УДК 533.6.071.08

Метод термодинамических функций для исследования электромагнитной подвески моделей летательных аппаратов

Вышков Ю. Д.

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail:yuvyshkov@mail.ru

Аннотация

В системе электромагнитной подвески моделей летательных аппаратов в аэродинамической трубе, обеспечивающей стабилизацию положения модели по шести пространственным координатам, возникают известные трудности анализа на основе уравнений механического движения и уравнений Максвелла. В настоящей статье анализ взаимодействия между механической и электрической частями системы подвески проводится на основе общих энергетических соотношений – уравнений энергетического состояния, определяющих это состояние через энергетические функции от переменных состояния системы. В результате получены соотношения, определяющие связи между различными статическими характеристиками рассматриваемых систем, что позволяет находить характеристики, не поддающиеся измерению, по характеристикам, измерение которых не вызывает затруднений. Из полученных соотношений определены условия, предъявляемые к регулятору системы электромагнитной подвески при

необходимости стабилизации многих пространственных координат модели летательного аппарата в аэродинамической трубе.

Ключевые слова: аэродинамическая труба, электромагнитная подвеска, модель летательного аппарата, метод функций энергетического состояния

Введение

Система электромагнитной подвески включает в себя подсистемы различной физической природы – электрическую и механическую. Взаимодействие двух подсистем такого рода происходит и в электромеханических системах другого вида.

Связи и взаимодействие между механическими и электрическими переменными в системе электромагнитной подвески в аэродинамической трубе [1] определяются уравнениями механики и уравнениями электромагнитного поля. Трудности установления соотношений между переменными на основании этих уравнений обусловлены тем, что входящие в уравнения электромагнитные характеристики вещества – магнитная и диэлектрическая проницаемости, удельная проводимость, – зависят от плотности энергии в веществе, причём эти зависимости не поддаются теоретическому расчёту, а экспериментальные характеристики могут быть получены лишь в простейших случаях. При сложной конфигурации электромагнитной системы реального устройства электромагнитной подвески модели летательного аппарата в аэродинамической трубе возникают и серьёзные математические трудности.

Многокомпонентная система электромагнитной подвески

В настоящей работе связи между механическими и электрическими переменными в системе электромагнитной подвески моделей летательных аппаратов в аэродинамической трубе устанавливаются из общих энергетических принципов.

В основу положено уравнение энергетического баланса в дифференциальной форме

$$dU = \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k\,, (1)$$

где U - энергия системы, $P_к$, X_k - пара величин, характеризующая определённое взаимодействие.

Метод анализа электромеханических систем, названный методом функций энергетического состояния, состоит в том, что на основании закона сохранения энергии в дифференциальной форме вводятся функции энергетического состояния электромеханических систем и из условия существования полных дифференциалов этих функций устанавливаются общие соотношения между изменениями переменных состояния и энергетических функций.

Полагаем, что сила F_k направлена по координате Y_k и вызывает изменение этой координаты dY_k за интервал времени *dt.* Уравнение баланса энергии системы в дифференциальной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k\, I_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} I_k^2\, R_k dt \; + \; dW + \; \sum_{k=1}^{n} F_k\, dY_k \; (2)$$

где U_k, I_k – напряжение и ток k - го электромагнита, R_k – сопротивление обмотки k - го электромагнита, W - магнитная энергия – функция состояния многокомпонентной системы электромагнитной подвески

Уравнение обмотки k - го электромагнита

$$\frac{d\psi_k}{dt} + R_k I_k = U_k \,. \quad (3)$$

Согласно (3) имеем для обмоток всех электромагнитов системы:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k I_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} I_k^2\, R_k dt \; + \; \sum_{k=1}^{n} I_k\, d\psi_k. \quad (4)$$

Сравнивая (2) и (4), получаем уравнение энергетического баланса рассматриваемой многокомпонентной системы электромагнитного подвеса в виде дифференциала магнитной энергии $W = W\,(\psi_1 , \psi_2 , \ldots \psi_n , Y_1 , Y_2 , \ldots Y_n)$:

$$dW = \sum_{k=1}^{n} I_k\, d\psi_k \; - \sum_{k=1}^{n} F_k\, dY_k \,. \quad (5)$$

Применяя к функции состояния W преобразование Лежандра, получаем другие функции энергетического состояния рассматриваемой системы:

$$H_э = W + \sum_{k=1}^{n} F_k Y_k \;; \quad (6)$$

$$H_{св} = W - \sum_{k=1}^{n} I_k \psi_k \;; \quad (7)$$

$$G_э = H_{св} + \sum_{k=1}^{n} F_k Y_k \,. \quad (8)$$

Функции (6), (7), (8) - электромеханические аналоги термодинамических функций энергетического состояния: энтальпии $H_э$, свободной энергии $H_{св}$, энергии Гиббса $G_э$.

