
УДК 527.8

Определение координат объекта на основе многомодовой фильтрации неоднозначных фазовых измерений

Кишко Д.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: dykishko@gmail.com

Аннотация

В статье исследуется алгоритм определения координат статичного объекта на основе фильтрации неоднозначных фазовых измерений сигналов радионавигационных систем. Рассматриваемый алгоритм является модификацией алгоритма, представленного в [1], в части реализации шага коррекции. Описаны особенности обработки указанных измерений и приведен сравнительный анализ рассматриваемого алгоритма. Приведены результаты моделирования работы алгоритма для локальных радионавигационных систем с малыми базами между передатчиками. Проанализированы зависимости характеристик точности и времени сходимости исследуемого алгоритма. В заключении сделаны выводы об особенностях применения алгоритма и возможных улучшениях.

Ключевые слова: псевдофазовые измерения, разрешение неоднозначности, многомодовая фильтрация, навигационные системы, координаты, GPS, ГЛОНАСС.

Введение

В настоящее время значительное место в системах определения навигационных параметров объекта занимают алгоритмы обработки неоднозначных фазовых измерений сигналов, обеспечивающие значительное увеличение точности измерений по сравнению с алгоритмами, использующими однозначные (грубые) измерения [1]. Такие алгоритмы применяются при высокоточном определении местоположения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС) [1], в наземных псевдоспутниковых системах, таких как Locata (www.locata.com), в многоантенных фазовых пеленгаторах и т.д. Известной особенностью фазовых измерений является их высокая точность, достижение которой возможно после правильного разрешения неоднозначности этих измерений.

На сегодняшний момент разработан математический аппарат одномоментной обработки фазовых измерений в ГНСС, реализованный в режиме относительного определения координат (RTK) и его модификаций [1], а также накоплен большой опыт обработки фазовых измерений с использованием алгоритмов калмановской фильтрации как в относительном [1]-[3], так и в абсолютном [4] режимах.

Обработка неоднозначных фазовых измерений возможна лишь при наличии однозначных измерений. К примеру, для ГНСС – это измерения псевдодальности, приращения псевдофаз, априорное значение вектора оцениваемых параметров. Достоверное разрешение неоднозначности при одномоментных относительных определениях требует наличия не менее чем 12 однозначных измерений [2]. Применение фильтрационных алгоритмов позволяет снизить число однозначных измерений до минимального числа. Это достигается за счет того, что в фильтрационных алгоритмах учитывается предыдущее состояние вектора оцениваемых параметров системы.

Рассматриваемый алгоритм относится к классу нелинейных фильтрационных алгоритмов и является модификацией алгоритма линейного рекуррентного оценивания, приведённого в [2] и [3].

Алгоритм фильтрации неоднозначных фазовых измерений

Говоря о фильтрации неоднозначных фазовых измерений, подразумевают определение вектора оцениваемых параметров системы, заданного на дискретных моментах времени, на основе совместного наблюдения вектора неоднозначных точных фазовых измерений и вектора грубых однозначных измерений, при известной начальной грубой оценке вектора оцениваемых параметров. Учитывая это, запишем линейную дискретную модель эволюции вектора оцениваемых параметров системы θ_i и совместного вектора однозначных и неоднозначных измерений \mathbf{z}_{φ_i} в общеизвестной форме [2]

$$\theta_i = \mathbf{F} \cdot \theta_{i-1} + \mathbf{v}_\theta, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_{ki} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\gamma_i} \\ \mathbf{z}_{\varphi_i} + \mathbf{k}_i \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\theta_i) + \mathbf{v}_\mu, \quad (2)$$

где \mathbf{v}_θ - вектор центрированных аддитивных гауссовских шумов процесса с известной матрицей ковариации \mathbf{Q} ; \mathbf{v}_μ - вектор измерений с матрицей ковариации \mathbf{R}_μ ; \mathbf{F} - линейная функция перехода, описывающая эволюцию системы; $\mathbf{H}(\theta_i)$ - нелинейная вектор-функция связи вектора измерений с вектором состояния θ_i ; \mathbf{z}_{γ_i} - вектор однозначных измерений; \mathbf{z}_{φ_i} - вектор неоднозначных фазовых измерений, выраженный в циклах; \mathbf{k}_i - целочисленный вектор, характеризующий неоднозначность фазовых измерений.

Присутствие в (2) нелинейной вектор-функции $\mathbf{H}(\theta_i)$ затрудняет использование фильтрационных алгоритмов, разработанных для линейных систем. Одним из вариантов разрешения этой проблемы является линеаризация в общем случае нелинейной вектор-функции $\mathbf{H}(\theta_i)$ в точке грубого приближения. Далее показано, как линеаризуется вектор-функции $\mathbf{H}(\theta_i)$ в случае многомодовой фильтрации неоднозначных фазовых измерений.

В основе алгоритма, представленного в [2]-[3] лежит аппроксимация функции плотности вероятности измерений усеченной свернутой гауссовской функцией плотности вероятности [2]. Данная функция представляет собой периодически повторяющуюся ограниченную на периоде гауссовскую функцию плотности вероятности, где период определяется вектор-функцией $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$. Функцию правдоподобия вектора состояния, построенную только по вектору измерений на i -ый момент, можно представить с точностью до константы в виде

$$f(\boldsymbol{\theta}_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \min_{\mathbf{k}_i} \left((\mathbf{z}_{k_i} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i))^T \mathbf{R}_\mu^{-1} (\mathbf{z}_{k_i} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)) \right) \right\}, \quad (3)$$

Процедура минимизации по целочисленному вектору \mathbf{k}_i здесь используется для того, чтобы показать необходимость поиска такого вектора \mathbf{k}_i , который при подстановке в (3) будет максимизировать эту функцию правдоподобия. В таком случае максимум функции правдоподобия определяет истинное положение вектора оцениваемых параметров. Для того чтобы полностью описать функцию правдоподобия необходимо перебрать все возможные значения целочисленного вектора \mathbf{k}_i . На практике [2] ограничиваются лишь конечным числом N векторов \mathbf{k}_i , которые последовательно располагаются в списке по убывающим значениям функции правдоподобия. Далее учтем эту особенность и для описания функции правдоподобия будем использовать список векторов \mathbf{k}_{ni} , где индекс $n=1..N$ будет указывать на номер целочисленного вектора \mathbf{k}_i в списке.

