



Научная статья

УДК 517.958;539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188269>

EDN: <https://www.elibrary.ru/UKDKRQ>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТЕНОК НА УПРУГОМ ПОДВЕСЕ, ОБРАЗУЮЩИХ ДВА ПЛОСКИХ КАНАЛА С ОБЩЕЙ СТЕНКОЙ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

В.С. Попов^{1,2}✉ , А.А. Попова^{1,3} , А.А. Орлова¹, М.В. Попова⁴

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

²Институт проблем точной механики и управления Саратовского научного центра РАН,

³Саратовская государственная юридическая академия,

⁴Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н.Г. Чернышевского,

г. Саратов, Россия

✉ vic_p@bk.ru

Цитирование: Попов В.С., Попова А.А., Орлова А.А., Попова М.В. Математическое моделирование колебаний стенок на упругом подвесе, образующих два плоских канала с общей стенкой, заполненных вязкими жидкостями // Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188269>

Аннотация. В работе осуществлена разработка и исследование математической модели для изучения динамики взаимодействия параллельных жестких стенок двух узких каналов, имеющих общую стенку, с заполняющими их пульсирующими несжимаемыми жидкостями. Рассмотрен случай, когда верхняя стенка первого канала неподвижная, а его нижняя стенка имеет упругий подвес и является верхней стенкой второго канала, нижняя стенка которого также имеет упругий подвес. Стенки на упругих подвесах могут перемещаться в направлении нормали к их поверхности. Движение жидкости в первом канале возбуждается за счет ее взаимодействия с вибрирующими стенками канала. Движение жидкости во втором канале происходит за счет заданных на его торцах статического перепада давления и гармонически пульсирующего давления. При этом давление на торцах

первого канала считается постоянным и равным начальному статическому уровню давления в рассматриваемых каналах. При разработке модели принимали во внимание вязкость жидкостей, различие их физических свойств и изучали установившиеся колебания стенок каналов. Для описания сложной совокупности разнородных тел рассматриваемой колебательной системы использован подход Лагранжа при записи уравнений движения жестких тел и подход Эйлера для уравнений динамики жидкостей, а также осуществляли согласование данных подходов при записи условий на границах контакта жестких тел и вязкой жидкости. В результате сформулирована математическая модель в виде нелинейной краевой задачи математической физики, включающей в себя: обыкновенные дифференциальные уравнения динамики двух стенок рассматриваемых каналов, уравнения в частных производных динамики вязких жидкостей, дополненные граничными условиями на торцах каналов и на границах контакта жидкости и стенок, а также выражения для сил, действующих со стороны жидкостей на стенки каналов. Проведен асимптотический анализ построенной модели, для этого предложен комплекс безразмерных переменных и выделены малые параметры исследуемой колебательной системы. Рассматривали динамику жидкости в рамках гидродинамической смазки и применяли метод возмущений, что позволило осуществить линеаризацию модели и определить гидроупругие отклики стенок каналов в виде амплитудных и фазовых частотных характеристик. На заключительном этапе проведено численное исследование полученных гидроупругих откликов, позволившее определить особенности гидроупругих колебаний в рассматриваемой системе. Показано наличие двух резонансных частот колебаний стенок, а также существование для каждой из стенок антирезонанса. Проведена оценка влияния изменения величины зазора каналов и вязкости жидкости на подавление колебаний стенок каналов.

Ключевые слова: математическое моделирование; вычислительный эксперимент; колебания; вязкая жидкость; жесткая стенка на упругом подвесе.

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания по теме 125020501400-6.

MATHEMATICAL MODELING OF VIBRATIONS OF WALLS WITH AN ELASTIC SUPPORT, FORMING TWO PLANE CHANNELS WITH A COMMON WALL, FILLED WITH VISCOUS LIQUIDS

V.S. Popov^{1,2}✉, A.A. Popova^{1,3}, A.A. Orlova¹, A.A. Popova⁴

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,

²Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,

³Saratov State Law Academy,

⁴Saratov State University,

Saratov, Russia

✉ vic_p@bk.ru

Citation: Popov V.S, Popova A.A, Orlova A.A., Popova M.V. Mathematical modeling of vibrations of walls with an elastic support, forming two plane channels with a common wall, filled with viscous liquids // Trudy MAI. 2026. No. 148. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188269>

Abstract. This paper presents a mathematical model for studying the dynamics of interaction between parallel rigid walls of two narrow channels. That channels sharing a common wall and filled with pulsating incompressible liquids with different physical properties. The case considered is one in which the upper wall of the first channel is stationary, while its bottom wall is elastically supported and serves as the upper wall of the second channel, the bottom wall of which also has an elastic support. The walls on the elastic supports can move in the direction normal to their surfaces. Liquid motion in the first channel is excited by its interaction with the vibrating channel walls. Liquid motion in the second channel occurs due to a static pressure drop and a harmonically pulsating pressure specified at its ends. The pressure at the ends of the first channel is assumed to be constant and equal to the initial static pressure in the channels under consideration. When developing the model, the viscosity of the liquids and differences in their physical properties were taken into account, and steady-state oscillations of the channel walls were studied. To describe a complex oscillatory system of heterogeneous bodies, the Lagrange approach for the equations of motion of rigid bodies and the Euler approach for the equations of fluid dynamics were used. These approaches were reconciled when writing the boundary conditions at the contact surface between rigid bodies and viscous

liquids. As a result, a mathematical model was formulated as a nonlinear boundary value problem of mathematical physics. It including: ordinary differential equations for the dynamics of two channels walls under consideration, partial differential equations for the dynamics of viscous liquids, supplemented by boundary conditions at the channel ends and at the contact surface between the liquids and the walls, as well as expressions for the forces acting from the fluids on the channel walls. An asymptotic analysis of the mathematical model was done. For this purpose, dimensionless variables was proposed and small parameters of the oscillatory system under consideration were identified. Liquid dynamics were considered within the framework of hydrodynamic lubrication and a perturbation method was applied, which allowed for the linearization of the model and the determination of the hydroelastic responses of the channel walls in the form of amplitude and phase frequency characteristics. At the final stage, a numerical study of the obtained hydroelastic responses was conducted, allowing us to determine the characteristics of hydroelastic oscillations in the system under study. The presence of two resonant frequencies of wall oscillations was demonstrated, as well as the existence of an antiresonance for each wall. The effect of varying the channel gap size and fluid viscosity on the suppression of channel wall oscillations was assessed.

Keywords: mathematical modeling; vibrations; viscous fluid; rigid wall with an elastic support; hydroelasticity; computational experiment.

Funding: this work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under State Assignment No. 125020501400-6.

