

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.31

DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки

Наталья Александровна Локтева¹, Дмитрий Олегович Сердюк^{2✉}, Павел Дмитриевич Скопинцев³, Григорий Валерьевич Федотенков⁴

^{1,2,3,4}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

^{1,4}НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

¹nlok@rambler.ru

²d.serduk55@gmail.com✉

³chgpashka@gmail.com

⁴greghome@mail.ru

Аннотация. Исследуется нестационарное деформирование тонкой неограниченной по длине круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при воздействии на ее боковую поверхность сосредоточенной и распределённой по произвольной области нагрузки с переменной во времени амплитудой. Материал оболочки полагается линейно упругим, анизотропным и обладающим симметрией относительно ее срединной поверхности. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат, связанной с осью цилиндрической оболочки, и описывается при помощи гипотез Киргофа-Лява, а искомая функция нормального нестационарного перемещения строится на связи функции Грина с функцией

действующей нагрузки при помощи интегрального оператора типа свертки по пространственным переменным и времени. Функция Грина для анизотропной оболочки представляет собой решение специальной задачи о воздействии на оболочку сосредоточенной нагрузки, математически моделируемой дельта-функцией Дирака. Для построения функции Грина применяются разложения в экспоненциальные ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа выполняется аналитически, а оригинал интегрального преобразования Фурье находится с использованием численных методов интегрирования быстро осциллирующих функций. Интегралы свертки функции Грина с функцией нагрузки берутся при помощи квадратурных формул методом прямоугольников. В качестве численных примеров рассмотрены распространения нестационарных возмущений в неограниченной оболочке для нескольких вариантов симметрии упругой среды.

Ключевые слова: анизотропная цилиндрическая оболочка, нестационарная динамика, функция Грина, функция прогиба, обобщенные функции, интегральные преобразования, квадратурные формулы, нормальное перемещение, оболочка Кирхгофа-Лява

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 20-58-00023 и 19-08-00968)

Для цитирования: Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В.

Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки

// Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

MECHANICS

Original article

Unsteady deformation of anisotropic circular cylindrical shell

Natalia A. Lokteva¹, Dmitry O. Serdyuk^{2✉}, Pavel D. Skopincev³, Grigory V. Fedotenkov⁴

^{1,2,3,4}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

^{1,4}Lomonosov Research Institute of Mechanics, Moscow, Russia

¹nlok@rambler.ru

²d.serduk55@gmail.com✉

³chgpashka@gmail.com

⁴greghome@mail.ru

Abstract. The unsteady deformation of a thin, infinitely long circular cylindrical shell of constant thickness under the impact of a concentrated shock load distributed over an arbitrary region on its lateral surface is being studied. The shell material is assumed to be linearly elastic, anisotropic, and symmetrical about its middle surface. The Kirchhoff-Love model is employed to describe the shell motion. The motion of the shell is being considered in a cylindrical coordinate system associated with the axis of the cylindrical shell, and the sought-for function of the normal non-stationary deflection is constructed by connecting the

Green's function with the function of the operating load using an integral operator of the convolution type in spatial variables and time. The Green's function for an anisotropic shell is a solution to a special problem of the impact of an instantaneous concentrated load on the shell, mathematically modeled by the Dirac delta functions. Expansions in exponential Fourier series, integral Laplace transform in time and integral Fourier transform in longitudinal coordinate are being used to construct the Green's function. The inverse integral Laplace transform is being performed analytically, and the original integral Fourier transform is being found using numerical methods for integrating rapidly oscillating functions. The integrals of the convolution of the Green's function with the load function are being taken with quadrature formulas using the rectangle method. As an example, the unsteady dynamics of cylindrical shell was studied under the impact of arbitrarily time-dependent concentrated load and load distributed over the finite area belonging to the lateral surface of the shell. Several options of symmetry of the elastic medium (isotropic, orthotropic and anisotropic) herewith were analyzed, which demonstrates calculated solution versatility both in terms of influence nature and shell material. For the considered symmetry options, the study of the unsteady vibrations propagation character, which allowed evaluating the solution adequacy, was conducted. The presented approach to constructing the unsteady deflection function while transition to the dimensional values opens opportunities for the analysis of the stress-strain state of the extended cylindrical shells with account for various options of the material anisotropy and law of distribution of the unsteady loading along both coordinates and time.

