

Труды МАИ. 2024. № 136
Trudy MAI, 2024, no.136

Научная статья

УДК 517.581, 517.954

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180672>

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ, ПРИМЕНЯЕМОГО В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Иван Иванович Захаров^{1✉}, Темирхан Султанович Алероев²

^{1,2}Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹kroshvanya@yandex.ru✉

²aleroev@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена разработке принципиально новых приближенных аналитических методов изучения математических моделей теплообмена с помощью дробного исчисления. Полученные результаты могут иметь применения в различных областях прикладной математики и техники. В частности, при проектировании современных ракетных двигателей (сверхзвуковых реактивных двигателей). Работа содержит аналитическое и приближенное решение одномерного уравнения дробной адвекции-диффузии в пространстве (дробная производная рассматривается в смысле Капуто, случай с дробной производной в смысле Римана-Лиувилля подробно рассмотрен в [1]).

Ключевые слова: приближенные вычисления, дробное исчисление, дробное уравнение адвекции-диффузии, дробная производная Капуто, собственное значение, собственная функция, функция Миттага-Леффлера

Для цитирования: Захаров И.И., Алероев Т.С. Об одном методе приближенного решения первой начально-краевой задачи для дробного уравнения диффузии, применяемого в газовой динамике // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180672>

Original article

ABOUT ONE METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION, USED IN GAS DYNAMICS

Ivan I. Zakharov¹✉, Temirkhan S. Aleroev²

^{1,2}Moscow State University of Civil Engineering (National Research University),
Moscow, Russia

¹kroshvanya@yandex.ru✉

²aleroev@mail.ru

Abstract: This paper is devoted to the development of fundamentally new analytical and approximate methods for studying mathematical models of advection-diffusion using fractional calculus. Obtained results can have applications in various fields of applied mathematics and engineering. In particular, in the design of modern rocket engines

(supersonic jet engines). The fractional operators for this problem are considered in the Caputo sense. The problem is solved by the method of separation of variables (Fourier method). In the first section of the paper the theoretical aspects of the problem are presented. An important part of this section is the construction of the basis of the systems of eigenfunctions and adjoint functions of the problem. In this question we strongly rely on the work of Dzhrbashyan and Nersesyan. Taking into account the biorthogonality of such systems and the fact that the adjoint functions are finite in number, for further solution we can consider only the problem in which the adjoint functions are not generated. Passing to the solution of the problem, we consider the system of eigenfunctions of the biorthogonal problem, since the basis of the eigenfunctions of the problem is not orthogonal in $L_2(0,1)$. In order to determine the unknown coefficients of the Fourier series, due to the biorthogonality of the systems of functions, we use the scalar product of the corresponding functions. The eigenvalues of the problem are found as zeros of the Mittag-Leffler function. Thus, to solve the problem, we first find several eigenvalues. We construct eigenfunctions and functions of the conjugate problem. Since for an approximate solution of the problem it is sufficient to take only the first few terms of the series, we can construct the solution surfaces by considering only the partial sum of the obtained solution.

Keywords: approximate calculations, fractional calculus, fractional advection-diffusion equation, fractional Caputo derivative, eigenvalue, eigenfunction, Mittag-Leffler function

For citation: Zakharov I.I., Aleroev T.S. About one method of approximate solution of the first boundary value problem for the fractional diffusion equation, used in gas dynamics.

Trudy MAI, 2024, no. 136. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180672>

Введение

Дробное исчисление — это раздел прикладной математики, который фокусируется на производных и интеграл произвольного порядка (включая комплексные порядки). Он также известен как обобщенное интегральное и дифференциальное исчисление произвольного порядка. Горенфло Р. и Мейнард Ф. определили дробное исчисление как раздел математики, связанный с изучением и применением интегралов и производных произвольного порядка [2]. В работе разработаны принципиально новые приближенные методы изучения математических моделей тепломассообмена с помощью дробного исчисления. Полученные результаты могут иметь применения в различных областях прикладной математики и техники [15-22]. В частности, при проектировании современных ракетных двигателей (сверхзвуковых реактивных авиационных двигателей).

В этом исследовании предлагается разработать аналитические методы разделения переменных (метод Фурье) для решения пространственно-временного дробного адвекции-диффузионного уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, зависящими от пространства времени. Производная Капуто рассматривается в пространственном направлении.

