УДК-517.977

Сравнение с помощью теории массового обслуживания безприоритетной и приоритетной систем управления заходом самолетов на посадку

Тин Пхон Чжо

Аннотация

Рассмотрена многоканальная система приоритетного обслуживания самолетов при их заходе на посадку. Показана возможность выбора длины очереди при входе на заданную линию пути при допустимой вероятности отказа в обслуживании.

Ключевые слова: система массового обслуживания; контроль безопасности; оптимальное управление; летательные аппараты.

Введение

При управлении воздушным движением пассажирских самолетов при их заходе на посадку возникает ряд непредвиденных обстоятельств, таких как внезапное изменение направления ветра, превышение нормы по расходу топлива и другое, когда для избегания аварийной ситуации на борту, некоторые самолеты нужно сажать вне очереди на нужную полосу. Это указывает на вероятностный характер обслуживания самолетов в воздухе.

В данной работе предложена новая методика расчета приоритетной системы массового обслуживания (СМО), которая позволяет определить полную группу вероятностных состояний многоканальной СМО с ожиданием в очереди.

Существуют стандартные маршруты для прилета, позволяющие значительно снизить необходимость в применении упомянутого метода формирования очереди на посадку — это схемы типа «Тромбон». В этом случае приходится обслуживать суда, образующие очередь при входе в эшелон, соответствующие заданной линии пути. Длина очереди обычно ограничена из-за ограниченной области маневрирования, называемой тромбоном.

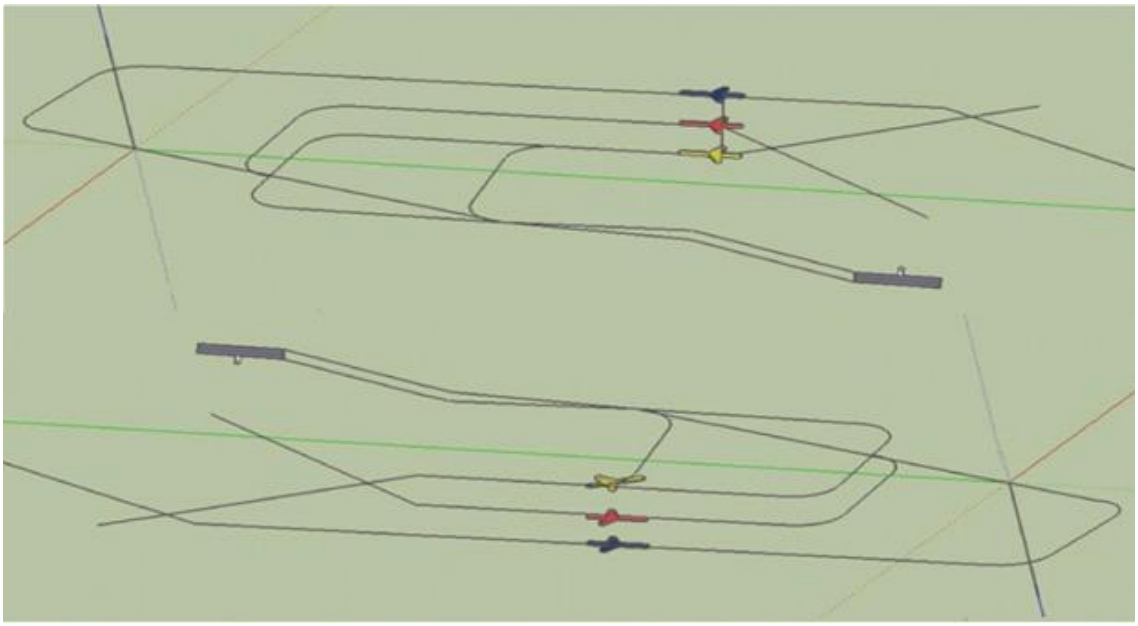

Рис.1. Схема захода на посадку по двум линиям пути с помощью тромбонов

Случай бесприоритеного обслуживания самолетов, попавших в очередь

Вначале разберем многоканальную систему бесприоритетного обслуживания с очередью, также число мест в очереди примем равным максимальным числу самолетов, уже летящих в эшелоне. Это число обозначим через (n).