Введение

Разработка математических моделей для исследования динамики взаимодействия упругих элементов конструкции с жидкостью имеет важное значение для авиакосмической отрасли [1-3]. Например, в [4] предложен подход к расчету и аналитическому синтезу активной системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла воздушного судна в рамках модели с двумя сосредоточенными массами для учета частот первого и третьего тонов изгибных колебаний полукрыла. В [5] разработана математическая модель для изучения, в нелинейной постановке, колебаний вокруг горизонтальной оси жесткого тела с

осесимметричной полостью, полностью заполненной двумя несмешивающимися жидкостями, которые приняты идеальными и несжимаемыми. Исследование динамики взаимодействия жестких стенок плоского канала с вязкой несжимаемой жидкостью, заполняющей данный канал при его установке на вибрирующее основание проведено в [6] и предложены подходы для использования разработанной модели при математическом моделировании динамических процессов в вибрационных машинах. Обобщение указанной модели для случая движения в нем вязкой жидкости и представления одной из стенок канала жестким вибрирующим штампом на упругом подвесе, а второй - однородной упругой пластиной проведено в [7, 8]. В статье [9] авторы разработали математическую модель со сосредоточенными массами для исследования в ее рамках взаимодействия упругого полого цилиндра, окруженного упругой средой, с находящимися в его внутренней полости вязкой жидкостью и вибрирующим соосным жестким цилиндром. Разработанная модель и результаты моделирования верифицированы с экспериментальными данными применительно к поплавковому прибору навигации.

В [10] проведено моделирование стационарных гидроупругих колебания двух бесконечно протяженных параллельных пластин Кирхгофа, между которыми находится слой вязкой несжимаемой жидкости. Авторы исследовали плоскую линейную задачу для узкого канала, установленного на упругом основании, и принимали во внимание инерцию слоя жидкости. В работах [11, 12] предложены математические модели для узкого канала с параллельными упругими стенками конечного размера, взаимодействующими с пульсирующей вязкой жидкостью, заполняющей канал. В [11] упругая деформация верхней стенки учитывается за счет «эффективной жесткости», определяемой исходя из ее статического прогиба как балки Бернулли, а нижняя стенка полагается жесткой. В [12] предложена математическая модель, обобщающая модели [10, 11], для канала, образованного двумя упругими пластинами конечных размеров и установленного на линейно-упругом основании. Предложенная модель позволяет проводить моделирование гидроупругих колебаний для основной и последующих мод колебаний стенок рассматриваемого канала.

В [13] разработана модель для исследования поперечных гидроупругих колебаний асимметричной кольцевой пластины, взаимодействующей с ограниченным объемом несжимаемой идеальной жидкости, и предложены подходы к определению собственных частот рассматриваемой колебательной системы. Численное моделирование подавления резонансных колебаний пластины, взаимодействующей с идеальной несжимаемой жидкостью, с использованием активной системы подавления колебаний на основе пьезоэлектрических элементов, установленных на пластине, было проведено в [14]. В работе [15] проведено математическое моделирование динамической устойчивости упругой пластины, расположенной в канале с жесткими параллельными стенками, вдоль которого движется потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости.

Отметим, также несколько работ, близких к тематике предлагаемой статьи и посвященных моделированию взаимодействия вязкого сжимаемого газа с жесткими или упругими стенками. В [16] предложена математическая модель для изучения в плоской постановке взаимодействия тонкого слоя вязкого газа при изотермическом состоянии с упругой однородной пластиной, а в [17] модель обобщена учетом трехслойности пластины. В этих работах авторами осуществлена линеаризация уравнений динамики вязкого газа и аналитическое исследование полученной линейной модели аэроупругости проведено в первом приближении по методу Бубнова-Галеркина для режима установившихся гармонических колебаний.

Численное моделирование взаимодействия затвора предохранительного клапана в виде жесткого диска на упругом подвесе с вязким сжимаемым газом проведено в [18] на базе модифицированного метода Годунова, предложенного авторами. В [19, 20] аналитически определены и численно исследованы нелинейные гидроупругие отклики стенки плоского канала, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкого газа. В [19] рассматривался канал, имеющий жесткую стенку с нелинейной упругой опорой, а в [20] стенка канала представлялась пластиной Кирхгофа, покоящейся на нелинейном упругом основании. Математические модели плоских задач взаимодействия вязкой

сжимаемой жидкости (газа) со стенками бесконечно длинного узкого канала, нижняя стенка которого жесткая, а верхняя стенка представляет собой пьезоэлектрическую пластину или предварительно деформированную пластину из высоко упругого материала, были разработаны и исследованы в [21, 22].

В вышеупомянутых работах не проводилось математическое моделирование гидроупругих колебаний стенок двух каналов с общей стенкой и содержащих жидкости с разными физическими свойствами, поэтому в предлагаемой статье разработана и исследована математическая модель для указанного случая.

Математическая модель упругогидродинамики жестких стенок на упругом подвесе, взаимодействующих с двумя слоями вязких жидкостей

Рассмотрим две параллельные жесткие пластины на линейно-упругих подвесах, образующие подвижные стенки двух узких каналов, заполненных двумя жидкостями с различными физическими свойствами (см. рисунок 1). Подвесы позволяют пластинам перемещаться в направлении нормали к их поверхности. Пластина 1 является общей стенкой рассматриваемых каналов, т.е. для первого канала она является нижней стенкой, а для второго канала его верхней стенкой. Пластина 2 - нижняя стенка второго канала, а верхняя стенка 3 первого канала полагается жесткой и неподвижной. Стенки каналов в плане представляют собой равные прямоугольники со сторонами $2l \times b$. Размер одной стороны $b \gg 2l$, поэтому далее рассмотрим для каналов плоскую модель [23, 24]. Ввиду узости каналов принимаем, что толщина слоев жидкости в невозмущенном состоянии равна $\delta_1 \ll l$ и $\delta_2 \ll l$, а течение жидкости в каналах ползущее [23, 24]. Будем исходить из того, что амплитуды колебаний стенок каналов значительно меньше толщины слоя жидкости в них. Движение жидкости во втором канале происходит за счет заданного на его торцах стационарного перепада давления Δp с пульсационной составляющей p^* . В первом канале движение жидкости возникает за счет ее взаимодействия с его движущейся стенкой. На торцах данного канала давление считается постоянным и равным стационарному уровню давления p_0 . Центры масс подвижных стенок совпадают с их геометрическими центрами. Силой тяжести далее пренебрегаем, жидкости 4 и 5 в каналах принимаем ньютоновскими и

несжимаемыми. Полагаем, что стенки каналов совершают установившиеся колебания, так как вязкость жидкости приводит к быстрому затуханию собственных колебаний в рассматриваемой колебательной неконсервативной системе с вязким трением [25, 26].

