

Научная статья  
УДК 532.65/532.5.031  
DOI: [10.34759/trd-2022-126-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-05)

## МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕВЕСОМОСТИ

Юй Чжаокай<sup>1✉</sup>, Александр Николаевич Темнов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
Москва, Россия

<sup>1</sup>[yuzhaokai933@mail.ru](mailto:yuzhaokai933@mail.ru)✉

<sup>2</sup>[antt45@mail.ru](mailto:antt45@mail.ru)

**Аннотация.** Разработан алгоритм определения параметров механического аналога малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации на основе метода конечных элементов. В данной работе предложен маятник со спиральной пружиной для моделирования свободных колебаний жидкости. Маятник моделирует воздействие массовой силы, а воздействие силы поверхностного натяжения учитывается спиральной пружиной. Из решения задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости выведены выражения параметров механического аналога. При этом дана количественная оценка влияния числа Бонда и объёма заполнения сосуда жидкостью на значения параметров механического аналога. Из результатов следует, что с повышением числа Бонда масса колеблющейся жидкости и собственные частоты увеличиваются, а жёсткость спиральной пружины и длина маятника уменьшаются.

**Ключевые слова:** микрогравитация, механический аналог, тороидальный сосуд, сила поверхностного натяжения, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022. № 126.  
DOI: [10.34759/trd-2022-126-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-05)

Original article

## EQUIVALENT MECHANICAL MODEL OF LIQUID LINEAR SLOSHING UNDER MICROGRAVITY

Yu Zhaokai<sup>1</sup>✉, Alexander N. Temnov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University,  
Moscow, Russia

[yuzhaokai933@mail.ru](mailto:yuzhaokai933@mail.ru)✉

[antt45@mail.ru](mailto:antt45@mail.ru)

**Abstract.** A numerical approach to develop the equivalent mechanical models representing liquid sloshing is established and the effects of surface tension are taken into account which are predominant in low-gravity environment. An appropriate model is a pendulum that has a mass which represents the liquid fraction that participates in the fundamental model of the sloshing. Furthermore, the pendulum must be attached to the tank through a torsional spring which represents the stiffening effect of surface tension. A formulation is derived from the linearization of the motion equations of the liquid near its initial equilibrium position considering pressure jump on the free surface and free-end boundary condition at the three-phase contact line. The continuous problem domain is discretized by the finite element

method and its discretization gives a classical generalized eigenvalue problem, whose solutions are natural frequencies and mode shapes. Expressions for the parameters of the mechanical model are obtained by the principle of dynamic similarity. Several examples illustrate the influence of Bond number and fill levels on the behavior of liquid in toroidal tanks. Comparing numerical results with the experimental measurements obtained under ground conditions, it is found that the non-dimensional eigenvalue and slosh masses increases as Bond number increases, but the spring moment and length of pendulum decreases. The results obtained in this paper can be used in the coupling dynamic analysis of the spacecraft with propellant tanks.

**Keywords:** microgravity, equivalent mechanical model, toroidal tank, surface tension, finite element method

**For citation:** Yu Zhaokai, TemnovA.N. Equivalent mechanical model of liquid linear sloshing under microgravity. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-05)

## Введение

В современных ракетах и космических аппаратах содержатся баки, заполненные значительной частью жидкого топлива. Например, масса жидкого топлива составляет около 90% стартовой массы ракеты-носителя, а для космических аппаратов – 50%. Динамические эффекты плескания топлива в ракетах при больших эффективных силах тяготения и их влияние на устойчивость полёта подробно изучены в монографиях [1–4] и в статьях [5–6]. В настоящее время в связи с созданием орбитальных станций и разгонных блоков важную роль приобретает проблема

плескания топлива в условиях микрогравитации ( $g = 10^{-6} - 10^{-4} g_0$ , где  $g_0 = 9.81$  м/сек<sup>2</sup>), когда существенно проявляется влияние силы поверхностного натяжения.