Поскольку аналитическое решение некоторых моделей уравнений дробной диффузии трудно получить, в частности, очень популярным стали методы конечных разностей, и совсем недавно было опубликовано большое количество схем. Были выбраны две разные схемы с возрастающим порядком точности для временной, пространственной и пространственно-временной дробной диффузии с возрастающим

порядком точности для уравнения дробной диффузии во времени, пространстве-времени.

Так как эти две схемы достаточно сложны в данной работе приводится достаточно продуктивный и простой в реализации приближенный метод, позволяющий моделировать различные физические процессы.

Первая начально-краевая задача для уравнения дробной дисперсии

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения дробной дисперсии:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -D \cdot \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + ku(x,t), \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{u''(\tau,t) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}}$ – дробная производная (в смысле Капуто),

$1 < \alpha < 2$.

Будем искать нетривиальное решение, непрерывное в замкнутой области $\Omega(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$, однородного дробного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и начальному условию (3). Для решения этой задачи рассмотрим, как это принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу: найти не тождественно нулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям (2) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем

$$\begin{aligned} -D \cdot \frac{d^\alpha X}{dx^\alpha} T + kXT &= X \frac{dT}{dt}, \\ \frac{-D \cdot \frac{d^\alpha X}{dx^\alpha}}{X} + k &= \frac{T'}{T} = \mu \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu = const$, так как левая часть уравнения (5) зависит только от t , а правая только от x .

Граничные условия (2) дают:

$$X(0) = 0, X(1) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ получена задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -D \cdot \frac{d^\alpha X}{dx^\alpha} = (\mu - k)X(x), \\ X(0) = 0, X(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Данная задача (7) была подробно изучена в [1]- [13]. Как и в работе [1], при построении базиса системы собственных и присоединенных функций будем опираться на работу Джрбашяна М. и Нерсесяна А. [7], где был предложен метод построения собственных и присоединенных функций, порожденных краевыми задачами для дифференциальных уравнений дробного порядка. В данной работе мы существенно опираемся на этот метод. Введём основные понятия и предложения, используемые в этой методике.

Следуя [7], введём функции:

$$\Upsilon(x, \lambda) = \sum_{i=1}^2 \tilde{a}_i x^{\mu_i-1} E_{\alpha, \mu_i}(\lambda x^\alpha),$$

$$Z(x, \lambda) = \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i (1-x)^{\nu_i-1} E_{\alpha, \nu_i}(\lambda (1-x)^\alpha),$$

$$\omega(\lambda) = \lambda \sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_i \tilde{b}_j E_{\alpha, \mu_i + \nu_j}(\lambda),$$

где, $E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$ – функция Миттаг-Леффлера, $x \in [0, 1]$, $0 < \alpha < 2$,

$\mu_1 > \mu_2$, $\nu_1 > \nu_2$, $\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 = \tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2 = 1$. Заметим, что $\omega(\lambda)$ – целая функция порядка α со счетным числом нулей $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ (которые пронумерованы в порядке не убывания их модулей).

Как и в [7], отнесем нулю λ_n кратности $s \geq 1$ две системы функций

$$\left. \frac{\partial^i \Upsilon(x, \lambda)}{\partial \lambda^i} \right|_{\lambda=\lambda_n}$$

$$\sum_{k=0}^{s_n-i-1} \frac{b_{s_n-i-k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(i+1)} \left. \frac{\partial^k Z(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s_n - 1,$$

где

$$b_k = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left. \frac{d^k (\lambda - \lambda_n)^{s_n}}{d\lambda^k \omega(\lambda)} \right|_{\lambda=\lambda_n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s_n - 1.$$

Пронумеруем все функции, входящие в эти системы, в порядке не убывания чисел $|\lambda_n|$, при котором для каждого числа $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ соответствующим i – м функциям из этих групп будут придавать одинаковые номера.

Таким образом, системы $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=1}^2 \tilde{a}_i x^{\mu_i-1} E_{\alpha, \mu_i}(\lambda_n x^\alpha) \right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i (1-x)^{\nu_i-1} E_{\alpha, \nu_i}(\lambda_n (1-x)^\alpha) \right\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональны в $L_2(0,1)$, то есть:

$$\int_0^1 Y_n Z_k dx = \begin{cases} 1 & n = k, \\ 0 & n \neq k. \end{cases}$$

Приведённая выше биортогональная система является системой собственных и присоединенных функций краевой задачи для дробного дифференциального уравнения, поэтому доказана равносходимость биортогонального разложения с тригонометрическим рядом Фурье.