Полные дифференциалы функций состояния (6), (7), (8):

$$d\,H_{э} = \sum_{k=1}^{n} I_k\, d\psi_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, dF_k\ ; (9)$$

$$d\,H_{св} = - \sum_{k=1}^{n} \psi_k\, dI_k + \sum_{k=1}^{n} F_k\, dY_k\ ; (10)$$

$$d\,G_{э} = - \sum_{k=1}^{n} \psi_k\, dI_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k\, dF_k\ . (11)$$

Переменные состояния многокомпонентных электромеханических систем, в частности, многокомпонентной системы электромагнитной подвески, выражаются через частные производные функций состояния:

$$I_k = \frac{\partial W}{\partial \psi_k},\ F_k = -\frac{\partial W}{\partial Y_k},\ I_k = \frac{\partial H_{э}}{\partial \psi_k},\ Y_k = \frac{\partial H_{э}}{\partial F_k},\ (12)$$

$$\psi_k = -\frac{\partial H_{св}}{\partial I_k},\ F_k = -\frac{\partial H_{св}}{\partial Y_k},\ \psi_k = -\frac{\partial G_{э}}{\partial I_k},\ Y_k = \frac{\partial G_{э}}{\partial F_k}.$$

Имея в виду, что вторые смешанные частные производные функций состояния не зависят от последовательности дифференцирования, устанавливаем из (12) соотношения взаимности для многокомпонентных электромеханических систем, в частности, для системы электромагнитной подвески в аэродинамической трубе, обеспечивающей стабилизацию шести степеней свободы подвешиваемой модели

$$\frac{\partial I_k}{\partial Y_l} = -\frac{\partial F_l}{\partial \psi_k};\ \frac{\partial I_k}{\partial \psi_l} = \frac{\partial Y_l}{\partial \psi_k};\ (13)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial Y_l} = -\frac{\partial F_l}{\partial I_k};\ \frac{\partial \psi_k}{\partial F_l} = -\frac{\partial Y_l}{\partial I_k};$$

Получим необходимое условие устойчивость для многокомпонентной системы электромагнитной подвески. Сила i – го электромагнита является функцией многих переменных

$F_i = F_i\ (Y_1\ , Y_2\ , \ldots Y_n\ \ , I_1 , I_2 , \ldots I_n\ )$ (14)

Дифференциал F_i

$$dF_i = \frac{\partial F_i}{\partial Y_1} dY_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial Y_n} dY_n\ + \frac{\partial F_i}{\partial I_1} dI_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial I_n} dI_n \ (15)$$

Делим (15) на dY_i:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_i} = \frac{\partial F_i}{\partial Y_1}\frac{dY_1}{dY_i} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\ + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial Y_n}\frac{dY_n}{dY_i} + \frac{\partial F_i}{\partial I_1}\frac{dI_1}{dY_i} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial I_i}\frac{dI_i}{dY_i} \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial I_n}\frac{dI_n}{dY_i} \ (16)$$

Полагаем, что изменяется только $Y_{i\,,}$ а все прочие координаты постоянны. Полагаем, кроме того, что ток i - го электромагнита изменяется регулятором только при изменении $Y_{i\,,}$ тогда как все токи, кроме I_i, постоянны. В этом случае (16) запишется

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_i} = \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\ +\ \frac{\partial F_i}{\partial I_i}\frac{dI_i}{dY_i} \ (17)$$

Поскольку необходимым условием устойчивости электромагнитной подвески является $\frac{\partial F_i}{\partial Y_i} > 0$, то из (17) вытекает требование к регулятору многокомпонентной системы электромагнитной подвески:

$$\frac{dI_i}{dY_i}\ > -\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\cdot\frac{\partial I_i}{\partial F_i} \ (18)$$

Система электромагнитной подвески с одним электромагнитом

Применим полученные результаты к простейшему частному случаю системы электромагнитной подвески с одним электромагнитом, сила которого удерживает ферромагнитное тело при воздействии силы тяжести (рис. 1).