В монографиях [7–8] подробно исследуются равновесные поверхности жидкости и рассмотрены малые колебания жидкости с учётом сил поверхностного натяжения. Так как в процессе плескания жидкости её центр массы совершает колебательное движение, при моделировании колебаний всей жидкости в полости обычно используются механические модели в виде маятников или осцилляторов типа масса–пружина. Можно строго показать, что такие механические модели обеспечивают точное воспроизведение сил и моментов, возникающих в результате движения идеальной жидкости [9–12]. В статье [13–14] предложены маятниковые модели для волновых движений тяжёлой жидкости (в дальнейшем будем говорить о капиллярной или тяжёлой жидкости в зависимости от того, учитывается капиллярный эффект или нет). Разработанный алгоритм может быть использован для малых колебаний жидкости в сосудах произвольной формы, совершающих пространственное движение.

Следует отметить, что в последнее время стали использоваться топливные баки более сложной формы – в виде коаксиального цилиндра и тороидальные. Хотя были опубликованы некоторые работы по динамике жидкости в этих сосудах в наземных условиях [15–17], поведение капиллярной жидкости в них исследовано недостаточно. Используя полученные результаты в статьях [18–19], для моделирования малых колебаний капиллярной жидкости в сосудах предложены маятники со спиральной

пружиной и разработан алгоритм определения параметров механического аналога на основе метода конечных элементов [20].

### Свободные колебания капиллярной жидкости в неподвижном сосуде

Пусть вектор ускорения  $\mathbf{g}$  действует параллельно продольной оси симметрии сосуда. Введём декартову систему координат  $Oxyz$  (рис.1), при этом на свободной поверхности  $\Gamma_0$  введена криволинейная система координат  $Os\theta h$  таким образом, чтобы равновесная поверхность  $\Gamma_0$  имела уравнение  $h = 0$ , а координатные линии  $h$  были направлены по внешней нормали поверхности  $\Gamma_0$ . Здесь переменная  $s$  означает длину дуга, а полярный угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $Ox$ .

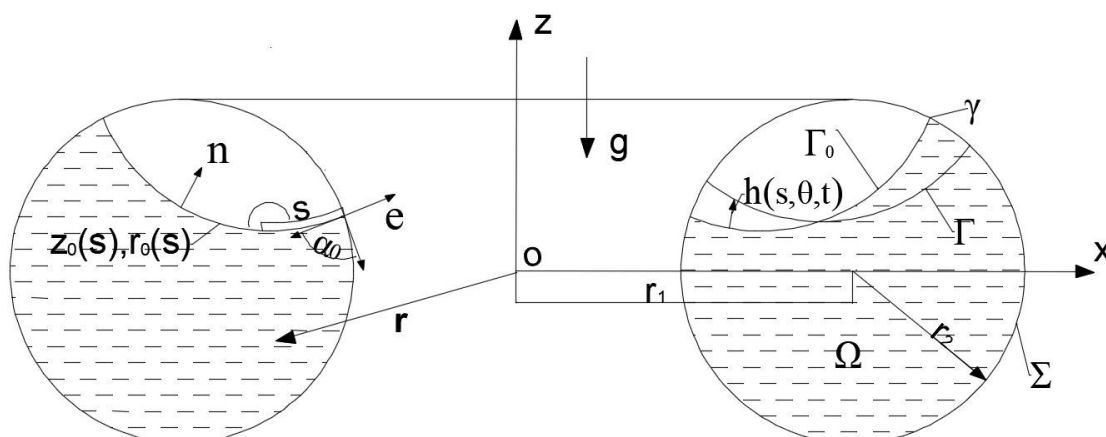


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости и систем координат:

$z_0(s)$  и  $r_0(s)$  – функции меридиана равновесной свободной поверхности;

$\alpha_0$  – угол смачивания жидкости;  $\gamma$  и  $\mathbf{e}$  – линия контакта и её внешняя нормаль;

$h(s, \theta, t)$  – отклонение возмущённой поверхности  $\Gamma$  от равновесной  $\Gamma_0$  по нормали;

$\Sigma$  – смачиваемая поверхность сосуда;  $\Omega$  – область, занимаемая жидкостью;

$r_1$  – радиус осевой окружности тора;  $r_2$  – радиус окружности меридиана тора;

$\mathbf{n}$  – внешняя нормаль поверхности жидкости;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор частицы жидкости.