В начале поступаем канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток неприоритетных заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания (для одного канала) μ; число местn ;

Состояние системы будем нумеровать по числу заявок, связанных с системой:

X_0 – оба каналы свободны, система свободна от каналов

$X_{1,0}$ - в системе обслуживается одна заявка

$X_{2,0}$ - в системе обслуживается 2 заявки

$X_{n,0}$ – в системе обслуживается n заявки и все n канала заняты

$X_{n,1}$ – заняты все n канала и одна заявка стоит в очереди

$X_{n,2}$ – заняты все n канала, и 2 заявки стоят в очереди

$X_{n,n}$- заняты все n канала и n стоят в очереди, т.е. и в очереди мест нет.

Поток заявок переводится с интенсивностью λ, а поток обслуживания с интенсивностью, равной μ, умноженной на число занятых каналов:

Напишем выражения для предельных вероятностей состояний, сразу же обозначая $\lambda/\mu = \rho$:

$$P_0 = [1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho/n - \rho/n^{m+1}}{1 - \rho/n}]^{-1}$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!}P_0$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\rho^n}{n * n!}P_0$$

$$P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 * n!}P_0$$

$$P_{n+n} = \frac{\rho^{n+n}}{n^n * n!}P_0 \qquad (1)$$

Подставляя заданное нам значение коэффициента загрузки, например равного ρ=0.7для n каналов с длиной очереди n, мы получим:

$$P_0 = [1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho/n - \rho/n^{m+1}}{1 - \rho/n}]^{-1} = \frac{1}{1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^3}{3!}\frac{0.7/3 - 0.7/3^{3+1}}{1 - 0.7/3}}$$

$$= 0.495$$

Подставляя P_0 в формулу (1), мы можем получить остальные вероятностные состояния n канальной СМО с ожиданием, в том числе интересующие нас верояность отказа P_{n+n}

$$P_{n+n} = \frac{\rho^{n+n}}{n^3 * n!}P_0 \qquad (2)$$

Теперь можно построить график зависимости вероятности отказа от числа каналов.

Рис. 1 . Зависимость вероятности отказа от числа каналов в бесприоритетном обслуживании

В заключение нужно подчеркнуть, что данные формулы для бесприоритетного обслуживания известны в общем виде формул Эрланга, но они приведены для методического анализа и получения новых формул, приведенных ниже для приоритетного обслуживания и сравнения их друг с другом.

Случай приоритетного обслуживания с ожиданием для n=2 без наличия очереди

Приступим теперь к написанию формул для приоритетных СМО n>1. Рассмотрим частный, но типичноый случай для n=2 без очереди :

При нахождении формул вероятностного состояния СМО будем исходить из следующих положений.

1. Формируется полная группа событий, сумма вероятностей которых равна 1.
2. Вносится специальное обозначение для этих вероятностей

   - для бесприоритетных заявок - $P_i(t)$

   - для приоритетных заявок - вероятность того, что в системе присутствует важная заявка - $\xi_i(t)$, а вероятность того, что в системе обыкновенная заявка - $Z_i(t)$

3. Составляется разностное уравнение, а потом дифференциальное уравнение перехода из одного состояния в соседнее при L=n.

x_0 – система свободна от заявок;

$x_{1,0}$ – в системе обслуживается одна простая заявка;

$x_{2,0}$ – в системе обслуживаются две заявки, т.е. все каналы заняты;

$x_{0,1}$ – в канале обслуживается одна важная заявка;

$x_{1,1}$ – в канале обслуживается одна важная заявка, а другая простая.

При рассмотрении ситуации с очередями нужно иметь ввиду, когда все каналы заняты простыми заявками :

$x_{2,0,1,0}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, а в очереди стоит одна простая заявка;

$x_{2,0,2,0}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, и в очереди стоят две; простые заявки

$X_{2,0,0,1}$ – в канале обслуживаются две простые заявки, а в очереди стоит одна важная;

$X_{2,0,1,1}$ - канал занят простыми заявками, а в очереди стоят одна важная ,одна простая.

Рассмотрим состояние, когда в канале обслуживается одна важная заявка. Тогда в очереди не должно быть ни одной важной заявки, потому что в системе может присутствовать только одна заявка : либо в канале, либо в очереди. Поэтому для двухканальной системы n=2 с ожиданием получаются следующие вероятности состояний при l=n:

$X_{1,1,1,0}$ – в системе обслуживается одна важная и одна простая заявки, а в очереди стоит одна простая заявка;

$X_{1,1,2,0}$ - в системе обслуживается одна важная и одна простая заявки, а в очереди стоят две простые.