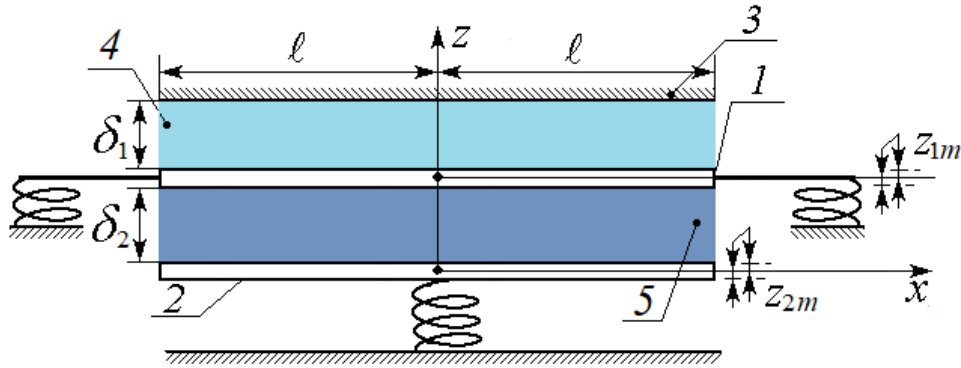


Рисунок 1- Два плоских канала с общей подвижной стенкой: 1 – общая стенка первого и второго каналов, имеющая линейно-упругий подвес; 2 – нижняя стенка второго канала с линейно-упругим подвесом; 3 – неподвижная верхняя стенка первого канала; 4 – вязкая жидкость, заполняющая первый канал; 5 – вязкая жидкость, заполняющая второй канал

Введем декартову систему координат x, y, z , связанную с неподвижной верхней стенкой первого канала, для определенности, пусть ее центр расположен в центре масс нижней стенки второго канала в невозмущенном состоянии, а ось z направлена по нормали к стенкам канала. Будем представлять закон движения центра масс общей стенки относительно ее положения в невозмущенном состоянии в виде $z_1 = z_{1m} f_1(\omega t)$. Закон движения центра масс нижней стенки второго канала относительно ее положения в невозмущенном состоянии представим как $z_2 = z_{2m} f_2(\omega t)$. В данных законах z_{1m} , z_{2m} суть амплитуды колебаний общей стенки и нижней стенки второго канала, соответственно. Тогда уравнения движения стенок каналов в подходе Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + n_1 z_1 = N_1 - N_{21}, \quad m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + n_2 z_2 = N_{22}. \quad (1)$$

Здесь m_1 – масса общей стенки первого и второго каналов, m_2 – масса нижней стенки второго канала, n_1 – коэффициент жесткости упругого подвеса общей стенки, n_2 – коэффициент жесткости упругого подвеса нижней стенки второго

канала, N_1 – возмущающая сила со стороны жидкости в первом канале, N_{21} – возмущающая сила со стороны жидкости во втором канале, действующая на общую стенку, N_{22} – возмущающая сила со стороны жидкости во втором канале, действующая на нижнюю стенку второго канала, ω – частота пульсации давления на торцах первого канала, t – время.

Силы N_1, N_{21}, N_{22} определяются нормальными напряжениями, соответствующей вязкой жидкости в первом или во втором каналах, которые действуют на поверхности контакта элемента соответствующей стенки канала. Определение данных напряжений требует дополнить уравнения (1) уравнениями движения вязких жидкостей в первом и втором каналах. Для записи данных уравнений используем введенную декартову систему координат x, z . Но принимаем во внимание, если рассматривается жидкость в первом канале, то начало системы координат находится в центре поверхности контакта жидкости с общей стенкой в невозмущенном состоянии. Если рассматривается жидкость во втором канале, то начало системы координат совпадает с центром внутренней поверхности нижней стенки второго канала в ее невозмущенном состоянии.

С учетом указанного выше, уравнения движения жидкости в i -ом канале в подходе Эйлера имеют вид [24]

$$\frac{1}{\rho^{(i)}} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x} = v^{(i)} \left(\frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial z^2} \right), \quad \frac{1}{\rho^{(i)}} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial z} = v^{(i)} \left(\frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} = 0.$$

Здесь $\rho^{(i)}$ – плотность жидкости в i -ом канале, $v^{(i)}$ – кинематический коэффициент вязкости жидкости в i -ом канале, $u_z^{(i)}$ – компонента вектора скорости жидкости в i -ом канале по оси z , $u_x^{(i)}$ – компонента вектора скорости жидкости в i -ом канале по оси x , $p^{(i)}$ – давление жидкости в i -ом канале, $i = 1, 2$.

Для вязкой жидкости в первом канале ($i=1$), уравнения (2) дополняются следующими граничными условиями

$$u_x^{(1)} = 0, \quad u_z^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad z = \delta_1, \quad (3)$$

$$u_x^{(1)} = 0, \quad u_z^{(1)} + z_{1m} f_1(\omega t) \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} = z_{1m} \frac{df_1(\omega t)}{dt} \quad \text{при} \quad z = z_{1m} f_1(\omega t),$$

$$p^{(1)} = p_0 \text{ при } x = \pm \ell,$$

а для вязкой жидкости во втором канале ($i=2$) уравнения (2) будут иметь следующие граничные условия

$$u_x^{(2)} = 0, \quad u_z^{(2)} + z_{1m} f_1(\omega t) \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} = z_{1m} \frac{df_1(\omega t)}{dt} \text{ при } z = \delta_2 + z_{1m} f_1(\omega t), \quad (4)$$

$$u_x^{(2)} = 0, \quad u_z^{(2)} + z_{2m} f_2(\omega t) \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} = z_{2m} \frac{df_2(\omega t)}{dt} \text{ при } z = z_{2m} f_2(\omega t),$$

$$p^{(2)} = p_0 + \Delta p + p^*(\omega t) \text{ при } x = -\ell, \quad p^{(2)} = p_0 + p^*(\omega t) \text{ при } x = \ell.$$

Здесь $p^*(\omega t) = p_m f_p(\omega t)$ – заданный закон пульсации давления на торцах второго канала, p_0 – постоянный уровень давления на торцах каналов (далее мы полагаем, не теряя общности, что стационарный уровень давления жидкости p_0 является начальным уровнем отсчета давления и принимаем его за нуль). Для обеспечения совпадения компонент скоростей жидкости и стенок каналов, записанных в подходах Эйлера и Лагранжа, компоненты скорости жидкости были аналитически продлены разложением в ряд Тейлора [19, 27].

При записи выражений для сил N_1, N_{21}, N_{22} принимаем во внимание приложение данных сил к центрам масс стенок и несовпадение в возмущенном состоянии координат Эйлера и Лагранжа. Поэтому переносим нормальные напряжения жидкостей на срединную поверхность стенок каналов с последующим их аналитическим продлением аналогично [19, 27]. В результате имеем

$$N_1 = b \int_{-\ell}^{\ell} \left(q_{zz}^{(1)} + z_{1m} f_1(\omega t) \frac{\partial q_{zz}^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_1} dx, \quad N_{2i} = b \int_{-\ell}^{\ell} \left(q_{zz}^{(2)} + z_{im} f_i(\omega t) \frac{\partial q_{zz}^{(2)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=(2-i)\delta_2+z_i} dx, \quad (5)$$

$$q_{zz}^{(i)} = -p^{(i)} + 2\rho^{(i)} v^{(i)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}, \quad i=1, 2,$$

где $q_{zz}^{(i)}$ – нормальное напряжение жидкости в i -ом канале.