Допустим, что несжимаемая жидкость в неподвижном сосуде совершает малое потенциальное движение. Запишем безразмерную формулировку задачи о малых колебаниях жидкости с учётом капиллярного эффекта:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + B_0 h \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 - \left[ (k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $B_0 = \rho g r_2^2 / \sigma$  – число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения;  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = r_{0s}$  – направляющий косинус между внешней нормалью поверхности  $\Gamma_0$  и осью  $z$ ;  $k_1$  и  $k_2$  – главные кривизны равновесной поверхности  $\Gamma_0$ , определяемые уравнениями:  $k_1 = r_{0s} z_{0ss} - r_{0ss} z_{0s}$ ,  $k_2 = z_{0s} / r_0$ , здесь нижние индексы  $s$  и  $ss$  означают первую и вторую производные функции по длине дуги  $s$  соответственно;  $\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  – оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности  $\Gamma_0$ ;  $\chi = (k_1 \cos \alpha_0 - k_1^\Sigma) / \sin \alpha_0$  – коэффициент, характеризующий поведение жидкости на линии контакта,  $k_1^\Sigma$  – главная кривизна твердой стенки сосуда на линии контакта.

Для собственных колебаний жидкости потенциал скоростей жидкости  $\varphi(x, y, z, t)$  и поле смещений свободной поверхности  $h(x, y, t)$  разыскиваем в виде:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y, z) s_n(t), \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y) s_n(t),$$

где  $\varphi_n$  и  $h_n$  – потенциал скоростей жидкости и поле смещений свободной поверхности  $n$ -го тона,  $s_n(t)$  – обобщённая координата движения жидкости.

Для определения функций  $\varphi_n$  и  $h_n$  имеем следующую краевую задачу на определение собственных частот и форм колебаний жидкости [19]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, B_0 h_n r_{0s} - \left[ (k_1^2 + k_2^2) h_n + \Delta_\Gamma h_n \right] &= \omega_n^2 \varphi_n \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = h_n \text{ на } \Gamma_0, \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n = 0 \text{ на } \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_n^2$  – квадрат безразмерной собственной частоты.

В данной статье только исследованы асимметричные колебания, т.е.  $\varphi_n(x, y, z) = \Phi_n(r, z)\cos\theta$  и  $h_n(x, y) = H_n(r)\cos\theta$ , в которых возникает переменное результирующее давление на сосуд в поперечном направлении.

После определения потенциала скоростей  $\varphi(x, y, z, t)$  можно вычислить гидродинамическую силу, действующую на стенку сосуда. Используя уравнения гидродинамики [2] для малых движений идеальной жидкости, получим гидродинамическую силу:

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\Omega, \quad (3)$$

где  $\mathbf{V} = \nabla\varphi$  – скорость жидкости.

Подставим скорость  $\mathbf{V}$  через потенциал скоростей  $\varphi$ :

$$\mathbf{F} = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{xn} s_n \mathbf{e}_1, \quad (4)$$

где  $\lambda_{xn}$  – обобщённый коэффициент гидродинамической силы:

$$\lambda_{xn} = \rho \int_{\Omega} \nabla\varphi_n d\Omega = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds. \quad (5)$$

Определим кинетическую и потенциальную энергию жидкости:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_n s_n^2, \quad \Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (g\eta_n + \sigma\kappa_n) s_n^2. \quad (6)$$

где  $\mu_n$  – обобщённая масса жидкости, а  $\eta_n$  и  $\kappa_n$  – обобщённые коэффициенты жёсткости, связанные с потенциальной энергией массовых сил и сил поверхностного натяжения соответственно:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \rho \int_{\Omega} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_n d\Omega = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds, \quad \eta_n = \rho \int_{\Gamma_0} h_n^2 r_{0s} d\Gamma = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r_{0s} r ds, \\ \kappa_n &= \int_{\Gamma_0} \left[ (\nabla_{\Gamma} h_n)^2 - (k_1^2 + k_2^2) h_n^2 \right] d\Gamma + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma = \\ &= \pi \left\{ \int_{\Gamma_0} \left[ \left( \nabla_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 - (k_1^2 + k_2^2) \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right] r ds + \left[ \chi r \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для малых колебаний жидкости в круговом цилиндре с углом смачивания  $\alpha_0 = 90^\circ$ , т.е. когда свободная поверхность плоская,  $r_{0s} = 1$  и  $k_1 = k_2 = \chi = 0$ , и выражение для потенциальной энергии жидкости глубиной  $H$  упрощается:

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \rho g \int_{\Gamma_0} h_n^2 d\Gamma + \sigma \int_{\Gamma_0} (\nabla_{\Gamma} h_n)^2 d\Gamma \right] s_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_n \frac{\xi_n}{r_2} \left( g + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\xi_n^2}{r_2^2} \right) \tanh(\xi_n H) s_n^2. \quad (8)$$

Здесь  $r_2$  означает радиус кругового цилиндра и первые два значения  $\xi_n$  соответственно равны:  $\xi_1 = 1.84$ ,  $\xi_2 = 5.33$ .

Заметим, что воздействие жидкости на стенку сосуда может быть описано с помощью набора некоторых постоянных величин  $\lambda_{xn}$ ,  $\mu_n$ ,  $\eta_n$ ,  $\kappa_n$  и обобщённой координаты  $s_n(t)$ .

### Определение параметров механического аналога

В инженерной практике часто применяют маятниковую модель или осцилляторы типа масса–пружина для моделирования движения жидкости. В данной работе механическим аналогом колебаний жидкости являются маятники со спиральной



пружиной (рис. 2). Маятник моделирует воздействие массовой силы, а воздействие силы поверхностного натяжения учитывается спиральной пружиной.

Скорость маятника  $V_n$  имеет вид:  $V_n = l_n \dot{\alpha}_n \mathbf{e}_1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

где  $l_n$  и  $\alpha_n(t)$  – длина невесомого стержня и обобщённая координата колебаний  $n$ -го маятника (см. рис. 2).

Запишем инерционную силу маятника:

$$\mathbf{F}_M = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{dV_n}{dt} = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \dot{\alpha}_n \mathbf{e}_1. \quad (9)$$

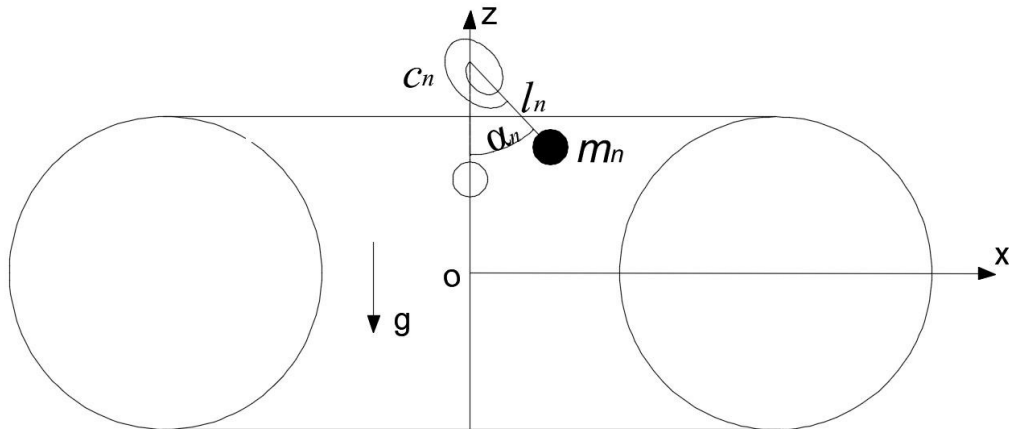


Рис. 2. Основные обозначения параметров маятниковой модели со спиральной пружиной.

Определим кинетическую и потенциальную энергию движения аналога в неподвижном сосуде:

$$T_M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_n l_n^2 \dot{\alpha}_n^2, \quad \Pi_M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (m_n g l_n + c_n) \alpha_n^2. \quad (10)$$

В дальнейшем определим параметры механического аналога из условий равенства по силе, кинетической энергии, собственным частотам капиллярной жидкости и механического аналога.