Keywords: anisotropic cylindrical shell, unsteady dynamics, Green's function, deflection function, generalized functions, integral transformations, quadrature formulas, normal displacement, Kirchhoff-Love shell

Funding: the work was supported by RFBR projects 20-58-00023 and 19-08-00968

For citation: Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopincev P.D., Fedotenzov G.V. Unsteady deformation of anisotropic circular cylindrical shell. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. DOI:

[10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

Введение

Оболочки применяются во многих отраслях промышленности, включая ракетно-космическую, самолетостроительную, атомную, судостроительную, нефтегазодобывающую и машиностроительную отрасли. Для усовершенствования и создания новых перспективных конструкций, работающих в нестационарных режимах, необходимо обладать знаниями о протекании процессов нестационарных вынужденных колебаний в проектируемых оболочечных конструкциях. Исследование нестационарных колебаний является важной задачей, так как при этом существенно проявляется неоднородность искомого решения по времени и координатам. Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек при воздействии ударных нагрузок, имитируемых импульсными функциями, представляет теоретический и прикладной интерес.

На данный момент, в рамках модели Кирхгофа-Лява, наиболее полно изучены задачи по исследованию нестационарной динамики изотропных упругих пластин и

оболочек [1]. В работах [2,3] рассмотрен широкий круг проблем динамики ортотропных цилиндрических оболочек, их осесимметричное и неосесимметричное деформирование при продольном ударе. Так же рассмотрено неосесимметричное деформирование при нестационарном внешнем давлении. В труде [4] отражены проблемы деформирования подкрепленных цилиндрических оболочек при действии динамических сжимающих осевых нагрузок и внешнего давления. В работе [5] по изучению динамики оболочек автор рассматривал тонкостенные однородные цилиндрические оболочки из композиционных материалов при импульсном воздействии. За модель композиционного материала принималась ограниченная слоистая среда, составленная из ортотропных упругих слоев неизменной толщины. Нагрузкой являлся импульс внешнего или внутреннего давления. В работах [6-12] рассмотрено применение метода функций Грина для решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек. Исследованию нестационарных контактных задач для тонких сферических, цилиндрических оболочек и упругого полупространства посвящены труды [6-9]. Рассмотрены задачи для ограниченной балки Тимошенко под воздействием нестационарной нагрузки, проанализированы вопросы идентификации дефектов в упругих стержнях [10,11]. Исследовались случаи нестационарного воздействия жесткого индентора на упругую полуплоскость [12]. Исследованию проблем, связанных с динамикой, прочностью и устойчивостью оболочек, посвящены работы [13-15]. Исследования распространения нестационарных возмущениях в пластинах, в том числе и анизотропных, посвящены работы [16-28].

В свою очередь, задачи нестационарной динамики упругих анизотропных оболочек остаются недостаточно хорошо изученными. В данной работе аналитически исследуется процесс воздействия нестационарной нагрузки на упругую анизотропную цилиндрическую оболочку. Строятся нестационарные функции нормальных перемещений при действии сосредоточенной и распределенной нагрузки для анизотропной оболочки, которые открывают возможности для обширных прикладных и научных исследований. Найденные нестационарные функции являются универсальными по отношению к свойствам материала оболочки, который может быть изотропным, трансверсально-изотропным, ортотропным или анизотропным. Представлены примеры расчетов.