Переход к безразмерным переменным, асимптотический анализ математической модели

Для проведения асимптотического анализа построенной математической модели введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_i}, \quad \tau = \omega t, \quad u_x^{(i)} = z_{1m} \omega \frac{\ell}{\delta_i} U_{\xi}^{(i)}, \quad u_z^{(i)} = z_{1m} \omega U_{\zeta}^{(i)}, \quad (6)$$

$$p^{(i)} = (i-1)p^*(\tau) + \frac{\rho^{(i)} v^{(i)} z_{1m} \omega}{\delta_i} \frac{\ell^2}{\delta_i^2} P^{(i)}, \quad \Delta P = \frac{\delta_1}{\rho^{(2)} v^{(2)} z_{1m} \omega} \frac{\delta_2^2}{\ell^2} \Delta p.$$

Осуществляя подстановку (6) в уравнения модели (2)-(5) получим:

- безразмерные уравнения динамики вязкой жидкости в i -ом канале ($i=1, 2$)

$$\frac{\partial P^{(i)}}{\partial \xi} = \left(\frac{\delta_i}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_{\xi}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_{\xi}^{(i)}}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P^{(i)}}{\partial \zeta} = \left(\frac{\delta_i}{\ell}\right)^2 \left[\left(\frac{\delta_i}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_{\zeta}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_{\zeta}^{(i)}}{\partial \zeta^2} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_{\xi}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}^{(i)}}{\partial \zeta} = 0,$$

с граничными условиями при $i=1$ (для жидкости в первом канале)

$$U_{\xi}^{(1)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \quad (8)$$

$$U_{\xi}^{(1)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(1)} + \frac{z_{1m}}{\delta_1} f_1(\tau) \frac{\partial U_{\zeta}^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \frac{z_{1m}}{\delta_1} f_1(\tau),$$

$$P^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1,$$

и с граничными условиями при $i=2$ (для жидкости во втором канале)

$$U_{\xi}^{(2)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(2)} + \frac{z_{1m}}{\delta_2} f_1(\tau) \frac{\partial U_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \frac{z_{1m}}{\delta_2} f_1(\tau) \quad (9)$$

$$U_{\xi}^{(2)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(2)} + \frac{z_{1m}}{\delta_2} \frac{z_{2m}}{z_{1m}} f_2(\tau) \frac{\partial U_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \frac{z_{1m}}{\delta_2} \frac{z_{2m}}{z_{1m}} f_2(\tau),$$

$$P^{(2)} = \Delta P \quad \text{при} \quad \xi = -1, \quad P^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1,$$

- выражения для возмущающих сил

$$N_1 = -b\ell\rho^{(1)}v^{(1)}\omega \frac{z_{1m}}{\delta_1} \frac{\ell^2}{\delta_1^2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{z_{1m}}{\delta_1} f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(P^{(1)} - \frac{\delta_1^2}{\ell^2} 2 \frac{\partial U_{\zeta}^{(1)}}{\partial \zeta} \right) \bigg|_{\zeta=\frac{z_{1m}}{\delta_2} f_1(\tau)} d\xi, \quad (10)$$

$$N_{2i} = -2b\ell p(\tau) - b\ell\rho^{(2)}v^{(2)}\omega \frac{z_{im}}{\delta_1} \frac{\ell^2}{\delta_1^2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{z_{im}}{\delta_2} f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(P^{(2)} - \frac{\delta_2^2}{\ell^2} 2 \frac{\partial U_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} \right) \bigg|_{\zeta=(2-i)+\frac{z_{im}}{\delta_2} f_i(\tau)} d\xi, \quad i = 1, 2.$$

Согласно принятым допущениям $\frac{z_{2m}}{z_{1m}} = O(1)$, $\frac{\delta_2}{\delta_1} = O(1)$ и можно выделить два

независимых малых параметра $\frac{\delta_i}{\ell} = \psi \ll 1$ и $\frac{z_{1m}}{\delta_i} = \lambda \ll 1$. Тогда пренебрегая членами

при малом параметре ψ в (7), (10) осуществим переход к рассмотрению тонких слоев жидкости в каждом из каналов по аналогии с подходом, принятым в гидродинамической смазке [23, 24]. В результате получим следующие уравнения

движения тонких слоев жидкости в рассматриваемых каналах и выражения для возмущающих сил, действующих на стенки каналов

$$\frac{\partial P^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_{\xi}^{(i)}}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_{\xi}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (11)$$

$$N_1 = -\frac{b\ell\rho^{(1)}v^{(1)}\omega}{\Psi} \frac{\lambda}{\Psi} \int_{-1}^1 \left(1 + \lambda f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) P^{(1)} \Big|_{\zeta=\lambda f_1(\tau)} d\xi, \quad (12)$$

$$N_{2i} = -2b\ell p(\tau) - b\ell \frac{\rho^{(2)}v^{(2)}\omega}{\Psi} \frac{\lambda}{\Psi} \int_{-1}^1 \left(1 + \lambda \frac{z_{im}}{z_{1m}} f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) P^{(2)} \Big|_{\zeta=(2-i)+\lambda \frac{z_{im}}{z_{1m}} f_i(\tau)} d\xi, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения (11) дополняются граничными условиями (8), (9), уравнениями (1) с учетом выражений (12). Для исследования данной модели применим метод возмущений [28, 29] вводя в рассмотрение следующие асимптотические разложения искомых функций по малому параметру λ

$$U_{\xi}^{(i)} = U_{\xi_0}^{(i)} + \lambda U_{\xi_1}^{(i)} + \dots, \quad U_{\zeta}^{(i)} = U_{\zeta_0}^{(i)} + \lambda U_{\zeta_1}^{(i)} + \dots, \quad P^{(i)} = P_0^{(i)} + \lambda P_1^{(i)} + \dots \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), (12) и ограничиваясь первым членом асимптотического разложения (далее нижний индекс 0 опускается), а также учитывая, что согласно второго уравнения (11) давление $P^{(i)}$ не зависит от ζ (или размерной координаты z) окончательно получим следующую линейаризованную математическую модель рассматриваемой колебательной системы

$$\frac{\partial P^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_{\xi}^{(i)}}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_{\xi}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (14)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + n_i z_i = (2-i)N_1 + (-1)^i N_2, \quad (15)$$

$$N_i = -2b\ell(i-1)p(\tau) - \frac{b\ell\rho^{(i)}v^{(i)}\omega}{\Psi} \frac{\lambda}{\Psi} \int_{-1}^1 P^{(i)} d\xi, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

с граничными условиями при $i=1$

$$U_{\xi}^{(1)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \quad U_{\xi}^{(1)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(1)} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (17)$$

$$P^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1,$$

и с граничными условиями при $i=2$

$$U_{\xi}^{(2)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(2)} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \quad U_{\xi}^{(2)} = 0, \quad U_{\zeta}^{(2)} = \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (18)$$

$$P^{(2)} = \Delta P \quad \text{при} \quad \xi = -1, \quad P^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

При записи (15), (16) учтено, что для тонкого слоя жидкости во втором канале имеем $N_{21} = N_2$, $N_{22} = -N_2$.