Присоединенные функции если и есть, то их всего лишь конечное число. Значит на сходимость разложения по собственным и присоединенным функциям это никак не влияет. Поэтому, когда речь идёт о сходимости таких разложений, оценивают только слагаемые с собственными функциями, не обращая внимания на слагаемые, содержащие присоединенные функции.

В некоторых случаях (в частности, когда $\tilde{a}_1 = \tilde{b}_1 = 1$, $\tilde{a}_2 = \tilde{b}_2 = 1$, $\mu_1 = \nu_1 = \alpha$, $1 < \alpha < 2$) присоединенных функций вообще нет.

Как и в работах [3, 5, 9] решение данной краевой задачи представим в вид суммы двух функций. Первая функция состоит из членов ряда, порождаемых из собственных функций, а вторая из членов ряда, порождаемых присоединенными функциями. Очевидно, что когда задача не порождает присоединенных функций, то второе слагаемое равняется нулю. В данной работе исследование решения задачи сводится к изучению первой функции.

Показано, что число $-\lambda_n = \frac{\mu_n - k}{D}$ является собственным значением (7), только в

том случае, когда оно является нулем функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(-\lambda)$:

$$E_{\alpha,2}(-\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(\alpha j + 2)} \quad (8)$$

Для таких λ_n существуют собственные функции задачи, равные

$$X_n(-\lambda_n, x) = xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (9)$$

Эти собственные значения λ_n , очевидно, соответствуют решениям уравнения

$$T'(t) = -\lambda T(t),$$

$$T_n(-\lambda_n, t) = \varphi_n e^{(-D\lambda_n + k)t},$$

где φ_n – еще не определенные коэффициенты.

Таким образом, функции

$$u_n(x, t) = X_n(-\lambda_n, t) \cdot T_n(-\lambda_n, t) = \varphi_n e^{(-D\lambda_n + k)t} xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими нулевым граничным условиям (2).

Перейдем теперь к решению задачи (1-3). Составляем ряд:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{(-D\lambda_n + k)t} xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (10)$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (11)$$

В [6] показано, что система функций $\{X_n(-\lambda_n, x)\} = \{xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha)\}_{n=1}^\infty$ образует базис в $L_2(0,1)$. Так как базис $\{X_n(-\lambda_n, x)\}_{n=1}^\infty$ не ортогонален, то вместе с системой $\{X_n(-\lambda_n, x)\}$ будем рассматривать систему

$$\{z_n(\lambda_n, x)\} = \{(1-x)E_{\alpha,2}(-\lambda_n(1-x)^\alpha)\}_{n=1}^\infty,$$

которая биортогональна $\{X_n(-\lambda_n, x)\}$ [6]. Вообще говоря, система $\{z_n(-\lambda_n, x)\}$ – система собственных функций сопряженной задачи [8]

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha Y}{d(1-x)^\alpha} = -\lambda Y(x), \\ Y(0) = 0, Y(1) = 0. \end{cases}$$

Для определения неизвестных коэффициентов φ_n обе части равенства (11) умножаем на систему функций $\{z_n(\lambda_n, x)\}$:

$$\varphi(x)z_n(\lambda_n, x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n X_n(\lambda_n, x)z_n(\lambda_n, x).$$

Равенство (12) можно почленно проинтегрировать по отрезку $[0,1]$:

$$\int_0^1 \varphi(x)z_n(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \int_0^1 X_n(x)z_n(x)dx. \quad (13)$$

Равенство (13) можно переписать в виде

$$(\varphi, z_n) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n (X_n, z_n), \quad (14)$$

где

$$(\varphi, z_n) = \int_0^1 \varphi(x) z_n(x) dx,$$

$$(X_n, z_n) = \int_0^1 X_n(x) z_n(x) dx.$$

В силу биортогональности систем функций $\{X_n\}$ и $\{z_n\}$ из (14) следует, что $(\varphi, z_n) = \varphi_n (X_n, z_n)$. Отсюда:

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)}. \quad (15)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) записывается в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)} e^{(-D\lambda_n+k)t} x E_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (16)$$

В работах [2,8] были изучены вопросы сходимости ряда (16) и его производных.

