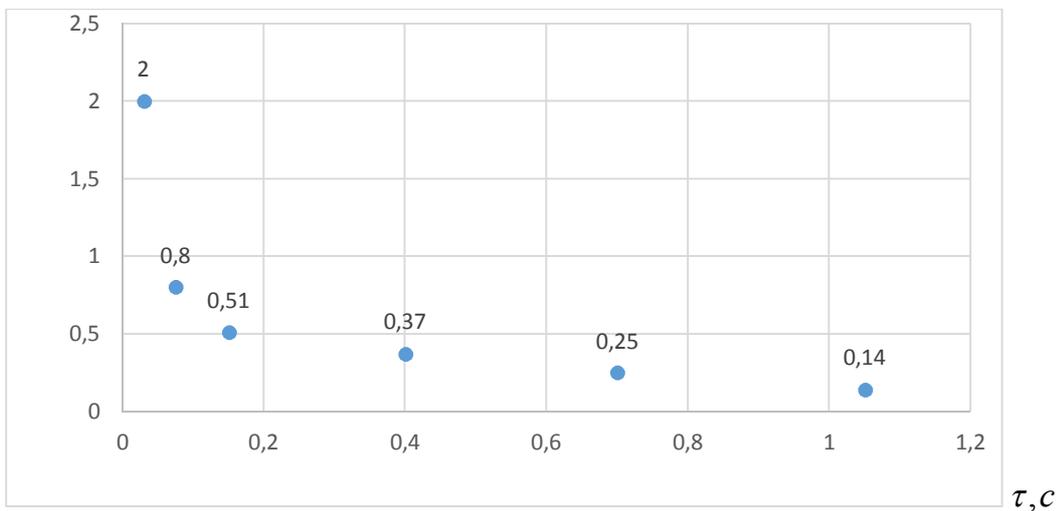


Рис. 5. Скорость смещения границы изменения температуры вглубь (по оси x) мишени от поверхности расплава в реальном времени подвода тепла

Анализ полученных результатов, представленных на рис. 4 и 5 приводит к получению зависимости скорости смещения температуры в осевом направлении от линейного смещения, представленной на рис.6. При  $\nu_0 = 0.00028$  – параметр свойств материала мишени.

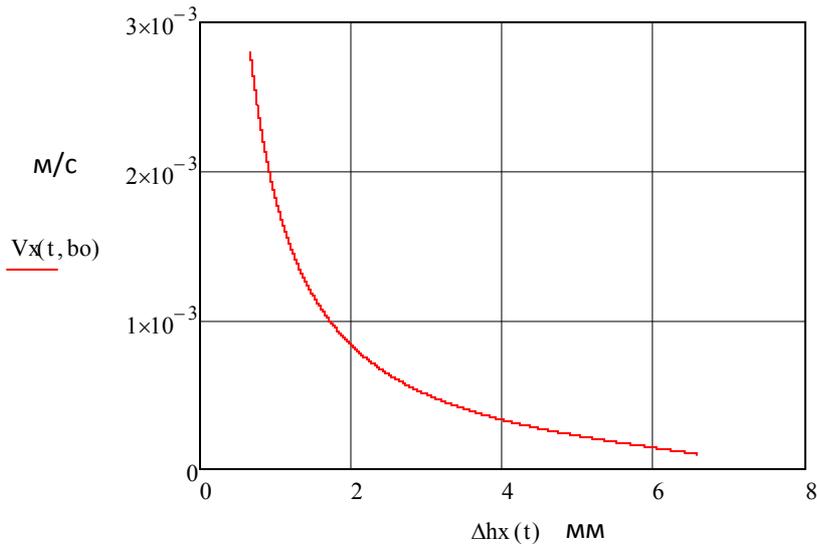


Рис. 6. Зависимость скорости смещения линии температуры от глубины проникновения в материал мишени в осевом направлении, здесь параметр  $\nu_0$  определяет физические свойства материала мишени