Определение гидроупругих откликов стенок и их численное моделирование

Решая задачу динамики жидкости (14), (17) для первого канала ($i=1$) и задачу динамики жидкости (14), (18) для второго канала ($i=2$) находим законы изменения давления в каждом из каналов в следующем виде

$$P^{(1)} = 6(1 - \xi^2) \frac{df_1(\tau)}{d\tau}, \quad P^{(2)} = 6(\xi^2 - 1) \left[\frac{df_1(\tau)}{d\tau} - \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{1 - \xi}{2} \Delta P. \quad (19)$$

Учитывая (19) в (16), а затем вычисляя определенные интегралы и подставляя результат в (15) получили следующую систему двух уравнений гидроупругих колебаний стенок рассматриваемых каналов

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + (K^{(2)} + K^{(1)}) \frac{dz_1}{dt} + n_1 z_1 - K^{(2)} \frac{dz_2}{dt} = \ell b \Delta p + 2 \ell b p_m f_p(\omega t), \quad (20)$$

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + K^{(2)} \frac{dz_2}{dt} + n_2 z_2 - K^{(2)} \frac{dz_1}{dt} = -\ell b \Delta p - 2 \ell b p_m f_p(\omega t),$$

Здесь $K^{(1)} = 8bp^{(1)}v^{(1)}\ell^3(\delta_1)^{-3}$, $K^{(2)} = 8bp^{(2)}v^{(2)}\ell^3(\delta_2)^{-3}$ – коэффициенты, оценивающие демпфирующие свойства жидкости в первом и втором каналах соответственно.

Постоянная составляющая возмущающей силы $\ell b \Delta p$ возникает за счет статического перепада давления жидкости на торцах второго канала и ее воздействие в невозмущенном состоянии компенсируется упругими подвесами стенок каналов. Поэтому далее рассматриваем установившиеся колебания стенок каналов вызванные воздействием только динамической составляющей возмущающей силы $2\ell b p_m f_p(\omega t)$ полагая для определенности $f_p(\omega t) = \sin \omega t$. В этом случае решение системы (15) было найдено в виде

$$z_1 = A_1(\omega) \sin(\omega t + \varphi_1(\omega)), \quad z_2 = A_2(\omega) \sin(\omega t + \varphi_2(\omega)), \quad (21)$$

где $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ – амплитудные частотные отклики общей стенки каналов и нижней стенки второго канала, соответственно (или их амплитудно-частотные характеристики), $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ – фазовые частотные характеристики указанных стенок каналов.

Полученные выражения для $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ и $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ имеют вид

$$A_1(\omega) = 2\ell b p_m \sqrt{\frac{(n_2 - m_2 \omega^2)^2}{(B_1(\omega))^2 + (B_2(\omega))^2}}, \quad A_2(\omega) = 2\ell b p_m \sqrt{\frac{(n_1 - m_1 \omega^2)^2 + (K^{(1)} \omega)^2}{(B_1(\omega))^2 + (B_2(\omega))^2}}, \quad (22)$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg(n_2 - m_2 \omega^2) - \arctg\left(\frac{B_2(\omega)}{B_1(\omega)}\right), \quad \varphi_2(\omega) = \arctg\left(\frac{-K^{(1)} \omega}{m_1 \omega^2 - n_1}\right) - \arctg\left(\frac{B_2(\omega)}{B_1(\omega)}\right). \quad (23)$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$B_1(\omega) = (n_1 - m_1 \omega^2)(n_2 - m_2 \omega^2) - K^{(1)} K^{(2)} \omega^2, \quad B_2(\omega) = (K^{(1)} + K^{(2)}) \omega (n_2 - m_2 \omega^2) + K^{(2)} \omega (n_1 - m_1 \omega^2).$$

Заметим, если жесткость подвеса нижней стенки второго канала стремится к бесконечности, т.е. эта стенка неподвижна, то вместо системы (20) имеет место одно уравнение для общей стенки каналов

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + (K^{(2)} + K^{(1)}) \frac{dz_1}{dt} + n_1 z_1 = \ell b \Delta p + 2\ell b p_m f_p(\omega t),$$

а его решение при установившихся колебаниях имеет вид

$$z_1 = A_1(\omega) \sin(\omega t + \varphi_1(\omega)), \quad A_1(\omega) = \frac{2\ell b p_m}{\sqrt{(n_1 - m_1 \omega^2)^2 + (K^{(1)} + K^{(2)})^2 \omega^2}}, \quad \varphi_1(\omega) = \arctg\left(\frac{(K^{(1)} + K^{(2)}) \omega}{m_1 \omega^2 - n_1}\right).$$

Данные формулы следуют из (22), (23) в предельном переходе при $n_2 \rightarrow \infty$.

С другой стороны, если жесткость подвеса общей стенки каналов стремится к бесконечности, т.е. эта стенка неподвижна, то вместо системы (20) имеет место одно уравнение для нижней стенки второго канала

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + K^{(2)} \frac{dz_2}{dt} + n_2 z_2 = \ell b \Delta p + 2\ell b p_m f_p(\omega t),$$

а его решение при установившихся колебаниях имеет вид

$$z_2 = A_2(\omega) \sin(\omega t + \varphi_2(\omega)), \quad A_2(\omega) = \frac{2\ell b p_m}{\sqrt{(n_2 - m_2 \omega^2)^2 + (K^{(2)} \omega)^2}}, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg\left(\frac{K^{(2)} \omega}{m_2 \omega^2 - n_2}\right).$$

Данный результат также может быть получен из (22), (23) при $n_1 \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение безразмерную частоту η как отношение размерной частоты колебаний ω к собственной частоте общей стенки канала $\Omega_1 = \sqrt{n_1/m_1}$, т.е. $\eta = \omega/\Omega_1$. Тогда обозначая собственную частоту колебаний нижней стенки второго канала как $\Omega_2 = \sqrt{n_2/m_2}$, представим (22), (23) в безразмерном виде

$$A_1(\eta) = \sqrt{\frac{(1 - \eta^2 (\Omega_1^2 / \Omega_2^2))^2}{(B_1(\eta))^2 + (B_2(\eta))^2}}, \quad A_2(\eta) = \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)^2 + (K^{(1)} \Omega_1 / n_1)^2 \eta^2}{(B_1(\eta))^2 + (B_2(\eta))^2}}, \quad (24)$$

$$\varphi_1(\eta) = \arg(1 - \eta^2 (\Omega_1^2 / \Omega_2^2)) - \arctg\left(\frac{B_2(\eta)}{B_1(\eta)}\right), \quad \varphi_2(\eta) = \arctg\left(\frac{-K^{(1)} \eta \Omega_1 / n_1}{\eta^2 - 1}\right) - \arctg\left(\frac{B_2(\eta)}{B_1(\eta)}\right). \quad (25)$$