Массу маятника  $m_n$  выберем таким образом, чтобы инерционная сила аналога  $\mathbf{F}_M$  и кинетическая энергия  $T_M$  были равны гидродинамической силе  $\mathbf{F}$  и кинетической энергии жидкости  $T$  соответственно:

$$\begin{cases} m_n l_n \ddot{\alpha}_n = \lambda_{xn} \ddot{s}_n \\ \frac{1}{2} m_n l_n^2 \dot{\alpha}_n^2 = \frac{1}{2} \mu_n \dot{s}_n^2 \end{cases} \rightarrow m_n = \frac{\lambda_{xn}^2}{\mu_n}, \frac{s_n}{l_n \alpha_n} = \frac{\lambda_{xn}}{\mu_n}, n=1, 2, \dots \quad (11)$$

В дальнейшем определим длину маятника  $l_n$  и жёсткость спиральной пружины  $c_n$ . Запишем уравнения, описывающие малые колебания жидкости и маятника со спиральной пружиной, на основе уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n = 0, \quad \ddot{\alpha}_n + \omega_{Mn}^2 \alpha_n = 0, \\ \text{где } \omega_n^2 = \frac{\eta_n}{\mu_n} \left( g + \sigma \frac{\kappa_n}{\eta_n} \right), \quad \omega_{Mn}^2 = \frac{1}{l_n} \left( g + \frac{c_n}{m_n l_n} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Если выберем квадрат собственной частоты модели  $\omega_{Mn}^2$  равным квадрату собственной частоты соответствующего тона колебаний жидкости  $\omega_n^2$ , то эти два уравнения тождественны с точностью до обозначения обобщённых координат. Получим длину маятника  $l_n$  и жёсткость спиральной пружины  $c_n$ :

$$l_n = \mu_n / \eta_n, \quad c_n = \sigma m_n l_n \kappa_n / \eta_n. \quad (13)$$

Для малых колебаний жидкости в круговом цилиндре с углом смачивания  $\alpha_0 = 90^\circ$  масса  $m_n$ , длина маятника  $l_n$  и жёсткость спиральной пружины  $c_n$  имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} m_n = \frac{\lambda_{xn}^2}{\mu_n} = \rho \pi r_2^3 \frac{2 \tanh(\xi_n H)}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)}, \\ l_n = \frac{\mu_n}{\eta_n} = \frac{r_2}{\xi_n \tanh(\xi_n H)}, \quad c_n = \sigma m_n l_n \frac{\kappa_n}{\eta_n} = \sigma \pi r_2^2 \frac{2}{\xi_n^2 - 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения  $m_n$  и  $l_n$  совпадают с полученными результатами К.С. Колесникова без учёта капиллярного эффекта [4], что доказывает правильность разработанного алгоритма. Жёсткость спиральной пружины  $c_n$  уменьшается с увеличением номера  $n$  тона колебаний.

Введём радиус окружности меридиана тора  $r_2$  как характерный размер длины, и характерные значения для времени и потенциала:  $t^* = (\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$ ,  $\varphi^* = r_2^2 / t^*$ . Подставив величины  $x^p = r_2 x$ ,  $t^p = t^* t$  и  $\varphi^p = \varphi^* \varphi$ , запишем параметры механического аналога в безразмерном виде:

$$m_n = \frac{\lambda_{xn}^2}{\mu_n} = \pi \frac{\left( \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds \right)^2}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}, \quad (15)$$

$$l_n = \frac{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}{\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r_{0s} r ds}, \quad c_n = m_n l_n \frac{\int_{\Gamma_0} \left[ (\nabla_{\Gamma} h_n)^2 - (k_1^2 + k_2^2) h_n^2 \right] d\Gamma + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma}{\int_{\Gamma_0} h_n^2 r_{0s} d\Gamma},$$

Для получения их размерных значений используем следующие соотношения, здесь знак « $p$ » означает размерную величину:

$$m_n^p = \rho r_2^3 m_n, \quad l_n^p = r_2 l_n, \quad c_n^p = \sigma r_2^2 c_n. \quad (16)$$

Приведённые выражения  $l_n$  и  $c_n$  чётко показывают физическую картину колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта, однако не удобно использоваться в инженерной практике. Ниже приведены более упрощённые соотношения для безразмерных  $l_n$  и  $c_n$ .