Если помимо вектора измерений известно грубое значение вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}_c$, распределенного по гауссовскому закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей \mathbf{R}_c , то, согласно [2], совместная функция правдоподобия вектора оцениваемых параметров на основе грубого значения и вектора измерений может быть представлена в виде

$$L(\boldsymbol{\theta}_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \min_{\mathbf{k}_{ni}} \left((\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_c)^T \mathbf{R}_c^{-1} (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_c) + (\mathbf{z}_{k_{ni}} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i))^T \mathbf{R}_\mu^{-1} (\mathbf{z}_{k_{ni}} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)) \right) \right\}, \quad (4)$$

где индекс $n=1..N$, как и в случае с вектором \mathbf{k}_{n_i} , указывает на номер моды в соответствующем списке из N элементов.

Далее, опустив индекс для простоты восприятия, обозначим

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_c. \quad (5)$$

Разложив $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\boldsymbol{\theta}_c$ и ограничившись членами до первой производной включительно, преобразуем (4) к виду

$$L(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{\mathbf{k}_n} \left(\Delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R}_c^{-1} \Delta\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}_n} - \mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{R}_\mu^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}_n} - \mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\theta}) \right)\right\}, \quad (6)$$

где невязки вектора измерений:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}_n} = \mathbf{z}_{\mathbf{k}_n} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_c) = \begin{bmatrix} \gamma \\ \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{k}_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

\mathbf{H} - матрица комбинаций направляющих косинусов, элементы которой зависят от структуры системы и выбранной математической модели измерений. Принципы формирования матрицы \mathbf{H} описаны далее в работе.

При ограничении ряда Тейлора вектор-функции $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$, возникает ошибка ограничения, которая влияет на сходимость и точность работы алгоритма. Однако существует область вблизи точки грубого приближения, в которой влияние ошибки ограничения незначительны и ей можно пренебречь. Исследование области сходимости алгоритма рассмотрено далее в работе.

Произведя математические операции с выражением (6), согласно [2], получим преобразованную функцию правдоподобия в виде

$$L(\Delta\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{\mathbf{k}_n} \left((\Delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n})^T \mathbf{R}^{-1} (\Delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n}) + (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^*)^T \mathbf{D}_{qq} (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^*) + \boldsymbol{\mu}_n^{*T} \mathbf{D} \boldsymbol{\mu}_n^* - \mathbf{k}_n^{*T} \mathbf{D}_{qq} \mathbf{k}_n^* \right)\right\} \quad (8)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_c^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_\mu^{-1} \mathbf{H})^{-1}, \quad (9)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n} = \mathbf{R} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_\mu^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}_n}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\mu}_n^* = [\gamma \quad \boldsymbol{\varphi}]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{k}_n^* = -\mathbf{D}_{qq}^{-1} \mathbf{D}_{qp} \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varphi}, \quad (12)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_\mu^{-1} - \mathbf{R}_\mu^{-1} \mathbf{H} \mathbf{R} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_\mu^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{pp} & \mathbf{D}_{pq} \\ \mathbf{D}_{qp} & \mathbf{D}_{qq} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где p, q - размерность вектора невязок $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}$ соответственно.

Производя обратную замену с учетом (5), получим следующую форму записи функции правдоподобия

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \min_{\mathbf{k}_n} \left((\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n})^T \mathbf{R}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n}) + SM(\mathbf{k}_n) \right) \right\}, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n} = \boldsymbol{\theta}_c + \Delta \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n}, \quad (15)$$

$$SM(\mathbf{k}_n) = (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^*)^T \mathbf{D}_{qq} (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^*) + \boldsymbol{\mu}_n^{*T} \mathbf{D} \boldsymbol{\mu}_n^* - \mathbf{k}_n^{*T} \mathbf{D}_{qq} \mathbf{k}_n^*. \quad (16)$$

Из (14) видно, что совместная функция правдоподобия вектора оцениваемых параметров определяется выражением, стоящим в степени экспоненты. Это выражение состоит из двух слагаемых, первое из которых отвечает за положение моды в пространстве оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}_n}$, а второе характеризует высоту моды $SM(\mathbf{k}_n)$. Таким образом, поиск максимума функции правдоподобия и наиболее близких к нему мод сводится к поиску списка векторов \mathbf{k}_n последовательно минимизирующих квадратичную форму $SM(\mathbf{k}_n)$.

Алгоритмы поиска \mathbf{k}_n хорошо изучены и активно применяются на практике. Одним из распространенных алгоритмов является метод целочисленного унимодального преобразования (ЦУМП-метод или LAMBDA-метод), который детально описан в [2] и в данной работе особенности его реализации не рассматриваются. Отметим, что входными параметрами ЦУМП алгоритма являются матрица \mathbf{D}_{qq} и вектор \mathbf{k}^* , вычисляемые на основе (9)-(13), а также количество мод N . На выходе алгоритма ЦУМП формируется список \mathbf{k}_n , содержащий значения, последовательно минимизирующие функцию правдоподобия (4), соответствующий ему список значений максимумов мод в пространстве оцениваемых параметров

θ_{k_n} (14) с ковариационной матрицей \mathbf{R} (9), и список высот каждой моды $SM(\mathbf{k}_n)$ (15).

Используя алгоритм ЦУМП, составим выражения для процесса фильтрации вектора состояния в виде процедуры калмановской фильтрации и обозначим этот алгоритм, как многомодовый фильтр Калмана (МФК). На рисунке 1 представлена структурная схема алгоритма МФК.