Здесь размерные (22) и безразмерные (24) амплитудные характеристики связаны

как $A_1(\omega) = \frac{2\ell b p_m}{n_1} A_1(\eta)$, $A_2(\omega) = \frac{2\ell b p_m}{n_2} A_2(\eta)$, а также введены обозначения

$$B_1(\eta) = (1 - \eta^2)(1 - \eta^2(\Omega_1^2/\Omega_2^2)) - K^{(1)}K^{(2)}\eta^2\Omega_1^2/(n_1n_2),$$

$$B_2(\eta) = (1 - \eta^2(\Omega_1^2/\Omega_2^2))(K^{(1)} + K^{(2)})\eta\Omega_1/n_1 + (1 - \eta^2)\eta K^{(2)}\Omega_1/n_2.$$

Согласно (22) или (24) амплитуда колебаний общей стенки каналов на безразмерной частоте $\eta = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ (размерной частоте $\omega = \Omega_2 = \sqrt{n_2/m_2}$, т.е. собственной частоте нижней стенки второго канала) обращается в нуль. Кроме того, на частоте $\eta=1$ (размерной частоте $\omega = \Omega_1 = \sqrt{n_1/m_1}$, т.е. собственной частоте общей стенки каналов) амплитуда нижней стенки второго канала будет стремиться к минимуму, т.е. на указанных собственных частотах стенок имеет место антирезонанс соответствующей противоположной стенки каналов.

Используя (24), (25) можно провести численное моделирование динамического отклика стенок на изменение пульсации давления на торцах второго канала, а также определить резонансные частоты колебаний и оценить влияние геометрических размеров каналов и физических свойств жидкости. Приведем пример такого исследования для рассматриваемых каналов со следующими параметрами: $l = 10^{-1}$ м, $\delta_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho_1 = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho_2 = 1.84 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu_2 = 2.5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $b = 0.5$ м, $n_1 = 9 \cdot 10^5$ Н/м, $n_2 = 3.6 \cdot 10^6$ Н/м, $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 8$ кг.

На рисунке 2 представлены результаты расчетов безразмерных амплитудных и фазовых характеристики подвижных стенок каналов для указанных выше параметров.

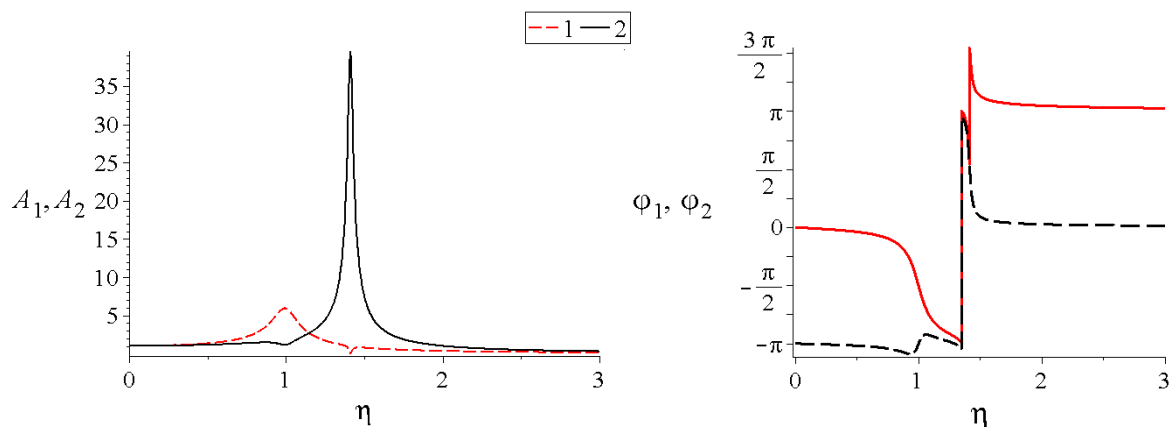


Рисунок 2 - Результаты численного расчета безразмерных характеристик (24), (25):
1 – общая стенка каналов, 2 – нижняя стенка второго канала

На рисунках 3 и 4 приведены результаты расчетов безразмерных амплитудных и фазовых характеристик для случаев уменьшения в 2 раза зазора второго канала (канала $(\delta_2 = 2.5 \cdot 10^{-1} \text{ м})$ и при замене жидкости во втором канале на жидкость с большей вязкостью и меньшей плотностью ($\rho_2 = 900 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu_2 = 12.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$).

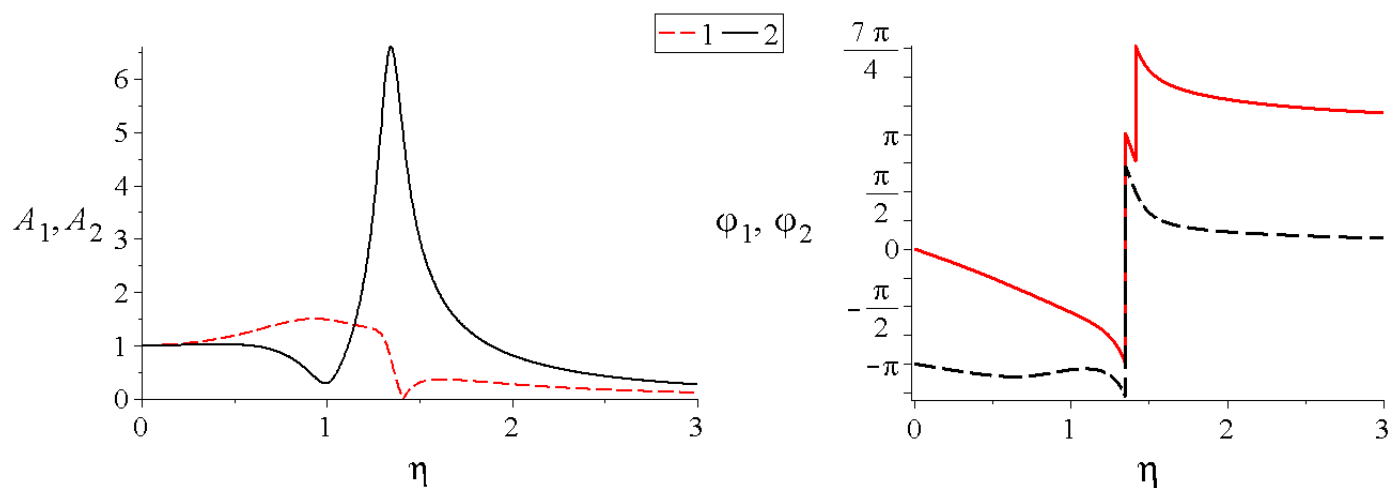


Рисунок 3 - Результаты численного расчета безразмерных характеристик (24), (25) при уменьшении зазора второго канала ($\delta_2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$):
1 – общая стенка каналов, 2 – нижняя стенка второго канала