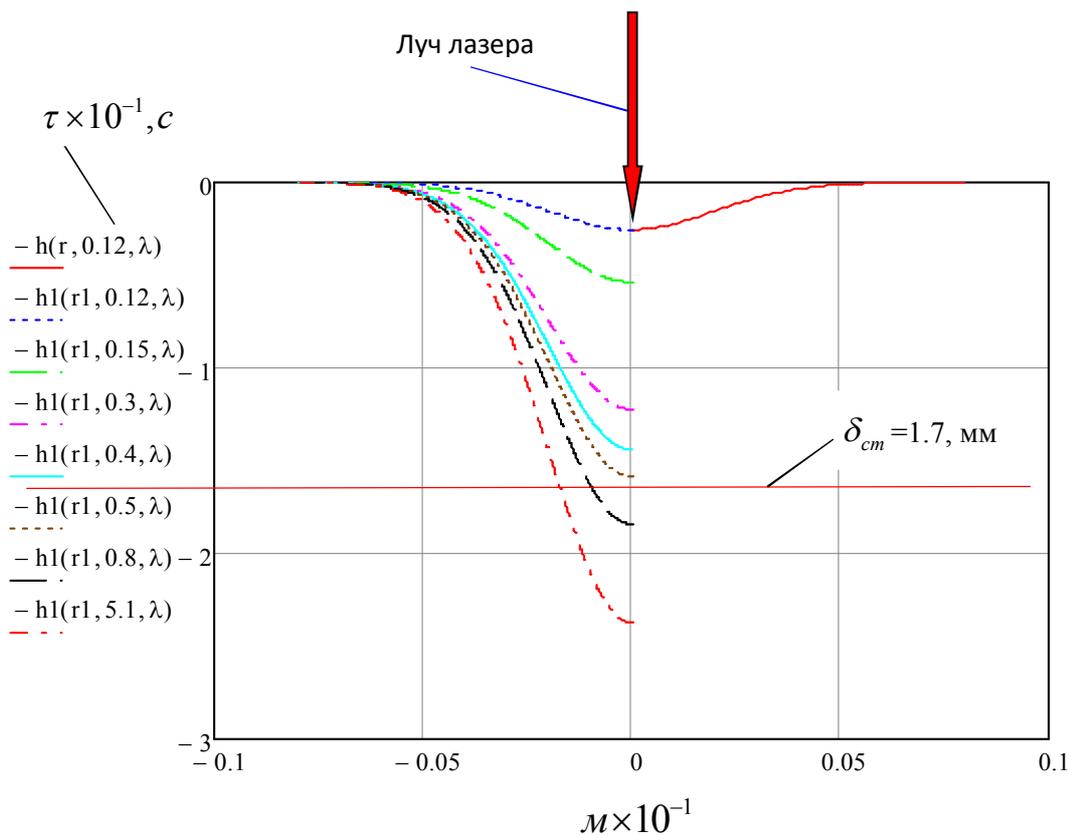


Рис. 7. Изменение геометрической формы и глубины каверны под действием луча лазера в реальном масштабе времени и толщины стальной пластины

Представленные результаты расчётов на рис. 7 проведены для исходных данных: дальность платформы лазера  $D_o = 0.07$  м; скоростей объектов:  $V_o = 4.0$  м/с,  $V_M = 1.7$  м/с и скорость сближения  $V_{сб} \approx 1.3$  м/с; выходная мощность газодинамического электроразрядного  $\text{CO}_2$  лазера  $P_{0\text{вых}} = 2.0$  кВт с длиной волны излучения  $\lambda = 10.6$  мкм; материал мишени сталь 20 (лист стали толщиной:  $\delta_{cm} = 1.7$  мм), диаметр теплового пятна  $2\omega(t) = 8 \cdot 10^{-3}$  м в реальном времени облучения. На графиках по оси ординат отложена глубина (знак минус) проплава листа мишени.

Анализ графиков рис.7 показывает динамику сдвига линии проплава (образования каверны) стальной стенки при температуре плавления. Затухание температуры вглубь стенки по координатам оценивается по предложенному вариационному методу расчетов, результаты которых представлены на рис. 4, 5 и 6. На рис. 7 видно, что сквозной проплав толщины листа стальной мишени достигается между 0.04 и 0.05 секундой воздействия луча лазера.

### **Заключение**

Разработана новая методика расчета разрушения динамической мишени мощным лазером, установленным на подвижной платформе, на заданной дальности на базе вариационного метода и решения уравнения Лагранжа;

Подтверждена возможность решения нелинейных задач теплопереноса вариационным методом, когда коэффициент теплопроводности является тензорной величиной в анизотропных средах, что характерно при облучении различных материалов мишени мощным подвижным лазерным лучом;

Результаты работы могут быть использованы в интересах создания и отработки промышленных процессов температурной обработки, резки и сварки различных материалов лазерными установками в широком технологическом диапазоне применения в различных физических средах.

### **Библиографический список**

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматиздат, 1961. – 288 с.

2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 636 с.
3. Кулалаев В.В., Корниенко О.Г., Фурсов А.П. Расчёт термодинамического поля течения закрученного потока газа в ограниченном цилиндрическом кольцевом канале структурным методом // Математические методы анализа динамических систем. 1985. № 1. С. 215 – 224.
4. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. - 208 с.
5. Lardner T.J. Approximate solutions to phase – change problems // AIAA, 1967, vol. 5, pp. 2079 – 2080.
6. Особенности лазерной сварки. URL: <http://expertsvariki.ru/tehnologii/lazernaya-svarka.html>
7. Мучник Г.Ф., Поляков Ю.А. Вариационный метод Био в задачах теплопроводности с переменными граничными условиями // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2. № 3. С. 424 – 428.
8. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах. - М.: Мир, 1971. - 291 с.
9. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. – М.: Изд-во МФТИ, 1997. – 245 с.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

11. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
13. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.: Гостехиздат, 1951. – 340 с.
14. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1983. - 448 с.
15. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 2001. - 550 с.
16. Коган М.Г. Применение методов Галеркина и Канторовича в теории теплопроводности. В Кн.: Исследование нестационарного тепло- и массообмена. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 42 - 51.
17. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831с.
19. Дёч Густав. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
20. Тюреходжаев А.Н., Карыбаева Г.А. Аналитическое решение методом частичной дискретизации дифференциального уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами теплопроводности // Труды Международной научно-

практической конференции «Информационно-инновационные технологии: интеграция науки, образования и бизнеса», Алматы, 2008, С. 481 - 486.

21. Гидаспов В.Ю. Численное моделирование стационарных волн горения и детонации в смеси частиц бора с воздухом // Труды МАИ. 2016. № 91. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=75562>

22. Назырова Р.Р. Вариационное исчисление как фундамент исследования течения среды при учете уравнения состояния реальных газов // Труды МАИ. 2017. № 92.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76946>