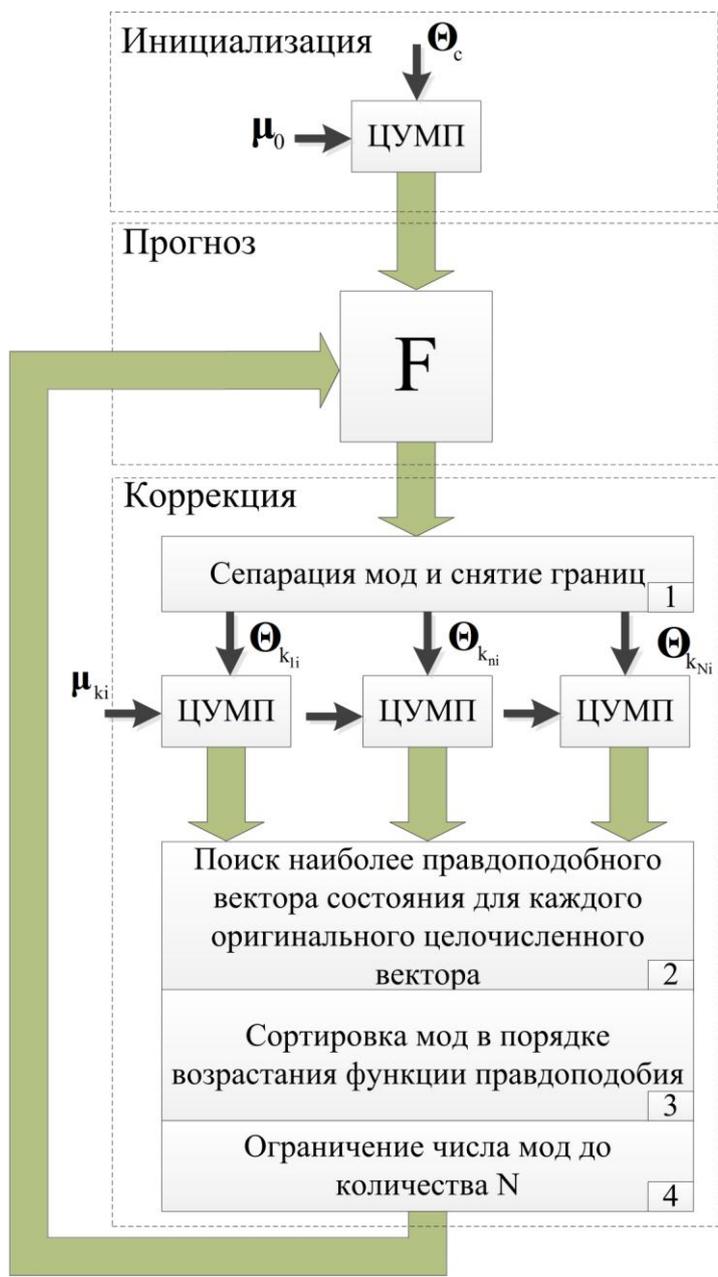


Рисунок 1. Структурная схема алгоритма МФК

Алгоритм МФК, как и фильтр Калмана, условно делится на три шага: инициализация, прогноз и коррекция. Далее детально рассмотрим каждый из перечисленных шагов.

Шаг инициализации МФК

На шаге инициализации на рисунке 1 осуществляется начальная настройка алгоритма МФК. В начальный момент времени подразумевается, что является известным начальное приближение вектора оцениваемых параметров θ_0 , его ковариационная матрица R_c , и значения вектора измерений μ_0 , с ковариационной матрицей R_μ . Далее, используя алгоритм ЦУМП, определяют N мод функции правдоподобия, которые последовательно располагаются в списке по убывающим значениям. Результатом вычислений на шаге инициализации, как и в алгоритме ЦУМП, является список k_n , содержащий значения последовательно минимизирующие функцию правдоподобия (13) и соответствующие ему список максимумов мод в пространстве оцениваемых параметров θ_{k_n} (15) с ковариационной матрицей R (8) и список высот каждой моды $SM(k_n)$ (16)

Шаг прогноза МФК

На этапе прогноза алгоритма МФК производится экстраполирование каждого максимума функции правдоподобия $\theta_{k_{ni}}$ и вектора ковариации R_i на следующий момент времени. Целочисленные вектора k_{ni} , а соответствующие им значения квадратичной формы остаются неизменными $SM(k_{ni})$ [2]. Тогда с учетом (1)

$$\theta_{k_n}^- = F\theta_{k_n}, \quad (17)$$

$$R^- = FRF^T + Q, \quad (18)$$

$$k_n^- = k_n, \quad (19)$$

$$SM(k_n^-) = SM(k_n), n = 1..N \quad (20)$$

В конце шага прогноза с точностью до постоянного множителя становится известной функция правдоподобия экстраполированного вектора состояния.

Шаг коррекции МФК

На шаге коррекции производится корректировка экстраполированной функции правдоподобия (14), моды которой заданы связными друг с другом списком целочисленных векторов \mathbf{k}_n^- , списком максимумов функции правдоподобия $\theta_{\mathbf{k}_n}^-$ с матрицей ковариации \mathbf{R}^- и списком значений квадратичной формы $SM(\mathbf{k}_n^-)$. Согласно правилу Байеса скорректированная функция правдоподобия вектора состояния получается путем перемножения функции правдоподобия (3), образуемой вновь поступившими измерениями, и функцией (14), вычисленной на шаге прогноза. Так как функции правдоподобия (3) и (14) являются многомодовыми, то вычисление их произведения в явном виде вызывает трудности, которые проявляются когда одна из мод (14) находится вблизи границ двух мод в (3). В работе [2] представлен эффективный способ преодоления данной проблемы, включающий в себя следующие операции:

1) В блоке коррекции (модуль 1, рисунок 1) временно снимаются границы между модами в (14) и осуществляется произведение каждой из N неограниченных мод (14) с функцией правдоподобия (3), основанной на вновь поступивших измерениях $\mu_{\mathbf{k}_n}$. Данная операция проводится с помощью алгоритма ЦУМП в предположении, что вместо начальной оценки вектора состояния используется одна из N мод в (4). Для каждого произведения вычисляется M мод, доставляющих убывающее значение функции совместного распределения. В общем случае количество вычисляемых векторов M и N может быть различным. В итоге получается список из $N \times M$ целочисленных векторов \mathbf{k}_{nm} , $m=1..M$, для каждого из которых определены вектор состояния $\theta_{\mathbf{k}_{nm}}$ (15) с ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{\mathbf{k}_{nm}}$ (9) и высота моды

$$SM(\mathbf{k}_{nm}) = SM(\mathbf{k}_n^-) + SM(\mathbf{k}_m), \quad (21)$$

где $SM(\mathbf{k}_m)$ вычисляется аналогично (16), с учетом того, что произведение вычисляется не с грубой оценкой вектора оцениваемых параметров, а с одной из мод в (14).

2) В модуле 2 (рисунок 1) поиска наиболее правдоподобного состояния снимается предположение о неограниченности мод, задаются границы между модами. Затем в списке целочисленных векторов \mathbf{k}_{nm} производится поиск одинаковых целочисленных векторов и отбор среди них таких, для которых значение квадратичной формы $SM(\mathbf{k}_{nm})$ будет минимальным.