Приближенное решение первой краевой задачи

Для нахождения приближенного решения сначала вычислим несколько собственных значений λ_n из уравнения

$$E_{\alpha,2}(-\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{\Gamma(\alpha j+2)} = 0. \quad (17)$$

В таблице приведены результаты вычислений нескольких первых собственных значений при различных значениях $1 < \alpha < 2$.

Таблица 1

Первые собственные значения для $1 < \alpha < 2$

α	1.1	1.2	1.3	1.4
	1.353±7.250i	3.173±7.985i	5.473±8.273i	8.190±7.812i

λ_n	2.810±15.731i	7.132±18.959i	13.393±21.811i	22.012±23.568i
	4.303±24.691i	11.3999±31.246i	22.371±37.953i	38.507±43.723i
	5.829±33.969i	15.902±44.438i	32.169±55.962i	57.132±67.167i
	7.3825±43.488i	20.600±58.338i	42.647±75.471i	77.563±93.329i
	8.960±53.204i	25.466±72.825i	53.715±96.250i	99.581±121.845i

Первые собственные значения для $1 < \alpha < 2$

α	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
λ_n	11.147±6.123i	13.420	9.933	9.457	9.514
	33.314±23.130i	14.645	23.2510	28.477	33.598
	61.196±46.651i	47.293±18.851i	63.101±5.930i	62.200	73.039
	93.818±75.367i	91.705±43.625i	130.587±29.601i	97.063	124.419
	130.545±108.499i	145.569±75.805i	215.458±60.453i	155.450	191.146
	170.946±145.542i	207.859±114.486i	316.291±99.750i	196.596	267.945

Таким образом, для приближенного решения достаточно взять несколько первых членов ряда (16)

$$u(x,t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)} e^{(-D\lambda_n+k)t} xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (18)$$

Приближенное решение обозначим

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^N \frac{(\varphi, z_n)}{(X_n, z_n)} e^{(-D\lambda_n+k)t} xE_{\alpha,2}(-\lambda_n x^\alpha). \quad (19)$$

Пользуясь (19), построим некоторые поверхности приближенного решения при помощи программного комплекса MATLAB 9 (рис. 1-3).