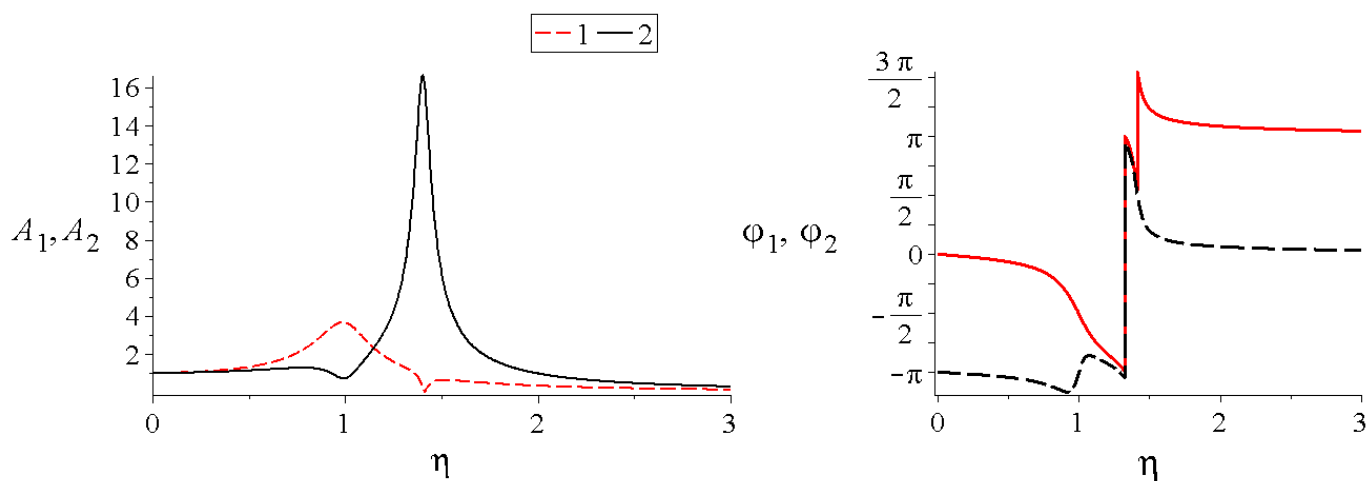


Рисунок 4 - Результаты численного расчета безразмерных характеристик (24), (25) при замене жидкости во втором канале на жидкость с большей вязкостью и меньшей плотностью ($\rho_2 = 900 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu_2 = 12.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$): 1 – общая стенка каналов, 2 – нижняя стенка второго канала

Проведенное моделирование показало наличие двух резонансных частот колебаний стенок вблизи собственных частот их колебаний, а также наличие для каждой из стенок антирезонанса на собственной частоте противоположной стенки. Наблюдается смена фаз колебаний при переходе через резонансные (антирезонансные) частоты. Показано, что уменьшением зазора одного из каналов можно добиться существенного подавления амплитуд колебаний стенок каждого из каналов. Подавлению амплитуд колебаний также может способствовать применение жидкостей с большей вязкостью. При этом варьирование размеров зазора каналов и физические свойств жидкостей мало сказывается на качественном поведении фазовых характеристик рассматриваемых стенок каналов, в тоже время, изменение зазоров каналов существенно влияет на величину фазовых углов.

Заключение

В работе предложена математическая модель для исследования гидроупругих колебаний стенок двух узких каналов, заполненных пульсирующими жидкостями и имеющих общую стенку на упругом подвесе. Модель разработана с учетом динамики взаимодействия стенок каналов, ограничивающих две вязкие жидкости с различными физическими свойствами, с этими жидкостями и несовпадения координат Лагранжа и Эйлера, используемых для описания движения стенок и жидкости в каналах. Проведенный асимптотический анализ модели позволил корректно провести ее линеаризацию и определить гидроупругие отклики стенок каналов. Определены коэффициенты демпфирования для рассмотренной колебательной системы, получены и численно исследованы амплитудные и фазовые частотные характеристики стенок рассматриваемых каналов. Представленные в работе результаты могут быть использованы для анализа виброустойчивости элементов систем гидропривода, охлаждения и подачи топлива в современных изделиях авиакосмической промышленности. Кроме того, разработанная модель применима для разработки и анализа частотных характеристик гидравлических демпферов приборов и элементов конструкций авиакосмической техники.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. – М. : Физматлит, 1995. – 736 с.
2. Аэрогидроупругость конструкций / А.Г. Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев, Ф.Н. Шклярчук. – М.: Физматлит, 2000. 592 с.
3. Paidoussis M.P., Price S.J., de Langre E. Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 414 p.
4. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. – 2017. – № 95.
5. Вин К.К., Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Труды МАИ. – 2021. – № 119. – DOI 10.34759/trd-2021-119-03.
6. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними / Р.В. Агеев, Т.В. Быкова, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 4, № 1(42). – С. 7-13.
7. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной / Р. В. Агеев, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // Труды МАИ. – 2014. – № 78.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдвигаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 1. – С. 53-63.
9. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator / L.I. Mogilevich, V.S. Popov, D.V. Kondratov,

L.N. Rabinskiy // Journal of Vibroengineering. – 2017. – Vol. 19. No. 8. – P. 5758-5766. – DOI 10.21595/jve.2017.18179.

10. Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol. 438. – P. 83-98. – DOI 10.1016/j.jsv.2018.08.047

11. Pande S.D., Wang X., Christov I.C. Oscillatory flows in compliant conduits at arbitrary Womersley number // Physical Review Fluids. – 2023. – Vol. 8(12). – Art. 124102. – DOI 10.1103/physrevfluids.8.124102

12. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. Vol. 46(1). – P. 12-19. – DOI 10.3103/S1052618817010113

13. Askari R.E., Jeong K.-H., Ahn K.-H., Amabili M. A mathematical approach to study fluid-coupled vibration of eccentric annular plates // Journal of Fluids and Structures. – 2020. – Vol. 98. – Art. 103129. – DOI 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103129

14. Lekomtsev S.V., Kamenskikh A.O. Active damping of resonant vibrations of two parallel plates with a quiescent fluid confined between them // AIP Conf Proc. – 2023. – Vol. 2627. – Art. 050007. – DOI 10.1063/5.0117558

15. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Y.V. Mathematical Modeling of Vibration Devices // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 281(3). – P. 376-389. – DOI 10.1007/s10958-024-07112-1

16. Блинкова О. В., Кондратов Д. В. Задача динамики взаимодействия сжимаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной // Труды МАИ. – 2020. – № 110. – С. 21. – DOI 10.34759/trd-2020-110-21.

17. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Моделирование динамики взаимодействия сжимаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором // Труды МАИ. – 2024. – № 134.