3) В результате операций в модулях 1 и 2 получаются списки из отобранных значений целочисленных векторов \mathbf{k}_{nm} , и соответствующие им списки векторов состояния $\boldsymbol{\theta}_{nm}$ и значения квадратичной формы $SM(\mathbf{k}_{nm})$. Далее эти списки сортируются по возрастанию значений $SM(\mathbf{k}_{nm})$ (модуль 3 рисунок 1) и ограничиваются первыми N значениями (модуль 4 рисунок 1).

Шаг коррекции завершается на определении скорректированных и ограниченных по количеству значений целочисленных векторов $\hat{\mathbf{k}}_n$, векторов состояния $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ с ковариационной матрицей $\hat{\mathbf{R}}_n$ и соответствующих им значений квадратичной формы $SM(\hat{\mathbf{k}}_n)$.

Особенности реализации алгоритма

Для анализа работы алгоритма рассмотрим радионавигационную систему определения собственных координат на борту ЛА, состоящую из N_a равномерно распределенных по окружности радиуса $R_0 = 50\text{м}$ наземных передатчиков и бортовой измерительной аппаратуры[7]. Структурная схема системы для случая $N_a = 4$ приведена на рисунке 2.

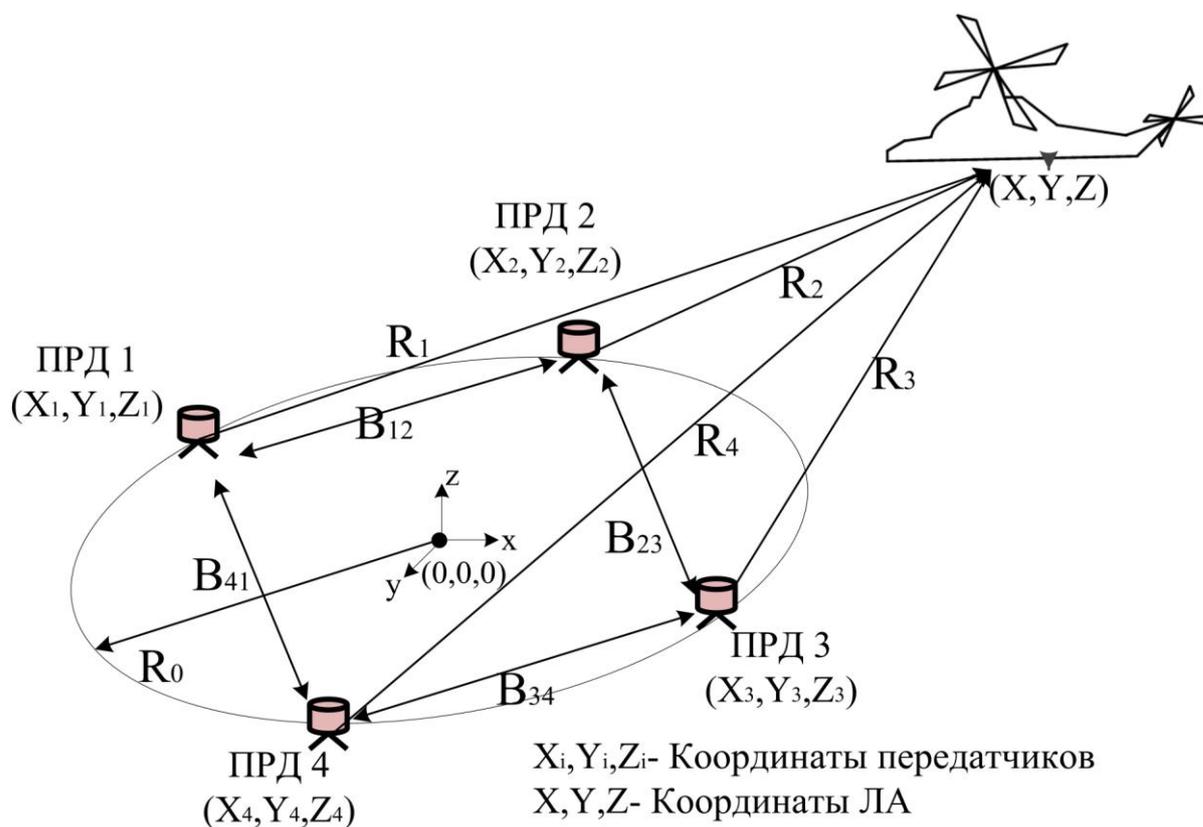


Рисунок 2. Структурная схема системы посадки

Несущие гармонические колебания наземных передатчиков с частотой f_0 когерентны и модулируются по фазе двоичной последовательностью, образованной суммированием по модулю два псевдошумового сигнала дальномерного кода (ПШС $_j$, $j=1..N_a$) с периодом T_c и импульсов цифрового двоичного сигнала навигационного сообщения длительностью τ , которая удовлетворяет условию $\tau = T_c$. Сигналы различных радиопередатчиков отличаются структурой ПШС $_j$, которая выбирается из условия взаимной ортогональности любой пары ПШС $_j$. Местоположение передатчиков определено в связанной с ними прямоугольной системе координат, в которой также производится оценка собственных координат ЛА. Методы синхронизации сигналов передатчиков не обсуждаются в данной работе.