1. Постановка задачи

Объектом исследования является тонкая неограниченная цилиндрическая оболочка (см. рис. 1). Оболочка имеет радиус R и толщину h . Материал цилиндрической оболочки принят упругим и анизотропным. При этом рассматривается случай анизотропии, при котором упругая среда имеет одну поверхность симметрии. В данном случае такой поверхностью является срединная поверхность оболочки. Для тонкой оболочки Кирхгофа-Лява рассматриваемый материал имеет шесть независимых упругих постоянных:

$$c_{11} = C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112}, c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{1222}, c_{66} = C^{1212}.$$

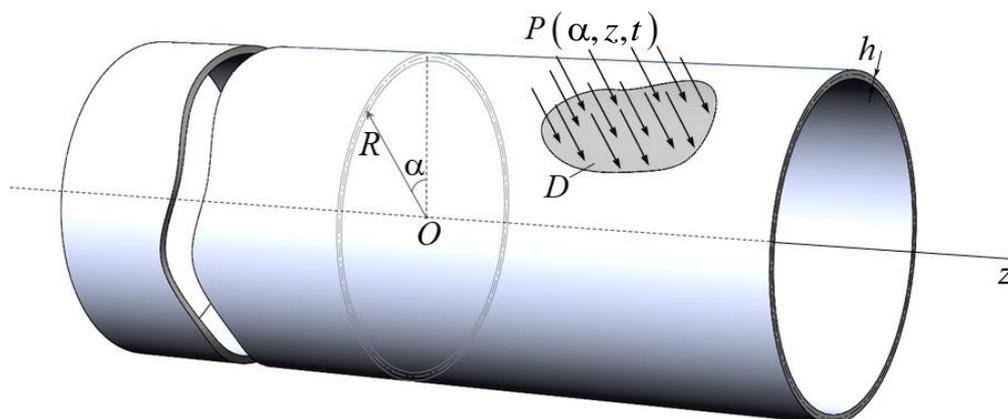


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка под влиянием нестационарной нагрузки

В начальный момент времени оболочка находится в невозмущенном состоянии.

Затем на нее воздействует нестационарная нагрузка $P(\alpha, z, t)$, распределенная по произвольной области D . Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой оболочки [1], [29], [30].

Уравнения движения в перемещениях анизотропной оболочки Кирхгофа-Лява имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w) + q_z, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + P, \end{aligned} \quad (1)$$

где дифференциальные операторы определяются следующими соотношениями:

$$K_{11}(u_\alpha) = \frac{hc_{11}}{R^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{16}}{R} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + \left(hc_{66} + \frac{Ic_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2},$$

$$K_{12}(u_z) = \frac{hc_{16}}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{hc_{12}}{R} + \frac{hc_{66}}{R} - \frac{Ic_{66}}{R^3} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{62} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$K_{13}(w) = \frac{hc_{11}}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2Ic_{66}}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} - \frac{Ic_{61}}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \left(\frac{hc_{61}}{R} - \frac{Ic_{61}}{R^3} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Ic_{62}}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3},$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) \left(\frac{Ic_{66}}{R^4} + \frac{hc_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{26}}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$K_{23}(w) = \frac{Ic_{61}}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{2Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{Ic_{62}}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} + \frac{hc_{21}}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{hc_{61}}{R^2} + \frac{Ic_{61}}{R^4} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$K_{33}(w) = -\frac{4Ic_{62}}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial z^3} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^3 \partial z} - \left(\frac{2Ic_{21}}{R^2} + \frac{4Ic_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - \frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} -$$

$$-Ic_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \frac{2Ic_{21}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} - \frac{2Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \right) w. \quad (4)$$

В (1) – (4): ρ – плотность материала оболочки, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, P – нормальная нагрузка, q_i – тангенциальная нагрузка, $I = h^3/12$ – погонный момент инерции.

Уравнения (1) – (4) совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{t=0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_z|_{t=0} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

образуют начальную задачу.

Цель исследования заключается в построении нестационарной функции нормального перемещения $w(\alpha, z, t)$ в ответ на воздействие нестационарной нагрузки $P(\alpha, z, t)$.