Приступим к составлению уравнений вероятностного перехода с одного состояния в другое. Очевидно, что эти состояния должны быть соседними, т.е. они отличаются на одну заявку , больше или меньше (в канале или в очереди).

Расчет вероятности начнем с оценки вероятности P_0 того, что система свободна в следующий момент (k+1),пользуясь формулами имеющимися в [1,2] можно изобразить следующую схему.

$$P_0(k+1) \begin{cases} \rightarrow P_0(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t] \\ \rightarrow P_{1,0}\nu\,\Delta t \\ \rightarrow P_{1,1}\nu\,\Delta t \end{cases}$$

В этой схеме есть 3 слагаемых:

-первое слагаемое – состояние, когда ни одна заявка не пришла в систему;

-второе слагаемое – состояние, когда в канале имеется обычная заявка, и она успела обслужиться за время Δt;

-третье слагаемое – состояние, когда в канале имеется важная заявка и она успела обслужиться.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. обслуживания простой заявки в канале

$$P_{1,0}(k+1) \begin{cases} \rightarrow P_{1,0}\,(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\Delta t] \\ \rightarrow P_0\,\lambda_2\,\Delta t \\ \rightarrow P_{\,1+1,0}[(\nu+\mu)\Delta t] \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как была одна простая заявка, так и осталась в момент времени к;

- второе слагаемое- описывает, когда в систему пришла обычная заявка;

-третье слагаемое – вероятность того, что заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{2,0}$ т.е. обслуживания двух простых заявок в канале

$$P_{2,0}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{2,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu)\Delta t] \\ \rightarrow P_1 \lambda_2 \Delta t \\ \searrow P_{2,0+1,0}[(\nu+2\mu)\Delta t] \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как были две простые заявки так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в систему пришла обычная заявка, т.е. была одна простая пришла еще одна;

-третье слагаемое – вероятность того, что одна из двух простых заявок в системе обслужилась, и из очереди пришла новая простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,1}$ т.е. обслуживание важной заявки в канале

$$P_{0,1}(k+1) \begin{cases} \nearrow P_{0,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\Delta t] \\ \rightarrow P_0 \lambda_1 \Delta t \\ \rightarrow P_{1+0,1}(\nu+\mu)\Delta t \\ \searrow P_{0,1+0,1}(\nu+\mu)\Delta t \end{cases}$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как была одна важная заявка так и осталась в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в систему пришла важная заявка;

-третье слагаемое – вероятность того что простая заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка;

-четвертое слагаемое – вероятность того что важная заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка.

Последние два можно объединить и записать как $P_{1+0,1}(\nu+\mu)\Delta t$, т.е. обслужилась одна любая заявка, а пришла с очереди важная

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1}$ т.е. обслуживание важной и простой заявок в канале

$P_{1,1}$ (k)[1-(λ_1+ λ_2+2μ)Δt]

$P_{1,1}$(k+1)

P_0 λ_1 Δt

P_0 λ_2 Δt

$P_{0,1+0,1}$(ν+μ) Δt

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в систему и ни одна не обслужилась, т.е. как были одна важная заявка и одна простая так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое - описывает, когда в систему поступила важная заявка и когда в канале уже имелась простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда в канал поступила простая заявка, когда в канале уже имелась обычная заявка;

-четвертое слагаемое – вероятность того, что важная заявка в системе обслужилась и из очереди пришла новая важная заявка.

Случай приоритетного обслуживания при наличии очереди

Теперь рассмотрим вероятностные состояния в очереди:

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,0}$ т.е. канал занят заявками, а в очереди нет ни одной заявки.

Для начала рассмотрим очередь, когда система занята только простыми заявками $P_{2,0,x,y}$
Для удобства мы опустим первые два индекса , так как они указывают на состояние в канале ,а мы рассматриваем очередь, то примем что ниже используемые два индекса x,y ($P_{2,0,x,y}$) – это состояние в очереди

$P_{0,0}$ (k)[1-(λ_1+ λ_2+2μ+sν)Δt]

$P_{0,0}$(k+1) $P_{1,0}$ (2μ+(s+1)) Δt

$P_{0,1}$ (2μ+(s+1)) Δt

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок, так и осталось в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок и из очереди пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась одна из простых заявок, и из очереди пришла одна важная заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди одна простая заявка:

$P_{1,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t]$

$P_{1,0}(k+1)$ $\quad P_0\,(2\mu+(s+1))\,\Delta t$

$P_{1+1,0}\,(2\mu+(s+1))\,\Delta t$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок и в очереди одна простая заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла простая заявка и сразу же пришла одна простая заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{2,0}$ т.е. канал занят простыми заявками, и очередь занята простыми заявками:

$P_{2,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t]$

$P_{2,0}(k+1)$ $\quad P_1\,\lambda_2\,\Delta t$

$P_{2+1,0}(2\mu+(s+1))\,\Delta t$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания две простые заявки, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое - описывает когда в очередь пришла одна простая заявка, т.е была одна и пришла вторая простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла простая заявка и на место ее пришла новая простая заявка;

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{0,1}$ т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди есть одна важная заявка:

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow & P_{0,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\
P_{0,1}(k+1) & \rightarrow & P_0\,\lambda_1\,\Delta t \\
 & \searrow & P_{1+1,0}\,(2\mu+(s+1))\ \Delta t
\end{array}
$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания два простых заявок и в очереди одна важная заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна важная заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из очереди ушла заявка и сразу же пришла одна важная заявка.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1}$, т.е. канал занят простыми заявками, а в очереди есть одна важная и одна простая заявки:

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow & P_{1,1}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t] \\
P_{1,1}(k+1) & \rightarrow & P_0\,\lambda_1\,\Delta t \\
 & \rightarrow & P_0\,\lambda_2\,\Delta t \\
 & \searrow & P_{1,0+1,0}(\nu+\mu)\ \Delta t
\end{array}
$$

-первое слагаемое – описывает состояние, когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась, т.е. как были одна важная заявка и одна простая заявки в очереди, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь поступила важная заявка, когда в очереди уже имелась простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда в очередь поступила простая заявка, когда в очереди уже имелась обычная;

-четвертое слагаемое – описывает вероятность того что простая заявка из очереди перешла в канал обслуживания и в очередь пришла новая простая заявка.

Теперь рассмотрим вариант, когда канал обслуживания занят одной простой и одной важной заявками.

Очевидно, что таких состояний два, при n=2 . При этом мы не должны забывать, что в системе не может быть больше одной важной заявки.

Рассмотрим следующее событие, относящееся к вероятности состояния $P_{1,1,1,0}$ т.е. канал занят одной простой и одной важной заявками, а в очереди одна простая заявка:

$$\nearrow P_{1,0}(k)[1-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu+s\nu)\Delta t]$$

$$P_{1,0}(k+1) \longrightarrow P_0\,(2\mu+(s+1))\,\Delta t$$

$$\searrow P_{0,1+1,0}\,(2\mu+(s+1))\;\Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания одна простая заявка и одна важная и в очереди одна простая заявка, так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

-третье слагаемое – описывает, когда из канала обслуживания обслужилась скорее всего важная заявка и в очереди из двух ожидающих простых заявок осталась одна, так как другая перешла в канал обслуживания.

Рассмотрим следующее событие, относящиеся к вероятности состояния $P_{1,1,2,0}$ т.е. канал занят одной простой и одной важной заявками, а в очереди одна простая заявка:

$$\nearrow P_{2,0}\,(k\,)[1-(\lambda_1+\lambda_2+n\mu+s\nu)\Delta t]$$

$$P_{2,0}(k+1) \longrightarrow P_1\lambda_2\Delta t$$

$$\searrow P_{2,0+1}(n\mu+(s+1))\;\Delta t$$

-первое слагаемое – описывает состояние , когда ни одна заявка не пришла в очередь и ни одна не обслужилась из нее, т.е. как были в канале обслуживания одна простая заявка и одна важная заявка и в очереди две простые заявки так и остались в момент времени k;

- второе слагаемое – описывает, когда в очередь пришла одна простая заявка;

- третье слагаемое – описывает, когда в канале обслужилась как бы важная заявка и в очередь пришла одна заявка, так как освободилось одно место в очереди.