Для работы алгоритма МФК необходимо определить математические модели измерений параметров радиосигналов от каждого из передатчиков. Когерентный прием сигналов в приемной аппаратуре ЛА позволяет формировать измерения

псевдодальности и псевдофазы по сигналу каждого из передатчиков [2]. Математические модели измерений псевдодальностей и псевдофаз) согласно [2] и [7] принимают вид

$$\rho^j(t_i) = R^j(t_i) + c \left[\Delta T(t_i) - \Delta T^j(t_{i,\text{prec}}) + T_{\text{atm}}^j + T_h^j \right] + \mu_\rho^j \quad (22)$$

$$R^j(t_i) = \sqrt{(x - x^j)^2 + (y - y^j)^2 + (z - z^j)^2}, \quad (23)$$

$$j = 1 \dots N_a,$$

где $t_{i,\text{prec}}$ - момент времени, предшествующий моменту измерений t_i и отстоящий на время распространения сигнала от j -ой наземной антенны до приемной антенны ЛА (далее, для краткости будем обозначать как момент предшествования); $R^j(t_i)$ - расстояние между точкой, которую занимал ЛА в момент t_i и точкой расположения j -ого передатчика на момент $t_{i,\text{prec}}$; x^j, y^j, z^j - координаты j -ого передатчика, в связанной с ними системе координат, определяемые на момент предшествования и передающиеся в излучаемом сигнале; x, y, z - координаты ЛА на момент измерений; $\Delta T^j(t_{i,\text{prec}})$ - смещение показаний часов j -го передатчика в момент предшествования, обусловленное неизвестной начальной фазой излучаемого сигнала; $\Delta T(t_i)$ - смещение показаний часов приемной аппаратуры ЛА в момент измерений; T_{atm}^j - задержка, вызванная распространением сигнала j -го передатчика в атмосфере (тропосфере); T_h^j - аппаратные задержки в приемнике ЛА; μ_ρ^j - ошибки формирования псевдодальности; c - скорость света.

Аналогично математические модели измерений псевдофазы имеют следующий вид [2]

$$\varphi^j(t_i) = \frac{R^j(t_i)}{\lambda} + f_1 \left[\Delta T(t_i) - \Delta T^j(t_{i,\text{prec}}) \right] + \psi_0^j + \psi_0 + \psi_{\text{atm}}^j + \psi_h^j + \mu_\varphi^j + M^j \quad (24)$$

где ψ_0^j - начальная фаза несущего гармонического сигнала j -го передатчика; ψ_0 - начальная фаза опорного гармонического сигнала приемника; ψ_{atm}^j - фазовые

смещения сигнала j -го передатчика, вызванные распространением сигнала в атмосфере; ψ_h^j - фазовые смещения сигнала j -го передатчика в приемной аппаратуре; μ_φ^j - ошибки формирования псевдофазовых измерений; M^j - целочисленный параметр, отражающий неоднозначную природу псевдофазовых измерений.

Задержки сигнала в приемной аппаратуре ψ_h^j и T_h^j , входящие в (22) и (24), будут одинаковы для всех передатчиков, так как сигналы каждого передатчика формируются на одной частоте f_1 . Атмосферные задержки T_{atm}^j и ψ_{atm}^j также будут одинаковы для сигналов всех передатчиков, ввиду того что передатчики разнесены в пространстве на малое расстояние R_0 . Заметим, что когерентность сигналов передатчиков позволяет оценивать смещение показаний часов j -го передатчика $\Delta T^j(t_{i,prec})$, и как следствие учитывать их в бортовой аппаратуре ЛА [7].

Замечания, приведенные выше, позволяют сформировать измерения разности псевдодальностей, как это было сделано в [7], а также разности псевдофаз, и скомпенсировать большую часть неизвестных параметров

$$\Delta \rho^j(t_i) = \rho^j(t_i) - \rho^b(t_i) = R^j(t_i) - R^b(t_i) + \xi_{\Delta \rho}^j, \quad (25)$$

$$\Delta \varphi^j(t_i) = \frac{R^j(t_i) - R^b(t_i)}{\lambda} + \xi_{\Delta \varphi}^j + \Delta M^j, \quad (26)$$

где индекс b указывает номер опорного передатчика, измерения псевдодальности и псевдофазы которого вычитают из измерений по другим передатчикам; $\xi_{\Delta \rho}^j$, $\xi_{\Delta \varphi}^j$ - ошибки формирования разностей псевдодальностей и псевдофаз; ΔM^j - целочисленный параметр характеризующий неоднозначность разности псевдофазовых измерений.

Приняв в (25)-(26) за неизвестные параметры координаты ЛА, получают нелинейные уравнения, связывающие измерения разностей псевдодальности и псевдофазы $\Delta \rho^j(t_i)$ и $\Delta \varphi^j(t_i)$ с оцениваемыми координатами ЛА. Нелинейную функцию $R^j(t_i)$ (23) раскладываются в ряд Тейлора, ограничиваясь членами до

первой производной включительно, и объединяются в систему уравнений, которую можно записать в виде аналогичном (2)

$$\begin{bmatrix} \gamma_i \\ \boldsymbol{\varphi}_i + \mathbf{k}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\rho \\ \mathbf{H}_\varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{v}_\mu, \quad (26)$$

где

$$\mathbf{H}_\rho = \begin{bmatrix} h_x^1 - h_x^b & h_y^1 - h_y^b & h_z^1 - h_z^b \\ h_x^2 - h_x^b & h_y^2 - h_y^b & h_z^2 - h_z^b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_x^{N-1} - h_x^b & h_y^{N-1} - h_y^b & h_z^{N-1} - h_z^b \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{H}_\varphi = \frac{\mathbf{H}_\rho}{\lambda}, \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_\rho = (\mathbf{T}\mathbf{R}_\rho\mathbf{T}^\mathbf{T})^{-1}, \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_\varphi = (\mathbf{T}\mathbf{R}_\varphi\mathbf{T}^\mathbf{T})^{-1}, \quad (30)$$

$$\mathbf{B}_{\rho\varphi} = \mathbf{B}_{\varphi\rho} = 0, \quad (31)$$

$$h_x^j = \frac{x - x^j}{R^j(t_i)}, h_y^j = \frac{y - y^j}{R^j(t_i)}, h_z^j = \frac{z - z^j}{R^j(t_i)}, \quad (32)$$

где, \mathbf{T} - матрица размерностью $(N_a - 1) \times (N_a)$, которая может быть получена добавлением к единичной матрице, размером $(N_a - 1) \times (N_a - 1)$, столбца из элементов равных минус единице (место добавления столбца в единичную матрицу соответствует номеру опорного передатчика);

$$\gamma_i = \begin{bmatrix} \Delta\rho^1(t_i) - R^1(t_i) + R^b(t_i) \\ \vdots \\ \Delta\rho^{N_a-1}(t_i) - R^{N_a-1}(t_i) + R^b(t_i) \end{bmatrix} \quad (33)$$

-невязки разностей псевдодальностей,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Delta\varphi^1(t_i) - \frac{R^1(t_i) - R^b(t_i)}{\lambda} \\ \vdots \\ \Delta\varphi^{N_a-1}(t_i) - \frac{R^{N_a-1}(t_i) - R^b(t_i)}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (34)$$

-невязки разностей псевдофаз.