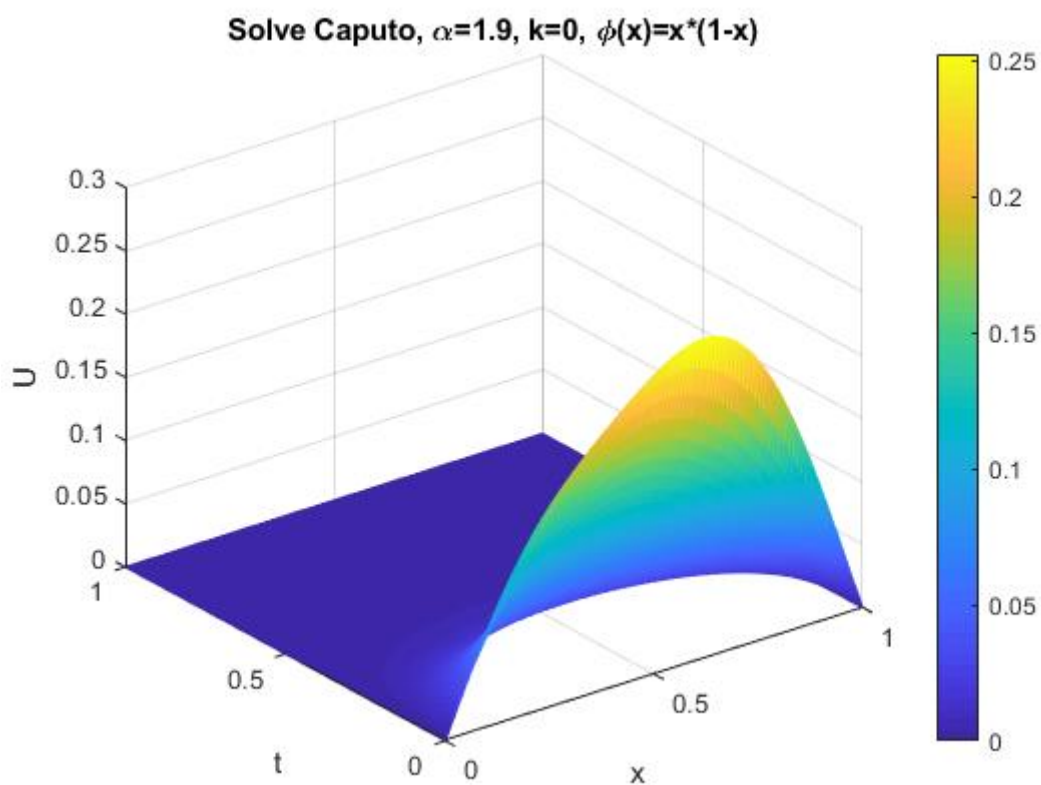


Рис. 1. Приближенное решение при $\alpha=1.9$, $k=0$, $\phi(x) = x - x^2$.

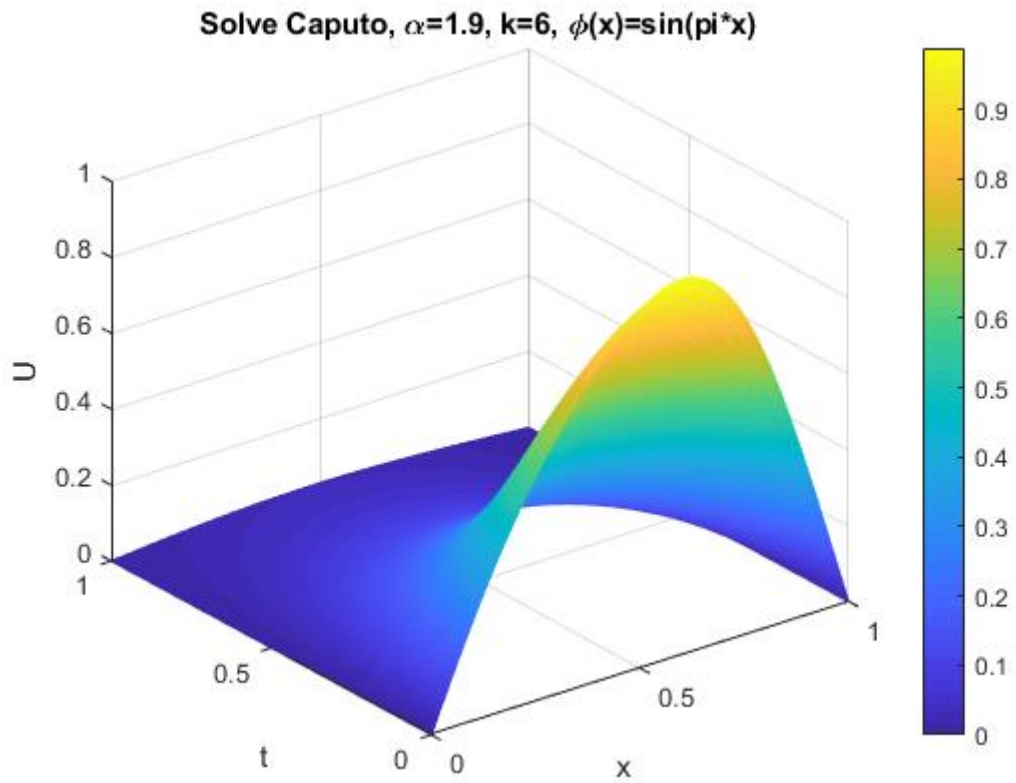


Рис. 2. Приближенное решение при $\alpha=1.9$, $k=6$, $\phi(x) = \sin(\pi x)$.