В итоге, рассуждая аналогическим образом для оставшихся вероятностных состояний можно получить следующую группу формул, необходимую для расчета приоритетной

СМО при n=2, $\rho_1 = 0{,}1$, $\rho_2 = 0{,}7$. Так например, зная P_0, мы можем определить окончательно значение Z_{2+1}, $Z_{2+2}, \zeta_{2+1}, \zeta_{2+2}$ и определить выигрыш $B_{отк} = \frac{Z_{2+2}}{\zeta_{2+2}}$ в отказе обслуживания важных и обычных заявок.

$$Z_{2+1} = 0{,}003 * 0{,}47 = 1{,}41 * 10^{-3}$$

$$Z_{2+2} = 1{,}867 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}877 * 10^{-3} \qquad (3)$$

$$\zeta_{2+1} = 0{,}467 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}219*10^{-3}$$

$$\zeta_{2+2} = 0{,}373 * 10^{-3} * 0{,}47 = 0{,}175 * 10^{-3}$$

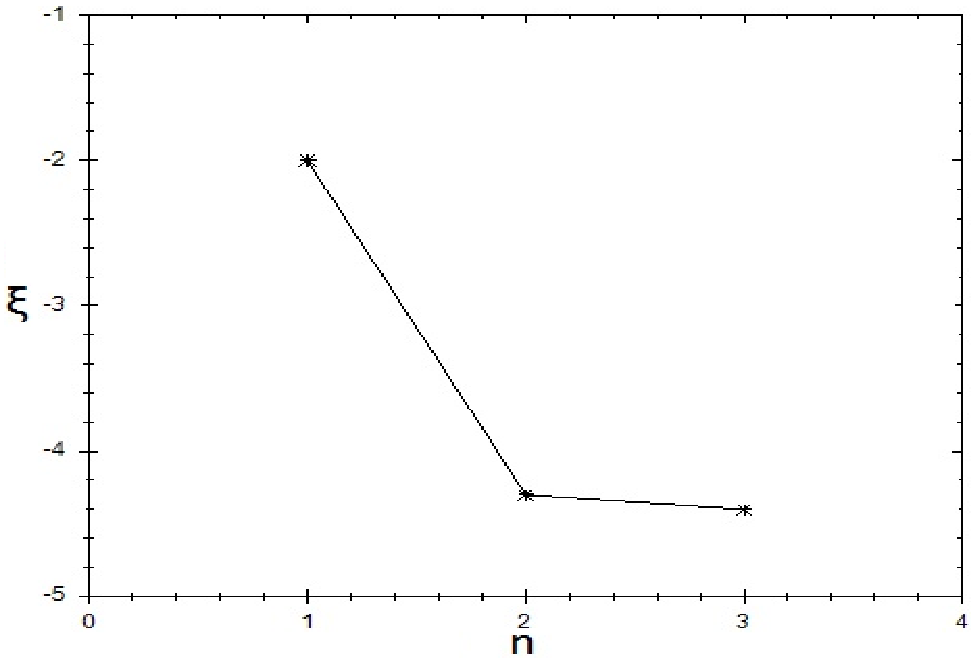

Рис.2. График зависимости вероятности отказа в приоритетном обслуживании от числа каналов

Сравнивая графики на рис.1 и 2, можно убедиться, что вероятность отказа в обслуживании посадки на заданной линий пути для аварийного самолета в 10÷15 раз ниже при приоритетном обслуживании, чем бесприоритетном. Значит, этим достигается максимальная безопасность воздушного движения при малых запасах топлива на борту перед самой посадкой.

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получены формулы расчета вероятностей для многоканальной приоритетной СМО с ожиданием, когда в системе (в канале или в очереди) одновременно может присутствовать только одна приоритетная заявка.
2. Показано, что при n=1 и n>1 найденные формулы отличаются друг от друга.
3. Показано, что при бесприоритетном обсуживании самолетов без учета оставшегося на борту топлива, нужная малая вероятность отказа при заходе в заданный эшелон требует использования тромбона значительного размера, который ограничен другими причинами.
4. При сравнении бесприоритетной и приоритетной системы массового обслуживания вероятность отказа в обслуживании и отправки на другой аэродром аварийных самолетов с малым запасом топлива в приоритетной системе обслуживания в 10 раз меньше по сравнению с бесприоритетной системой обслуживания.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций.- М : Сов. Радио 1972.

2. Клейрок Л Вычислительные системы с очередями. М : Мир, 1979

3. Лебедев Г.Н, Тин ПхонЧжо, “Оценка эффективности организации взаимопомощи в многоканальных компьютерных и человеко-машинных системах массового обслуживания”. Труды IX всероссийская научно-технической конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического моделирования» Тамбов, 2009 г.

Сведения об авторах

Тин ПхонЧжо, докторант Московского авиационного института (национального исследовательского университета) к.т.н.

тел.: +7(925)046-0630; e-mail: thethtweaung@gmail.com