Как отмечалось выше, при ограничении ряда Тейлора возникает ошибка ограничения, влияние которой на сходимость и точность работы алгоритма будет рассмотрено далее.

Выражения (26)-(34) позволяют формировать исходные данные для алгоритма ЦУМП (8)-(16) на каждом шаге фильтрации, таким образом обеспечивая функционирование МФК.

Результаты моделирования

Предлагаемый алгоритм реализован в программных кодах языка C++ с использованием библиотеки GPSTk (www.gpstk.org) и может быть использован в системах, функция правдоподобия вектора состояния которых аппроксимирована усеченной свернутой гауссовской функцией[2], а процесс фильтрации записан с использованием выражений (1) и (2). Анализ работы алгоритма будем проводить для системы изображенной на рисунке 2.

Схема проводимого эксперимента приведена на рисунке 3. Моделирование проводится путем задания в блоке (1) количества передатчиков, начального значения вектора оцениваемых параметров и времени моделирования. Формирование измерений производится в блоке (2), согласно выражениям (25)-(26). Алгоритм МФК реализован в блоке (3), согласно схеме алгоритма на рисунке 1.



Рисунок 3. Схема эксперимента

В результате одного цикла работы (по окончании времени моделирования) в блоке (4) программное обеспечение формирует следующие параметры:

1. Количество аномальных ошибок. К аномальным ошибкам относят ошибки, возникающие в процессе работы алгоритма МФК в результате неправильного разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Подсчет аномальных ошибок производится после первого истинного разрешения неоднозначности (когда истинный вектор неоднозначности появляется в списке $\hat{\mathbf{k}}_n$ на 1-ом месте). Этот параметр позволяет судить о устойчивости алгоритма, а также сделать выводы о его сходимости. Отношение количества аномальных ошибок к общему количеству моментов времени после истинного разрешения неоднозначности задает вероятность аномальной ошибки в одном опыте.
2. Сходимость алгоритма определяется по вероятности появления аномальной ошибки в конкретном опыте. Так как подсчет аномальных ошибок ведется после первого истинного разрешения неоднозначности, то при этом учитывается переходный процесс смены моды. Поэтому при вероятности аномальной ошибки менее 0.01 будем считать алгоритм сходящимся.
3. Время сходимости алгоритма. Параметр определяет момент времени, когда произошло первое истинное разрешение неоднозначности. Чем меньше время сходимости тем быстрее алгоритм МФК оценивает истинный вектор неоднозначности и истинное положение ЛА.
4. Значение контрастного отношения. Контрастное отношение характеризует отношение высоты моды, которая находится в списке $\hat{SM}(\hat{\mathbf{k}}_n)$ на первом месте, к

высоте моды, которое находится в списке на втором месте. В процессе работы МФК контрастное отношение может очень резко меняться от отсчета к отсчету. Для устранения этого явления предлагается производить сглаживание, при котором контрастное отношение вычисляется следующим образом:

$$\text{KNTR}_i = \text{KNTR}_{i-1} \frac{\text{SM}(\hat{\mathbf{k}}_{1,i}) - \text{SM}(\hat{\mathbf{k}}_{2,i})}{\text{SM}(\hat{\mathbf{k}}_{1,i-1}) - \text{SM}(\hat{\mathbf{k}}_{2,i-1})} \quad (35)$$

В процессе работы алгоритм МФК может расходиться. Такой эффект может связан с плохим геометрическим фактором (например, малое количество измерений) или малым количеством мод, учитываемых в процессе работы. В случаях, если вектора оцениваемых параметров находится за пределами этой области - алгоритм расходится. Имея список из начальных значений вектора оцениваемых параметров и соответствующие результаты работы МФК можно все пространство начальных значений разделить на две области. В первом случае - это область сходимости, во втором - область аномальных ошибок. Для анализа алгоритма интерес представляет определение размеров области сходимости. Для этой цели аппроксимируем область сходимости эллипсоидом и определим длину его полуосей. Математическую модель эллипсоида в декартовой прямоугольной системе для случая 3-х мерного вектора оцениваемых параметров определим следующим образом [2]

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}^T (\mathbf{D}_\theta) \bar{\boldsymbol{\theta}} \leq C \quad (35)$$

$$\mathbf{D}_\theta = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]^T,$$

где \mathbf{D}_θ матрица обратная к ковариационной матрице; $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ - центрированный вектор, значений вектора оцениваемых параметров; C - константа, определяющая размер эллипсоида; знак \leq задает условие, при котором точки пространства оцениваемых

параметров лежат внутри эллипсоида сходимости. Объединяя результаты работы по N_e опытам и записывая (25) в скалярном виде получим следующую систему

$$\begin{cases} \bar{X}_1^2 a_{11} + \bar{Y}_1^2 a_{22} + \bar{Z}_1^2 a_{33} + 2\bar{X}_1 \bar{Y}_1 a_{12} + 2\bar{Y}_1 \bar{Z}_1 a_{23} + 2\bar{X}_1 \bar{Z}_1 a_{13} \leq 1 \\ \vdots \\ \bar{X}_{N_e}^2 a_{11} + \bar{Y}_{N_e}^2 a_{22} + \bar{Z}_{N_e}^2 a_{33} + 2\bar{X}_{N_e} \bar{Y}_{N_e} a_{12} + 2\bar{Y}_{N_e} \bar{Z}_{N_e} a_{23} + 2\bar{X}_{N_e} \bar{Z}_{N_e} a_{13} \leq 1 \end{cases}, \quad (36)$$

$$a_{ij} = \frac{d_{ij}}{C}, \quad i, j = 1..3 \quad (37)$$

Систему (26) можно представить в матричном виде

$$\xi \mathbf{A} \leq \mathbf{I}, \quad (38)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^2 & \bar{Y}_1^2 & \bar{Z}_1^2 & 2\bar{X}_1 \bar{Y}_1 & 2\bar{Y}_1 \bar{Z}_1 & 2\bar{X}_1 \bar{Z}_1 \\ \vdots & & & & & \\ \bar{X}_{N_e}^2 & \bar{Y}_{N_e}^2 & \bar{Z}_{N_e}^2 & 2\bar{X}_{N_e} \bar{Y}_{N_e} & 2\bar{Y}_{N_e} \bar{Z}_{N_e} & 2\bar{X}_{N_e} \bar{Z}_{N_e} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{13}]^T,$$

где ξ – матрица, сформированная на основе компонент векторов оцениваемых параметров, при которых алгоритм МФК сходится; \mathbf{I} – единичный вектор-столбец размером $1 \times N_e$; \mathbf{A} – неизвестный вектор-столбец, состоящий из элементов a_{ij} .