2. Построение нестационарной функции нормального перемещения

Введем систему безразмерных величин и выполним обезразмеривание соотношений (1) – (5):

$$\begin{aligned} u'_\alpha &= \frac{u_\alpha}{L}, \quad u'_z = \frac{u_z}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad k = \frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{c_* t}{L}, \\ q'_\alpha &= \frac{q_\alpha L}{hc_{11}}, \quad q'_z = \frac{q_z L}{hc_{11}}, \quad p' = \frac{PL}{hc_{11}}, \quad c_* = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad L = h, \\ C'_1 &= \frac{c_{12}}{c_{11}}, \quad C'_2 = \frac{c_{16}}{c_{11}}, \quad C'_3 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, \quad C'_4 = \frac{c_{26}}{c_{11}}, \quad C'_5 = \frac{c_{66}}{c_{11}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6): τ – безразмерное время, L – характерный размер, c_* – характерная скорость, k – коэффициент отношения радиуса оболочки к ее толщине.

Уравнение движения и дифференциальные операторы в безразмерной форме (штрихи в безразмерных величинах опущены) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w) + q_z, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + p. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2C_2}{k} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + \left(C_5 + \frac{C_5}{12k^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}, \\
K_{12}(u_z) &= \frac{C_2}{k^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{C_1}{k} + \frac{C_5}{k} - \frac{C_5}{12k^3} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_4 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\
K_{13}(w) &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{C_5}{6k^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} - \frac{C_2}{12k^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \left(\frac{C_2}{k} - \frac{C_2}{12k^3} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{C_4}{12k} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
K_{21}(u_\alpha) &= K_{12}(u_\alpha), \\
K_{22}(u_z) &= \left(\frac{C_5}{12k^4} + \frac{C_5}{k^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2C_4}{k} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\
K_{23}(w) &= \frac{C_2}{12k^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \left(\frac{C_2}{k^2} + \frac{C_2}{12k^4} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{C_5}{6k^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{C_4}{12k^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} + \frac{C_1}{k} \frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
K_{31}(u_\alpha) &= -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z), \\
K_{33}(w) &= -\frac{C_4}{3k} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial z^3} - \frac{C_2}{3k^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^3 \partial z} - \left(\frac{C_1}{6k^2} + \frac{C_5}{3k^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - \frac{1}{12k^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \\
&\quad - \frac{C_3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \frac{C_1}{6k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{C_2}{3k^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} - \frac{1}{6k^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{12k^4} \right) w.
\end{aligned} \tag{10}$$

Начальные условия примут вид:

$$u_\alpha \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = u_z \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = w \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \tag{11}$$

Решение начальной задачи (7) – (11) может быть построено с помощью функции Грина $G_w(\alpha, z, \tau)$ для нормального перемещения [1]:

$$w(\alpha, z, \tau) = G_w(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) \tag{12}$$

В (12) через * обозначены свертки по пространственным координатам α, z и безразмерному времени τ .

Обозначим за $G_{u_\alpha}(\alpha, z, \tau)$ и $G_{u_z}(\alpha, z, \tau)$ функции Грина для тангенциальных перемещений. Тангенциальные давления q_i в (7) примем равными нулю. Таким образом, функции Грина $G_w(\alpha, z, \tau)$, $G_{u_\alpha}(\alpha, z, \tau)$ и $G_{u_z}(\alpha, z, \tau)$ являются решениями следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{u_\alpha}}{\partial \tau^2} &= K_{11}(G_{u_\alpha}) + K_{12}(G_{u_z}) + K_{13}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_{u_z}}{\partial \tau^2} &= K_{21}(G_{u_\alpha}) + K_{22}(G_{u_z}) + K_{23}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_w}{\partial \tau^2} &= K_{31}(G_{u_\alpha}) + K_{32}(G_{u_z}) + K_{33}(G_w) + \delta(\alpha, z)\delta(\tau), \\ G_{u_\alpha}|_{\tau=0} &= \frac{\partial}{\partial \tau} G_{u_\alpha}|_{\tau=0} = G_{u_z}|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} G_{u_z}|_{\tau=0} = G_w|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} G_w|_{\tau=0} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta(\bullet)$ – дельта-функция Дирака, а дифференциальные операторы $K_{ij}(G_k)$ имеют вид (8) – (10), где необходимо заменить соответствующие искомые функции на функции влияния.