Выполняя условие равенства собственных частот и не нарушая физической картины колебаний капиллярной жидкости, имеем:

$$\frac{1}{l_n} \left( B_0 + \frac{c_n}{m_n l_n} \right) = \omega_n^{*2} (B_0 + 1) \Rightarrow l_n = \frac{1}{\omega_n^{*2}} \text{ и } c_n = \frac{m_n}{\omega_n^{*2}}. \quad (17)$$

где  $\omega_n^{*2} = \omega_n^2 / (B_0 + 1)$ .

В выражениях параметров механического аналога обобщённый коэффициент гидродинамической силы  $\lambda_{xn}$  и обобщённая масса  $\mu_n$  зависят от функций  $\Phi_n$  и  $\partial\Phi_n/\partial n$  на свободной поверхности. Эти функции вместе с квадратом собственной частоты  $\omega_n^2$  были определены при решении задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости.

Из приведённого выше текста вытекает, что алгоритм определения параметров механического аналога малых колебаний капиллярной жидкости в любом осесимметричном сосуде состоит в следующем:

- 1). определение формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости  $z = z_0(s)$ ,  $r = r_0(s)$ ;
- 2). создание геометрической модели области жидкости и выполнение её дискретизации треугольными элементами;
- 3). решение задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости для получения функций  $\Phi_n$ ,  $\partial\Phi_n/\partial n$  и квадрата собственной частоты  $\omega_n^2$ ;
- 4). определение параметров маятников со спиральной пружиной по приведенным выражениям в данной работе.

### Обсуждение результатов

Так как в литературе отсутствуют данные о колебаниях жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации, проверка достоверности разработанного алгоритма проведена в примере сферического сосуда в таблице 1.

По сравнению с численными значениями в работе [12] видно, что квадрат собственных частот  $\omega_1^{*2}$  и длина стержня маятника  $l_1$  имеют хорошее совпадение за исключением случая большого коэффициента заполнения сосуда жидкостью  $\beta$ . Но масса колеблющейся жидкости  $m_1$  и жёсткость спиральной пружины  $c_1$  заметно отличаются от результатов в работе [12]. Если смотрим выражение жёсткости спиральной пружины, то разница между значениями  $c_1$  возникает в основном из разницы между массами  $m_1$ .

Таблица 1. Проверка достоверности алгоритма в случае сферического сосуда, где  $m = \beta 4\pi/3$  – масса жидкости и  $\beta$  – объём заполнения сосуда жидкостью.

|  | $\beta, \%$ | $\omega_1^{*2}$ |       | $m_1/m$  |       | $l_1$    |       | $c_1$    |       |
|--|-------------|-----------------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
|  |             | в статье        | [12]  | в статье | [12]  | в статье | [12]  | в статье | [12]  |
| $B_0 = 1,$<br>$\alpha_0 = 5^\circ$               | 25          | 0.566           | 0.667 | 0.564    | 0.210 | 1.768    | 1.498 | 1.059    | 0.330 |
|  | 50          | 0.638           | 0.706 | 0.387    | 0.200 | 1.567    | 1.416 | 1.270    | 0.593 |
|  | 78          | 0.775           | 1.013 | 0.168    | 0.130 | 1.290    | 0.988 | 0.743    | 0.419 |
| $B_0 = 2,$<br>$\alpha_0 = 5^\circ$               | 25          | 0.762           | 0.738 | 0.648    | 0.308 | 1.313    | 1.356 | 0.755    | 0.437 |
|  | 50          | 0.858           | 0.816 | 0.415    | 0.250 | 1.165    | 1.226 | 1.012    | 0.642 |
|  | 78          | 1.020           | 1.221 | 0.175    | 0.168 | 0.981    | 0.820 | 0.587    | 0.450 |
| $B_0 = \infty,$<br>$\alpha_0 = 5^\circ,$<br>[21] | 25          | 1.299           |       | 0.745    |       | 0.770    |       | 0.601    |       |
|  | 50          | 1.573           |       | 0.580    |       | 0.636    |       | 0.772    |       |
|  | 78          | 2.193           |       | 0.350    |       | 0.456    |       | 0.521    |       |

В таблице 1 также приведены экспериментальные результаты параметров механического аналога жидкости в наземных условиях ( $g = g_0$ ) [21]. Так как в условиях микрогравитации равновесная поверхность искривлена и больше жидкости смачиваема на твердой стенке сосуда, то меньше жидкости колеблется и с уменьшением числа Бонда  $B_0$  значение  $m_1$  уменьшается. Заметим, что в работе [12] масса колеблющейся жидкости слишком мала, по сравнению с них полученные результаты в данной статье более достоверны.