Решение системы неравенств (38) после математических преобразований может быть записано следующим образом

$$\mathbf{A} \leq (\xi^T \xi)^{-1} \xi^T \mathbf{I}$$

Из элементов матрицы \mathbf{A} с учетом (27) сформируем матрицу \mathbf{D}'_0 , которая как и \mathbf{D}_0 является обратной к ковариационной матрице и задает эллипсоид

$$\bar{\theta}^T (\mathbf{D}'_0) \bar{\theta} \leq C \quad (39)$$

Постепенно увеличивая константу C добьемся, чтобы условие (39) выполнялось для всех точек, при которых алгоритм МФК сходится. Таким образом последнее принятое значение C , определит размер эллипсоида (39). Перейдем к

каноническому виду, разделив левую и правую часть (39) на C' . Затем найдем ковариационную матрицу эллипсоида $\mathbf{R} = (\mathbf{D}_\theta)^{-1} C$ и применим к ней SVD разложение

$$\mathbf{SVD}(\mathbf{R}) = \mathbf{USV},$$

где матрицы \mathbf{U} , \mathbf{V} - характеризуют наклон эллипсоида в прямоугольной декартовой системе координат, а \mathbf{S} - матрица, диагональные элементы которой численно равны длинам полуосей эллипса. Объем эллипсоида определяется выражением

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

где a, b, c - длины полуосей эллипсоида.

Для анализа работы МФК будем исследовать зависимости размера области сходимости алгоритма, среднего времени сходимости алгоритма, вероятности аномальной ошибки по всей выборке в зависимости от количества передатчиков и количества мод $N \times M$, участвующих в процессе фильтрации.

В рамках исследования характеристик работы алгоритма проведем эксперимент, в котором координаты ЛА полагаются неизменными во времени и равными $x = 0\text{м}, y = 1000\text{м}, z = 80\text{м}$. Такой выбор точек размещения ЛА интересен тем, что демонстрирует работу алгоритма МФК при плохом геометрическом факторе - дальность от каждого из передатчиков до ЛА значительно превышает (более чем в 10 раз) расстояние между соседними передатчиками, при этом ошибка оценки координат резко возрастает. Частоту сигнала каждого передатчика выберем равной $f_0 = 10$ ГГц, что соответствует длине волны в 3 см. На рисунке 4 и 5 приведены результаты работы алгоритма.

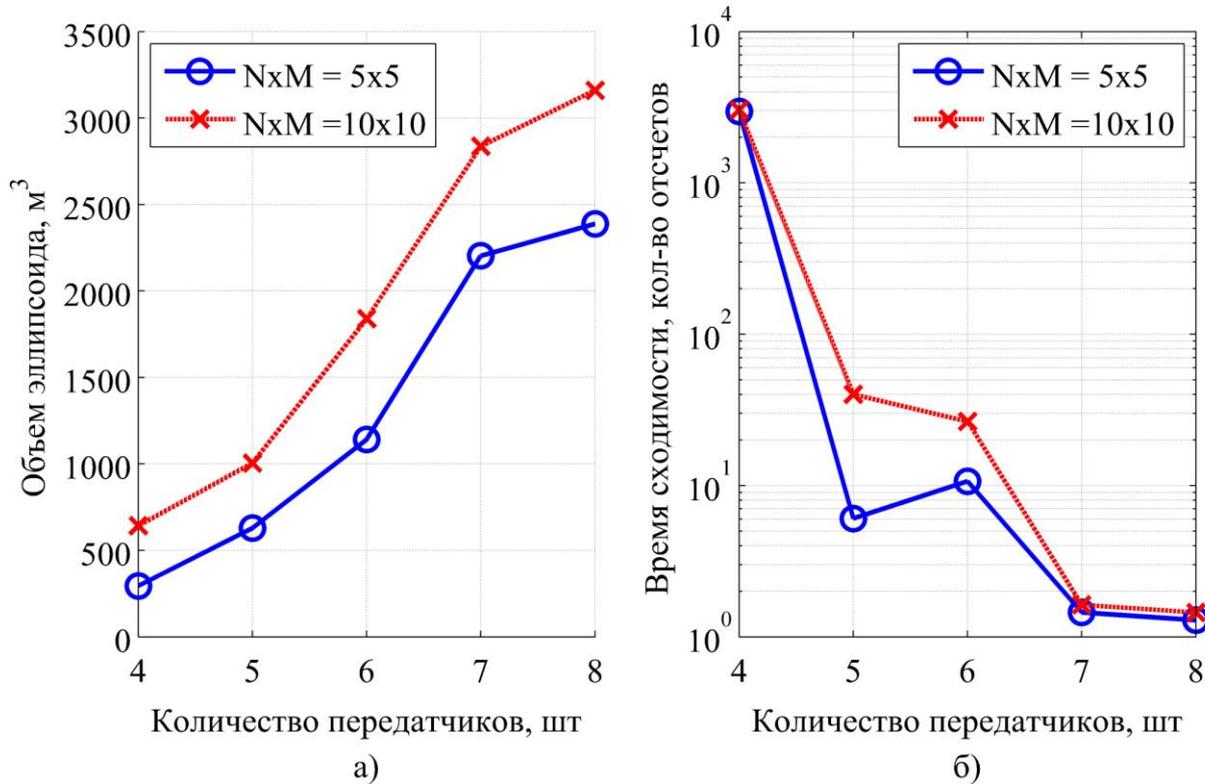


Рисунок 4. а) Зависимость объема эллипсоида сходимости МФК от количества наземных передатчиков; б) Зависимость времени сходимости МФК от количества передатчиков

Как видно из рисунка 4, по мере увеличения количества передатчиков объем эллипсоида сходимости увеличивается, а время сходимости уменьшается. Лучшие результаты работы дает алгоритм МФК использующий большее количество мод $N \times M$ в процессе работы. Этот факт связан с тем, что чем больше мод чувствует в процессе работы МФК, тем более вероятно, что истинная мода попадет в список целочисленных векторов k_n , алгоритм сойдется и объем эллипсоида сходимости увеличиться. Однако увеличение количества мод одновременно увеличивает и время сходимости алгоритма, так как требуется больше времени для того чтобы истинная мода переместилась из конца списка целочисленных векторов k_n в его начало.