Для решения поставленной начальной задачи применим к (13) разложения в экспоненциальные ряды Фурье по углу α , а также интегральные преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени τ . В результате получим систему алгебраических уравнение относительно изображений $G_{\alpha n}^{LF}$, $G_{u_z n}^{LF}$, G_{wn}^{LF} функций Грина в пространстве преобразований Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned} (s^2 + Q_1)G_{\alpha n}^{LF} + Q_2 G_{u_z n}^{LF} + Q_3 G_n^{LF} &= 0 \\ Q_2 G_{\alpha n}^{LF} + (s^2 + Q_4)G_{u_z n}^{LF} + Q_5 G_n^{LF} &= 0 \\ -Q_3 G_{\alpha n}^{LF} - Q_5 G_{u_z n}^{LF} + (s^2 + Q_6)G_n^{LF} &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left(C_5 + \frac{C_5}{12k^2} \right) q^2 + \frac{2nC_2}{k} q + \frac{n^2}{k^2}, \\
 Q_2 &= C_4 q^2 + \left(\frac{nC_5 + nC_1}{k} - \frac{nC_5}{12k^3} \right) q + \frac{n^2 C_2}{k^2}, \\
 Q_3 &= -\frac{iC_4}{12k} q^3 - \frac{inC_5}{6k^2} q^2 - \left(\frac{n^2 C_2 - C_2}{12k^3} + \frac{C_2}{k} \right) iq - \frac{in}{k^2}, \\
 Q_4 &= C_3 q^2 + \frac{2nC_4}{k} q + \frac{n^2 C_5}{12k^4} + \frac{n^2 C_5}{k^2}, \\
 Q_5 &= \frac{inC_4}{12k^2} q^2 - \left(\frac{C_1}{k} - \frac{n^2 C_5}{6k^3} \right) iq - \frac{inC_2}{k^2} - \frac{inC_2 - in^3 C_2}{12k^4}, \\
 Q_6 &= \frac{C_3}{12} q^4 + \frac{nC_4}{3k} q^3 + \left(\frac{n^2 C_1 - C_1}{6k^2} + \frac{n^2 C_5}{3k^2} \right) q^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{n^3 C_2 - nC_2}{3k^3} \right) q - \frac{n^2}{6k^4} + \frac{n^4 + 1}{12k^4} + \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний индекс « L » у функции означает её преобразование по Лапласу, а « F » – её преобразование по Фурье, s – параметр преобразования Лапласа, q – параметр преобразования Фурье, n – номер коэффициента ряда.

Решая систему (14), получим изображения функций Грина для прогиба и тангенциальных перемещений:

$$\begin{aligned}
 G_{wn}^{LF}(q, s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{s^4 + s^2 R_1 + R_2}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \\
 G_{u_\alpha n}^{LF}(q, s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{-s^2 Q_3 + R_6}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \\
 G_{u_z n}^{LF}(q, s) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s^2 Q_5 + R_7}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где:

$$\begin{aligned}
R_1 &= Q_1 + Q_4, \quad R_2 = Q_1 Q_4 - Q_2^2, \quad R_3 = Q_1 + Q_4 + Q_6, \\
R_4 &= Q_1 Q_4 + Q_1 Q_6 - Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4 Q_6 + Q_5^2, \\
R_5 &= Q_1 Q_4 Q_6 + Q_1 Q_5^2 - Q_6 Q_2^2 - 2Q_2 Q_3 Q_5 + Q_4 Q_3^2, \\
R_6 &= Q_2 Q_5 - Q_3 Q_4, \quad R_7 = Q_1 Q_5 - Q_2 Q_3.
\end{aligned}$$