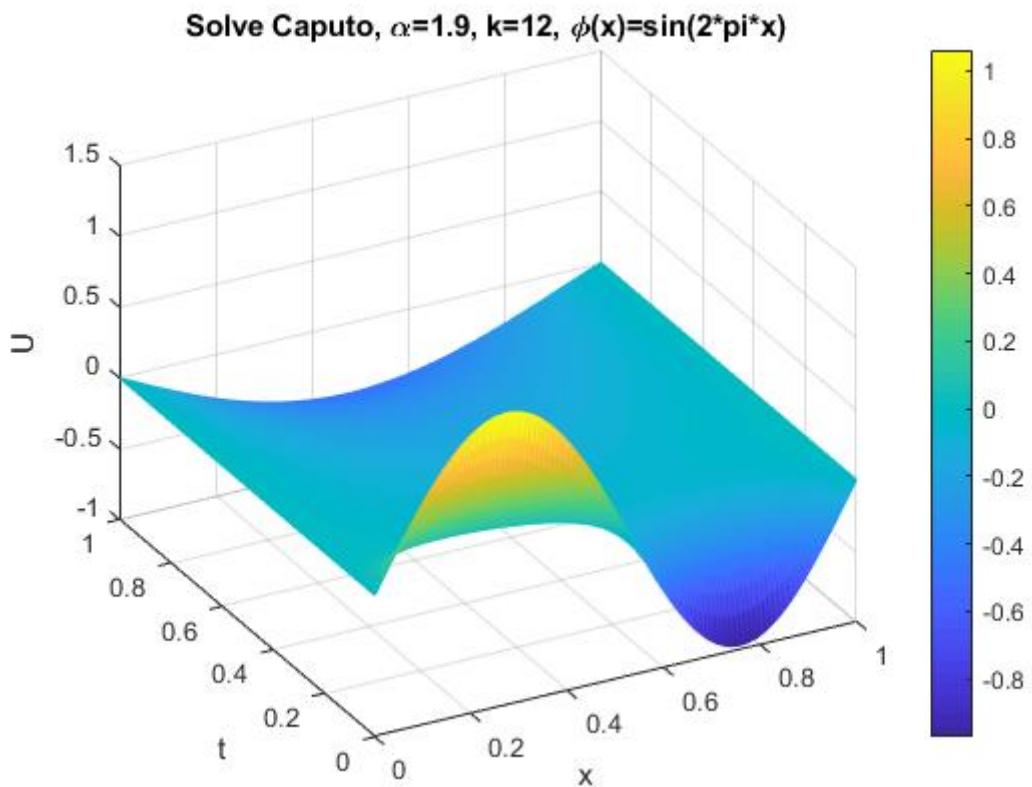


Рис. 3. Приближенное решение при $\alpha=1.9$, $k=6$, $\phi(x) = \sin(2\pi x)$.

Точность приближенного решения

Для оценки точности численного решения (18) согласно [11] рассмотрим величину:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\max_{\Omega} |u_N(x,t)|}{\max_{\Omega} |u_0(x,t)|} \cdot 100\%, \quad (20)$$

где $\Omega(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ – замкнутая область,

$$u_N(x,t) = \frac{(\varphi, z_N)}{(X_N, z_N)} e^{(-D\lambda_N + k)} x E_{\alpha,2}(-\lambda_N x^\alpha) - \text{последний член суммы (19)}.$$

Результаты вычислений (20) для различных начальных условий $\varphi(x)$ приведены в табл. 2-4.

Таблица 2

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = x - x^2$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\varepsilon_\alpha, \%$	0.063	0.055	0.048	0.037	0.033	0.029	0.025	0.023	0.022

Таблица 3

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = \sin \pi x$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\varepsilon_\alpha, \%$	0.039	0.034	0.029	0.026	0.023	0.020	0.017	0.015	0.014

Таблица 4

Результат расчета ε_α при $\varphi(x) = \sin 2\pi x$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\varepsilon_\alpha, \%$	0.055	0.049	0.042	0.036	0.031	0.027	0.024	0.021	0.019

Определим невязку, подставив приближенное решение (22) в (1):

$$\delta_0(x,t) = \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + D \cdot \frac{\partial^\alpha u_0(x,t)}{\partial x^\alpha} - k u_0(x,t),$$

$$\delta_\alpha = \frac{\max_{\Omega} |\delta_0(x,t)|}{\max_{\Omega} |u_0(x,t)|} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений невязки приближенного решения отображены в табл.

5-7.

Таблица 5

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = x - x^2$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\delta_\alpha, \%$	0.081	0.068	0.058	0.052	0.048	0.043	0.039	0.034	0.035

Таблица 6

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = \sin \pi x$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\delta_\alpha, \%$	0.096	0.086	0.074	0.054	0.048	0.039	0.031	0.027	0.023

Таблица 7

Результат расчета δ_α при $\varphi(x) = \sin 2\pi x$

A	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\delta_\alpha, \%$	0.113	0.095	0.083	0.071	0.059	0.047	0.039	0.034	0.031

Полученные результаты демонстрируют высокую точность аппроксимации решения исходной задачи (1-3) функцией (19).