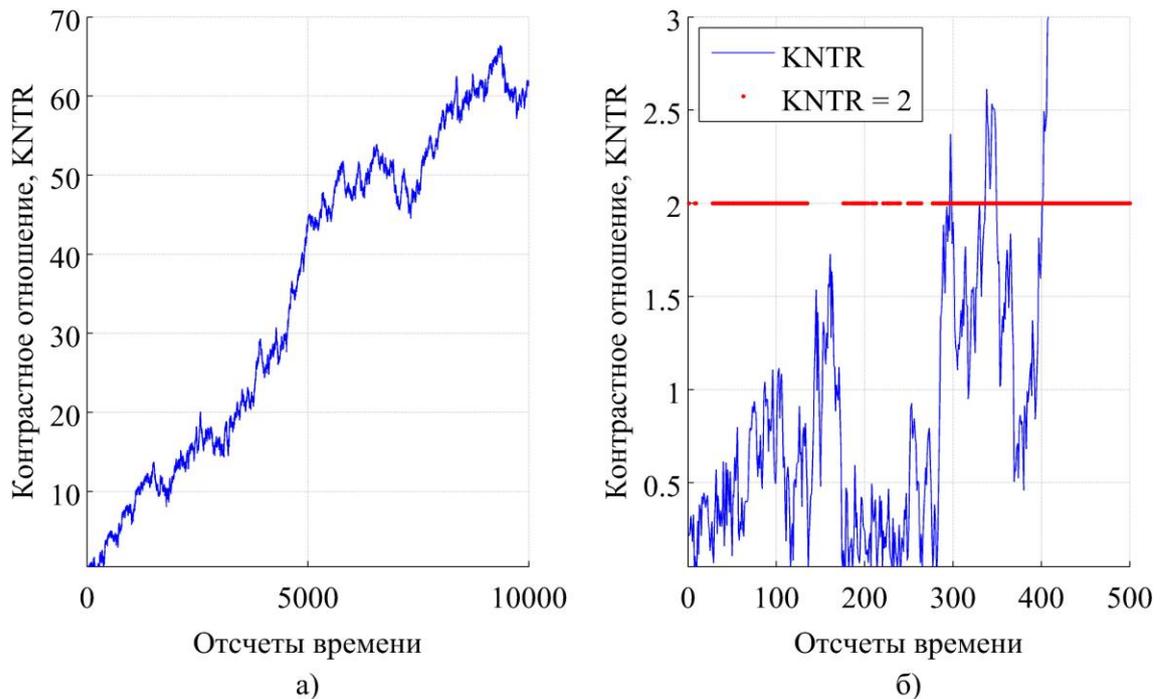


Рисунок 5. Значение контрастного отношения в одном из опытов для четырех передатчиков. В номинальном (а) и укрупненном (б) масштабах. Точками в (б) обозначены те моменты времени, когда МФК правильно производит разрешение неоднозначности

На рисунке 5 показано значение контрастного отношения в опыте при четырех передатчиках. Видно, что в процессе работы контрастное отношение монотонно увеличивается. На рисунке 5 б) в те моменты времени когда МФК правильно производит разрешение неоднозначности точками изображен уровень значения контрастного отношения «2», а при аномальных ошибках данный уровень отсутствует. Таким образом можно увидеть, что при аномальных ошибках контрастное отношение не превышает значения «2». Однако не стоит забывать, что если истинная мода не попала в список (грубая оценка лежит вне эллипсоида сходимости), то МФК выдает оценку ближайшего локального минимума, не совпадающего с истинным значением. Данное свойство МФК может быть использовано для сокращения затрат на машинные ресурсы- применение процедуры ЦУМП производится до тех пор пока значение контрастного отношения не превысит уровня «2», а далее для контроля лишь в выборочные моменты времени.

Выводы:

1. В работе рассмотрен алгоритм многомодовой фильтрации псевдофазовых измерений (многомодовый фильтр Калмана, МФК), который позволяет снизить число наземных передатчиков до минимального количества, в то время как при использовании одномоментных алгоритмов (не фильтрационных) не удастся достичь аналогичных результатов. В качестве примера рассмотрена реализация МФК для систем с малыми базами между передатчиками.
2. Продемонстрированы области сходимости МФК при разном количестве передатчиков и разном количестве мод $N \times M$, которые учитываются в обработке. Например, для случая 5 передатчиков, для увеличения области сходимости примерно в 1.5 раза можно увеличить в 2 раза количество мод $N \times M$ или добавить в состав наземного сегмента системы еще один передатчик, не увеличивая количество мод $N \times M$.
3. Установлено, что время сходимости алгоритма уменьшается по мере увеличения количества передатчиков и уже при 5 передатчиках приобретает значение менее 10 временных отсчетов, что говорит о потенциальных возможностях применения МФК в динамических системах.
4. Рассмотрено контрастное отношение (35) в одном из опытов при 4 передатчиках. Из рисунка 5 следует, что контрастное отношение (35) может служить индикатором правильного разрешения неоднозначности и его учет может использоваться для уменьшения затрат на машинные ресурсы, путем проведения процедуры ЦУМП в выборочные моменты времени.

Библиографический список

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. – М.: Радиотехника, 2010. 800с.
2. Поваляев А.А. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. – М.: Радиотехника, 2008, 328 с.

3. Поваляев А.А. Задача фильтрации при неоднозначных фазовых измерениях // Радиотехника и электроника. 1999. Том 44. №8, С. 972-981.
4. Подкорытов А. Н. Высокоточное местоопределение в абсолютном режиме в ГНСС с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений // Электронный журнал «Труды МАИ», 2012, выпуск № 59: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34845> (дата публикации 23.11.2012).
5. Тихонов В.И. Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. - 608с.
6. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering 82 (1): pp. 35–45.
7. Кишко Д.В. Анализ точности определения собственных координат при использовании радионавигационной системы с малыми базами между передатчиками // Электронный журнал «Труды МАИ», 2014, №78: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53755> (дата публикации 02.12.2014).