18. Raeder T., Mishchenkova O.V., Koroleva M.R., Tenenev V.A. Nonlinear Processes in Safety Systems for Substances with Parameters Close to a Critical State // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2021. – Vol. 17(1). – P. 119–138. – DOI 10.20537/nd210109

19. Popov V.S., Popova A.A. Modeling of nonlinear aeroelastic oscillations of a channel wall interacting with a pulsating viscous gas layer // Computer Research and Modeling. – 2025. – Vol. 17(4). – P. 583-600. – DOI 10.20537/2076-7633-2025-17-4-583-600
20. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Nonlinear Oscillations of a Plate Resting on a Nonlinear Elastic Foundation and Forming the Bottom of a Plane Channel Filled with a Viscous Gas // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2024. – Vol. 20(4). – P. 581-599. – DOI 10.20537/nd241101
21. Akbarov S.D., Ekicioglu Kuzeci Z. On Influence of Fluid Viscosity on Interface Pressure in Hydro-Piezoelectric System Under Its Forced Vibration // International Applied Mechanics. – 2025. – Vol. 61(1). – P. 126-137. – DOI 10.1007/s10778-025-01339-4
22. Akbarov S.D., Imamaliyeva J.N. Axisymmetric forced vibration of the hydro-elastic system consisting of a pre-strained highly elastic plate and compressible viscous fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2025. – Vol 598. – Art. 118862. – DOI 10.1016/j.jsv.2024.118862
23. Constantinescu V.N. Gas Lubrication. – New York: ASME, 1969.
24. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М. : Дрофа, 2003. 840 с.
25. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
26. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
27. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. – М.: Наука, 1991. – 200 с.
28. Nayfeh A.H. Perturbation methods. – New York: Wiley, 1973. – 425 p.
29. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. – Stanford: The Parabolic Press, 1975.

References

1. Morozov V.I., Ponomarev A.T., Rysev O.V. Matematicheskoe modelirovanie slozhnyh aerouprugih system (Mathematical modeling of complex aeroelastic systems). Moscow, Fizmatlit, 1995, 736 p.

2. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruksii* (Aerohydroelasticity of Structures). Moscow, Fizmatlit, 2000, 592 p.
3. Paidoussis M.P., Price S.J., de Langre E. *Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010, 414 p.
4. Rybnikov S.I., Nguyen T. S. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2017, no. 95. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>.
5. Win K.K., Temnov A.N. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2021, no. 119. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159776>.
6. Ageev R.V., Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2009, vol. 4, no. 1(42), pp. 7-13.
7. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2014, no. 78. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53466>.
8. Mogilevich L.I., Popov V.S., Skorodumov E.S. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyj i naturnyj eksperiment v estestvennyh naukah*, 2017, no 1, pp. 53-63.
9. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator / L.I. Mogilevich, V.S. Popov, D.V. Kondratov, L.N. Rabinskiy. *Journal of Vibroengineering*, 2017, vol. 19, no. 8, pp. 5758-5766. DOI 10.21595/jve.2017.18179.
10. Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, vol. 438, pp. 83-98. DOI 10.1016/j.jsv.2018.08.047
11. Pande S.D., Wang X., Christov I.C. Oscillatory flows in compliant conduits at arbitrary Womersley number. *Physical Review Fluids*, 2023, vol. 8(12), art. 124102. DOI 10.1103/physrevfluids.8.124102.
12. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46(1), pp. 12-19. DOI 10.3103/S1052618817010113
13. Askari R.E., Jeong K.-H., Ahn K.-H., Amabili M. A mathematical approach to study fluid-coupled vibration of eccentric annular plates. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, vol. 98, art. 103129. DOI 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103129

14. Lekomtsev S.V., Kamenskikh A.O. Active damping of resonant vibrations of two parallel plates with a quiescent fluid confined between them. *AIP Conf Proc*, 2023, vol. 2627, art. 050007. DOI10.1063/5.0117558
15. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Y.V. Mathematical Modeling of Vibration Devices. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 281(3), pp.376-389. DOI10.1007/s10958-024-07112-1
16. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2020, no. 110. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112935>.
17. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2024, no. 134. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178475>.
18. Raeder T., Mishchenkova O.V., Koroleva M.R., Tenenev V.A. Nonlinear Processes in Safety Systems for Substances with Parameters Close to a Critical State. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17(1), pp. 119-138. DOI 10.20537/nd210109
19. Popov V.S., Popova A.A. Modeling of nonlinear aeroelastic oscillations of a channel wall interacting with a pulsating viscous gas layer. *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17(4), pp. 583-600. DOI 10.20537/2076-7633-2025-17-4-583-600
20. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Nonlinear Oscillations of a Plate Resting on a Nonlinear Elastic Foundation and Forming the Bottom of a Plane Channel Filled with a Viscous Gas. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 20(4), pp. 581-599. DOI 10.20537/nd241101
21. Akbarov S.D., Ekicioglu Kuzeci Z. On Influence of Fluid Viscosity on Interface Pressure in Hydro-Piezoelectric System Under Its Forced Vibration. *International Applied Mechanics*, 2025, vol. 61(1), pp. 126-137. DOI 10.1007/s10778-025-01339-4
22. Akbarov S.D., Imamaliyeva J.N. Axisymmetric forced vibration of the hydro-elastic system consisting of a pre-strained highly elastic plate and compressible viscous fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2025, vol 598, art. 118862. DOI 10.1016/j.jsv.2024.118862
23. Constantinescu V. N. *Gas Lubrication*. New York, ASME, 1969.
24. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Mechanics of Liquids and Gases). Moscow, Drofa, 2003, 840 p.
25. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. *Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem* (Stability and Oscillations of Elastic Systems). Moscow, Nauka, 1987, 352 p.

26. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij* (Introduction to the theory of mechanical vibrations). Moscow, Nauka, 1991, 256 p.
27. Il'gamov M.A. *Vvedenie v nelinejnyu gidrouprugost'* (Introduction to nonlinear hydroelasticity). Moscow, Nauka, 1991, 200 p.
28. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973, 425 p.
29. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, The Parabolic Press, 1975.

Информация об авторах

Виктор Сергеевич Попов, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение Федерального исследовательского центра «Саратовский научный центр РАН», г. Саратов; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9582-7195>; e-mail: vic_p@bk.ru

Анна Александровна Попова, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; доцент кафедры «Информационное право и цифровые технологии», Саратовская государственная юридическая академия, г. Саратов, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7786-1680>; e-mail: anay_p@bk.ru

Анна Александровна Орлова, кандидат экономических наук, доцент кафедры «Экономика и маркетинг», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия; e-mail: kostylevaaa@mail.ru

Мария Викторовна Попова, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1460-7172>; e-mail: mari.popova.2004@internet.ru

Information about the authors

Victor V. Popov, Dr. Sc. (Eng.), professor of Applied Mathematics and System Analysis Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; Chief Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9582-7195>; e-mail: vic_p@bk.ru

Anna A. Popova, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; Associate Professor of the Department of Information Law and Digital Technologies, Saratov State Law Academy, Saratov, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7786-1680>; e-mail: anay_p@bk.ru

Anna A. Orlova, Cand. Sc. (Economics), associate professor of Economics and Marketing Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: kostylevaaa@mail.ru

Maria V. Popova, Student, Saratov State University; Saratov, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1460-7172>; e mail: mari.popova.2004@internet.ru

Получено 16 марта 2026 ● Принято к публикации 14 апреля 2026 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 16 March 2026 ● Accepted 14 April 2026 ● Published 25 June 2026