Выводы

Представленные результаты демонстрируют возможности разработанной методики приближенного решения краевой задачи для уравнения дробной диффузии. Уравнение решается на основе аналитического метода разделения переменных (Метода Фурье). Производная Капуто рассматривается в пространственном направлении. Результаты вычислительного эксперимента демонстрируют высокую точность приближенного решения задачи. Полученные результаты могут иметь применения в различных областях прикладной математики и техники. В частности, при проектировании современных ракетных двигателей (сверхзвуковых реактивных двигателей).

Список источников

1. Захаров И.И., Алероев Т.С. Об одном методе приближенного решения первой краевой задачи для уравнения дробной диффузии // Труды МФТИ. 2024. Т. 16. № 1. С. 60–67.

2. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. In: Carpinteri, A. and Mainardi, F., Eds., *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1997, pp, 223-276.
3. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematics Letters*, 1996, vol. 9, no. 6, pp. 23-28. DOI: [10.1016/0893-9659\(96\)00089-4](https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00089-4)
4. Wyss W. The fractional diffusion equation // *Journal of Mathematical Physics*, 1986, vol. 27, no. 11, pp. 2782-2785. DOI: [10.1063/1.527251](https://doi.org/10.1063/1.527251)
5. Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, pp. 145-155. DOI: [10.1023/A:1016539022492](https://doi.org/10.1023/A:1016539022492)
6. Aleroev T., Kirane M., Tang. The boundary-value problem for a differential operator of fractional order // *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 194, pp. 499-512. DOI: [10.1007/s10958-013-1543-y](https://doi.org/10.1007/s10958-013-1543-y)
7. Нахушев А. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. - 271 с.
8. Джрбашян М., Нерсесян А. Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // *Труды Московского математического общества*. 1961. Т. 10. С. 89–179.
9. Luchko Y Some uniqueness and existence results for the initial-boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation // *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, no. 5, pp. 1766-1772. DOI: [10.1016/j.camwa.2009.08.015](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.015)
10. Aleroev T., Aleroeva H. Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives. In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, *Handbook of Fractional*

Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019.

11. Aleroev T. Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables // Mathematics, 2020, vol. 8, no. 11, pp. 1877. DOI: [10.3390/math8111877](https://doi.org/10.3390/math8111877)

12. Aleroev T., Aleroeva H., Huang J., Tamm M., Tang Y., Zhao Y. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations // Computers and Mathematics with Applications, 2017, vol. 73, no. 6, pp. 959-969. DOI: [10.1016/j.camwa.2016.06.038](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.038)

13. Mahmoud E.I., Aleroev T.S. Boundary Value Problem of Space-Time Fractional Advection Diffusion Equation // Mathematics, 2022, vol. 10, no. 3160, pp. 1-12. DOI: [10.3390/math10173160](https://doi.org/10.3390/math10173160)

14. Ali Tfayli. Sur quelques equations aux derivees partielles fractionnaires, theorie et applications. Mecanique des fluides [physics.class-ph], Francais, Universite de La Rochelle, 2020.

15. Сназин А.А., Шевченко А.В., Панфилов Е.Б., Прилуцкий И.К. Исследование взаимодействия недорасширенной газовой струи, выдуваемой из тела, с высокоскоростным набегающим потоком // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159782>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-05)

16. Zhong W., Zhang T., Tamura T. CFD Simulation of Convective Heat Transfer on Vernacular Sustainable Architecture: Validation and Application of Methodology // Sustainability, 2019, vol. 11 (15), pp. 4231. DOI: [10.3390/su11154231](https://doi.org/10.3390/su11154231)

17. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной

вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL:

<https://www.trudymai.ru/published.php?ID=75565>

18. Митрофанова Ю.А., Загитов Р.А., Трусков П.В. Оценка влияния учёта сопряжённого теплообмена между частями камеры сгорания и реагирующим потоком на результаты моделирования эмиссии оксидов азота // Труды МАИ. 2023. № 132.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176856>

19. Бендерский Л.А., Любимов Д.А. Математическое моделирование турбулентных струйных течений с помощью RANS/ILES-метода высокого разрешения // Авиационные двигатели. 2022. № 2 (15). С. 5–12. DOI: [10.54349/26586061_2022_2_05](https://doi.org/10.54349/26586061_2022_2_05)

20. Способин А.В. Бессеточный алгоритм расчёта сверхзвуковых течений невязкого газа // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159777>.