В тороидальном сосуде больше жидкости участвует в колебаниях при объёме заполнения сосуда жидкостью  $\beta = 40\% \sim 90\%$  [15]. В таблицах 2 и 3 приведены параметры механического аналога малых колебаний жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации.

Таблица 2. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при условиях  $\beta = 50\%$ ,  $r_1 = 1.868$ ,  $\alpha_0 = 5^\circ$ ,  $m = 18.436$ ,

| $B_0$           | $\omega_1^{*2}$ | $m_1/m$ | $l_1$ | $c_1$ |
|-----------------|-----------------|---------|-------|-------|
| 3               | 0.101           | 0.581   | 9.916 | 106.2 |
| 4               | 0.122           | 0.591   | 8.205 | 89.41 |
| 5               | 0.138           | 0.595   | 7.245 | 79.46 |
| 6               | 0.151           | 0.604   | 6.606 | 73.60 |
| $\infty$ , [15] | 0.226           | 0.643   | 4.425 | 52.45 |

Таблица 3. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при условиях  $\beta = 80\%$ ,  $r_1 = 1.868$ ,  $\alpha_0 = 5^\circ$ ,  $m = 29.498$ ,

| $B_0$           | $\omega_1^{*2}$ | $m_1/m$ | $l_1$ | $c_1$ |
|-----------------|-----------------|---------|-------|-------|
| 5               | 0.072           | 0.458   | 13.93 | 189.2 |
| 6               | 0.110           | 0.467   | 9.085 | 125.9 |
| 8               | 0.167           | 0.477   | 5.983 | 84.66 |
| 10              | 0.210           | 0.482   | 4.769 | 68.18 |
| $\infty$ , [15] | 0.406           | 0.625   | 2.463 | 45.66 |

С увеличением числа Бонда  $B_0$  квадрат собственной частоты  $\omega_1^{*2}$  и масса колеблющейся жидкости основного тона  $m_1$  увеличиваются, а длина стержня  $l_1$  и жёсткость спиральной пружины  $c_1$  уменьшаются. При этом эти параметры приближаются к значениям, экспериментально полученным для тяжёлой жидкости в наземных условиях [15].

### Заключение

В настоящей работе численно определены параметры механического аналога малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации. В отличие от механической модели для тяжёлой жидкости в данной статье добавлена спиральная пружина для моделирования воздействия сил поверхностного натяжения. Проверка достоверности разработанного алгоритма проведена в примере сферического сосуда. С увеличением числа Бонда полученные результаты параметров колебаний капиллярной жидкости в тороидальных сосудах сходятся с экспериментальными значениями для жидкости, находящейся в наземных условиях.

## Список источников

1. Abramson H.N. The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers, NASA SP-106, 1966, 467 p.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. - М.: Наука, 1965. – 272 с.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Колесников К.С. Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 2003. – 520 с.
5. Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В. Продольные волны в соосных упругих оболочках с учетом конструкционного демпфирования и с жидкостью внутри // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122230>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-04).
6. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159785>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08).
7. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. - Киев: Наукова Думка, 1992. – 592 с.
8. Dodge F.T. The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers", NASA SP-106, 2000, 202 p.