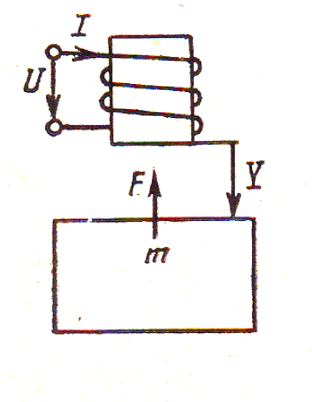

Рис. 1. Система электромагнитной подвески с одним электромагнитом

Уравнение энергетического баланса системы подвески с одним электромагнитом

$Id\psi = dW + FdY$ (19)

где ψ – потокосцепление , W – магнитная энергия.

Уравнение (19) аналогично известному в термодинамике уравнению [2]

$TdS = dU_{\text{вн}} + PdV$ (20)

где T – температура, S - энтропия, $U_{вн}$ – *внутренняя* энергия, P - давление, V – объём.

Энергетические функции состояния системы с одним электромагнитом:

энтальпия

$H_{\text{э}} = W + FY$; (21)

свободная энергия

$H_{\text{св}} = W - I\,\psi$; (22)

энергия Гиббса

$G_Э = H_{св} + FY = W - I\,\psi + FY$; (23)

Магнитная энергия системы с одним электромагнитом может рассматриваться

как функция двух переменных состояния : ψ, Y; энтальпия – как функция ψ, F; свободная энергия – как функция ψ, F; энергия Гиббса – как функция I, F :

$W = W(\psi, Y)$; $H_Э = H_Э(\psi, F)$; $H_{св} = H_{св}(\psi, F)$; $G_Э = G_Э(I, F)$. (24)

Уравнения (24) представляют собой уравнения состояния. Полные дифференциалы функций (24) :

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)_Y d\psi + \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_\psi dY\,;\ dH_Э = \left(\frac{\partial H_Э}{\partial \psi}\right)_F d\psi + \left(\frac{\partial H_Э}{\partial F}\right)_\psi dY\,;\ (25)$$

$$dH_{СВ} = \left(\frac{\partial H_{СВ}}{\partial I}\right)_Y dI + \left(\frac{\partial H_{СВ}}{\partial Y}\right)_I dY\,;\ dG_Э = \left(\frac{\partial G_Э}{\partial I}\right)_F dI + \left(\frac{\partial G_Э}{\partial F}\right)_I dF.$$

Сопоставление (25) с выражениями для дифференциалов, получаемых из (19) – (25), позволяет выразить переменные состояния через частные производные энергетических функций состояния:

$$I = \left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)_Y;\ F = -\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_\psi;\ I = \left(\frac{\partial H_Э}{\partial \psi}\right)_F;\ Y = \left(\frac{\partial H_Э}{\partial F}\right)_\psi;\ (26)$$

$$F = -\left(\frac{\partial H_{СВ}}{\partial Y}\right)_I;\ \psi = -\left(\frac{\partial H_{СВ}}{\partial I}\right)_Y;\ \psi = -\left(\frac{\partial G_Э}{\partial I}\right)_F;\ Y = \left(\frac{\partial G_Э}{\partial F}\right)_I.$$

Следствием полученных соотношений являются уравнения

$$W = H_{св} + I\left(\frac{\partial H_{СВ}}{\partial I}\right)_Y;\ H_{св} = G_Э - I\left(\frac{\partial G_Э}{\partial I}\right)_F,\ (27)$$

аналогичные известным в термодинамике уравнениям Гиббса – Гельмгольца [3].

Первое из уравнений (27) определяет магнитную энергию, второе определяет суммарную энергию системы в равновесном состоянии – магнитную и потенциальную энергию подвешиваемого тела в поле электромагнитной силы.