DOI: [10.34759/trd-2021-119-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-04)

21. Городнов А.О., Лаптев И.В. Влияние теплоемкости стенки на рост давления и температурное расслоение при тепловой конвекции паров водорода в вертикальной цилиндрической емкости // Труды МАИ. 2021. № 116. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=121008>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-02)

22. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=76821>

References

1. Zakharov I.I., Aleroev T.S. *Trudy MFTI*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 60–67.

2. Gorenflo R., Mainardi F. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In: Carpinteri, A. and Mainardi, F., Eds., *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1997, pp, 223-276.
3. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation, *Applied Mathematics Letters*, 1996, vol. 9, no. 6, pp. 23-28. DOI: [10.1016/0893-9659\(96\)00089-4](https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00089-4)
4. Wyss W. The fractional diffusion equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1986, vol. 27, no. 11, pp. 2782-2785. DOI: [10.1063/1.527251](https://doi.org/10.1063/1.527251)
5. Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain, *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, pp. 145-155. DOI: [10.1023/A:1016539022492](https://doi.org/10.1023/A:1016539022492)
6. Aleroev T., Kirane M., Tang. The boundary-value problem for a differential operator of fractional order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 194, pp. 499-512. DOI: [10.1007/s10958-013-1543-y](https://doi.org/10.1007/s10958-013-1543-y)
7. Nakhushhev A. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* (Fractional calculus and its applications), Moscow, Fizmatlit, 2003, 271 p.
8. Dzhrbashyan M., Nersesyan A. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1961, vol. 10, pp. 89–179.
9. Luchko Y Some uniqueness and existence results for the initial-boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, no. 5, pp. 1766-1772. DOI: [10.1016/j.camwa.2009.08.015](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.015)
10. Aleroev T., Aleroeva H. *Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives*. In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, *Handbook of Fractional*

Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019.

11. Aleroev T. Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, pp. 1877. DOI: [10.3390/math8111877](https://doi.org/10.3390/math8111877)

12. Aleroev T., Aleroeva H., Huang J., Tamm M., Tang Y., Zhao Y. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2017, vol. 73, no. 6, pp. 959-969. DOI: [10.1016/j.camwa.2016.06.038](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.038)

13. Mahmoud E.I., Aleroev T.S. Boundary Value Problem of Space-Time Fractional Advection Diffusion Equation, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 3160, pp. 1-12. DOI: [10.3390/math10173160](https://doi.org/10.3390/math10173160)

14. Ali Tfayli. *Sur quelques equations aux derivees partielles fractionnaires, theorie et applications. Mecanique des fluides* [physics.class-ph], Francais, Universite de La Rochelle, 2020.

15. Snazin A.A., Shevchenko A.V., Panfilov E.B., Prilutskii I.K. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159782>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-05)

16. Zhong W., Zhang T., Tamura T. CFD Simulation of Convective Heat Transfer on Vernacular Sustainable Architecture: Validation and Application of Methodology, *Sustainability*, 2019, vol. 11 (15), pp. 4231. DOI: [10.3390/su11154231](https://doi.org/10.3390/su11154231)

17. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: <https://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565>

18. Mitrofanova Yu.A., Zagitov R.A., Trusov P.V. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176856>

19. Benderskii L.A., Lyubimov D.A. *Aviatsionnye dvigateli*, 2022, no. 2 (15), pp. 5–12.

DOI: [10.54349/26586061_2022_2_05](https://doi.org/10.54349/26586061_2022_2_05)

20. Sposobin A.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL:

<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159777>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-04)

21. Gorodnov A.O., Laptev I.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL:

<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121008>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-02)

22. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=76821>

Статья поступила в редакцию 01.05.2024

Одобрена после рецензирования 15.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 01.05.2024; approved after reviewing on 15.05.2024; accepted for publication on 27.06.2024