9. Concus P., Grane G.E., Satterlee H.M. Small amplitude lateral sloshing in spheroidal containers under low gravitational conditions, NASA CR-72500, 1969, 137 p.
10. Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank // Journal of Applied Mechanics, 1970, vol. 37, no. 3, pp. 828-837. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3408616>.
11. Dodge F.T., Kana D.D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks // Journal of fluids engineering, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 58-63. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3242617>.
12. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. Fluid management technology: liquid slosh dynamics and control, NASA CR-189107, 1991, 198 p.
13. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing during draining // Acta Astronautica, 2011, vol. 68, issues 1-2, pp. 91-100. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2010.06.052>.
14. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing in non-axisymmetric tanks // Journal of Astronautics, 2011, vol. 32, no. 2, pp. 242-249.
15. Meserole J.S., Fortini A. Slosh dynamics in a toroidal tank // Journal of Spacecraft and Rockets, 1987, vol. 24, no. 6, pp. 523-531. URL: <https://doi.org/10.2514/3.25948>.
16. Takahara H., Kimula K. Frequency response of sloshing in an annular cylindrical tank subjected to pitching excitation // Journal of Sound and Vibration, 2012, vol. 331, issues 13, pp. 3199-3212. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.02.023>.

17. Wang W., Peng Y., Zhang Q., Ren L., Jiang Y. Sloshing of liquid in partially liquid filled toroidal tank with various baffles under lateral excitation // *Ocean Engineering*, 2017, vol. 146, pp. 434-456. URL: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.09.032>.
18. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2021. № 3. С. 1-11. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>.
19. Юй Чжаокай. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом капиллярного эффекта // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 78. С. 151-165.
20. Bathe K.J. *Finite element procedures*. 2nd edition, Waterton, 2014, 1065 p.
21. Sumner I.E. Experimentally determined pendulum analogy of liquid sloshing in spherical and oblate-spheroidal tanks, NASA TN-2737, 1965, 34 p.

## References

1. Abramson H.N. *The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers*, NASA SP-106, 1966, 467 p.
2. Moiseev N.N., Rummyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Dynamics of a body with cavities containing fluid), Moscow, Nauka, 1965, 272 p.
3. Mikishev G.N. *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* (Experimental methods in the dynamics of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 247 p.

4. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* (Rocket dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 520 p.
5. Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122230>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-04).
6. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08)
7. Myshkis A.D., Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya uslovii nevesomosti* (Methods for solving the problem of hydromechanics for weightlessness conditions), Kiev, Naukova Dumka, 1992, 592 p.
8. Dodge F.T. *The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers"*, NASA SP-106, 2000, 202 p.
9. Concus P., Grane G.E., Satterlee H.M. *Small amplitude lateral sloshing in spheroidal containers under low gravitational conditions*, NASA CR-72500, 1969, 137 p.
10. Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank, *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, no. 3, pp. 828-837. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3408616>.
11. Dodge F.T., Kana D.D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks, *Journal of fluids engineering*, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 58-63. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3242617>.

12. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. *Fluid management technology: liquid slosh dynamics and control*, NASA CR-189107, 1991, 198 p.
13. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing during draining, *Acta Astronautica*, 2011, vol. 68, issues 1-2, pp. 91-100. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2010.06.052>.
14. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing in non-axisymmetric tanks, *Journal of Astronautics*, 2011, vol. 32, no. 2, pp. 242-249.
15. Meserole J.S., Fortini A. Slosh dynamics in a toroidal tank, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1987, vol. 24, no. 6, pp. 523-531. URL: <https://doi.org/10.2514/3.25948>.
16. Takahara H., Kimula K. Frequency response of sloshing in an annular cylindrical tank subjected to pitching excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, issues 13, pp. 3199-3212. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.02.023>.
17. Wang W., Peng Y., Zhang Q., Ren L., Jiang Y. Sloshing of liquid in partially liquid filled toroidal tank with various baffles under lateral excitation, *Ocean Engineering*, 2017, vol. 146, pp. 434-456. URL: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.09.032>.
18. Yui Chzhaokai, Temnov A.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2021, no. 3, pp. 1-11. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>.
19. Yui Chzhaokai. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2022, no 78, pp. 151-165.
20. Bathe K.J. *Finite element procedures*. 2nd edition, Waterton, 2014, 1065 p.
21. Sumner I.E. *Experimentally determined pendulum analogy of liquid sloshing in spherical and oblate-spheroidal tanks*, NASA TN-2737, 1965, 34 p.

Статья поступила в редакцию 05.07.2022

Статья после доработки 10.07.2022

Одобрена после рецензирования 04.09.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 05.07.2022; approved after reviewing on 04.09.2022; accepted for publication on 12.10.2022