Поскольку значения смешанных вторых частных производных функций (24) не зависят от последовательности дифференцирования, из (26) имеем:

$$-\left(\frac{\partial I}{\partial Y}\right)_{\psi} = \left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)_{Y}; \left(\frac{\partial I}{\partial F}\right)_{\psi} = \left(\frac{\partial Y}{\partial \psi}\right)_{Y}; (28)$$

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial Y}\right)_{I} = \left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_{Y}; -\left(\frac{\partial \psi}{\partial F}\right)_{I} = \left(\frac{\partial Y}{\partial I}\right)_{F}.$$

Соотношения (26) позволяют выражать одни характеристики через другие, что может быть использовано при проектировании и исследовании систем электромагнитной подвески. Дело в том, что зависимости электромагнитной силы от тока и пространственных координат доступны для измерения, в то время как измерение зависимости потокосцепления от тока и пространственных координат весьма затруднительно, особенно для многокомпонентных электромагнитных подвесов с несколькими электромагнитами при сложной конфигурации магнитного поля, как в системе подвески модели в аэродинамической трубе.

Для системы с одним электромагнитом связь между переменными состояния F, Y, I устанавливается уравнением состояния

$f(F, Y, I) = 0.$ (29)

Если известно уравнение состояния, то для полного определения состояния системы электромагнитной подвески достаточно знать две переменные состояния из трёх – каждая переменная может быть представлена как функция двух других:

$F = F(Y, I)$, $I = I(F, Y)$, $Y = Y(F, I)$. (30)

Если функции (30) непрерывны и однозначны, их полные дифференциалы

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_Y dI + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I dY; \quad (31)$$

$$dI = \left(\frac{\partial I}{\partial I}\right)_Y dF + \left(\frac{\partial I}{\partial Y}\right)_F dY; \quad (32)$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial F}\right)_I dF + \left(\frac{\partial Y}{\partial I}\right)_F dI. \quad (33)$$

Шесть частных производных в выражениях полных дифференциалов являются величинами взаимно-обратными:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial F}\right)_I = 1; \left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_Y \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial F}\right)_Y = 1; \left(\frac{\partial I}{\partial Y}\right)_F \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial I}\right)_F = 1; \quad (34)$$

Как следует из (34) независимыми являются не более трёх из шести частных производных.

Рассмотрим следующие три частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I$, $\left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_Y$, $\left(\frac{\partial I}{\partial Y}\right)_F$ и покажем, что независимыми являются две из них; каждая из этих производных может быть представлена как функция двух других. Из выражения (31) следует:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_Y \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial Y}\right)_F \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial F}\right)_I = -1; \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial I}\right)_F \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial F}\right)_Y = -1 \quad (35)$$

Уравнения (35) представляют собой дифференциальные уравнения системы электромагнитной подвески с одним электромагнитом, как и любой другой подобной электромеханической системы.

Для системы электромагнитной подвески из выражения (31) можно получить необходимое условие устойчивости. Деля (31) на dY , получаем

$$\frac{dF}{dY} = \left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_Y \frac{dI}{dY} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I > 0, (36)$$

откуда вытекает необходимое требование к однокомпонентному регулятору

$$\frac{dI}{dY} > -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_I \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial F}\right)_Y, (37)$$

аналогичное условию (18), частным случаем которого (37) и является.

Выводы

Применение метода термодинамических функций для анализа многокомпонентных систем электромагнитной подвески позволило получить:

1. Функции энергетического состояния многокомпонентных электромеханических систем, которые дали возможность установить соотношения (13), определяющие связи между различными статическими характеристиками таких систем, что позволяет находить характеристики, трудно поддающиеся измерению, по характеристикам, измерение которых не вызывает затруднений.

2. Уравнения для систем электромагнитной подвески с одним электромагнитом (27), устанавливающие соотношения между энергетическими

функциями состояния и аналогичные термодинамическим уравнениям Гиббса – Гельмгольца.

3. Соотношения (28) (за исключением известного первого из этих соотношений [2]), устанавливающие связи между статическими характеристиками системы электромагнитного подвеса с одним электромагнитом.

4. Условия, предъявляемые к регулятору системы электромагнитной подвески при необходимости стабилизации многих пространственных координат.

Библиографический список

1.Вышков Ю.Д., Ковальногов С.А., Усачёв В.Н., Шаповалов Г.К. Опытная установка электромагнитной подвески модели в дозвуковой аэродинамической трубе. Учёные записки ЦАГИ, 1986, т. XVII, № 4, с. 94 – 97.

2.Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1978. – 552 с.

3.Ленк А. Электромеханические системы. – М.: Мир, 1978. – 285 с.