Оригинал коэффициентов (15) по Лапласу найден аналитически при помощи таблиц [31] и разложения на простые дроби:

$$G_{\text{wn}}^F(q, \tau) = \frac{1}{\pi} (A \operatorname{sh}(s_1 \tau) + B \operatorname{sh}(s_2 \tau) + C \operatorname{sh}(s_3 \tau)), \quad (16)$$

где:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{s_1^4 + R_1 s_1^2 + R_2}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_2^2)}, \quad B = -\frac{s_2^4 + R_1 s_2^2 + R_2}{2s_2(s_1^2 - s_2^2)(s_2^2 - s_3^2)}, \\
C &= \frac{s_3^4 + R_1 s_3^2 + R_2}{2s_3(s_2^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_3^2)}.
\end{aligned}$$

и s_i – корни знаменателя уравнений в (15):

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\sqrt{6U^{1/3}(-2R_3 U^{1/3} + J_1)}}{6U^{1/3}}, \\
s_2 &= \frac{\sqrt{3U^{1/3}(J_2 - 4R_3 U^{1/3} - J_1)}}{6U^{1/3}}, \\
s_3 &= \frac{\sqrt{-3U^{1/3}(J_2 + 4R_3 U^{1/3} + J_1)}}{6U^{1/3}}.
\end{aligned}$$

$$J_1 = U^{2/3} + 4R_3^2 - 12R_4,$$

$$J_2 = I\sqrt{3}U^{2/3} - 4I\sqrt{3}R_3^2 + 12I\sqrt{3}R_4,$$

$$U = 36R_4 R_3 - 108R_5 - 8R_3^3 + 12\sqrt{12R_5 R_3^3 - 3R_4^2 R_3^2 - 54R_4 R_3 R_5 + 12R_4^3 + 81R_5^2}.$$

Для нахождения оригинала (16) по Фурье применим численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [32]. Тогда оригиналы функции Грина в коэффициентах рядов примет вид:

$$G_{wn}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left\{ e^{\frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot \left[D_1 G_{wn}^F(q_k, \tau) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, \tau) \right] \right\}, \quad (17)$$

$$\Delta = \frac{2A}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i,$$

$$q_k = -A + k\Delta, \quad q_{k+1} = -A + (k+1)\Delta, \quad k = 0..N-1.$$

где A, N – параметры численного интегрирования.

С учетом разложения в экспоненциальные ряды и соотношения (17) нестационарная функция Грина для нормального прогиба анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява примет вид:

$$G_w(\alpha, z, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \frac{\Delta}{2} \left(e^{\frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot \left(D_1 G_{wn}^F(q_k, \tau) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, \tau) \right) \right). \quad (18)$$

В случае воздействия внешнюю поверхность оболочки внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки, изменяющейся во времени по закону $P(\tau)$, выражение для нагрузки $p(\alpha, z, \tau)$ из (12) запишется так:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau) H(\tau) \delta(\alpha) \delta(z), \quad (19)$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Тогда соотношение (12) с учетом (19) и свойств дельта функции Дирака преобразуется в следующий вид:

$$w(\alpha, z, \tau) = G_w(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \int_0^{\tau} G_w(\alpha, z, \tau - t) P(t) dt. \quad (20)$$

Для вычисления интеграла в (20) используется метод прямоугольников [32].

Тогда приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\tau}{n} G\left(\alpha, z, \tau - \frac{\tau i}{n}\right) P\left(\frac{\tau i}{n}\right). \quad (21)$$

В случае воздействия на оболочку распределенной по области боковой поверхности нагрузки, выражение $p(\alpha, z, \tau)$ из (12) примет вид:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau) H(\tau) \left[H\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - H\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \right] \times \\ \times \left[H\left(z + \frac{b}{2}\right) - H\left(z - \frac{b}{2}\right) \right], \quad (22)$$

что соответствует приложению к внешней поверхности оболочки нагрузки,

распределенной по области $D = \left\{ (\alpha, z) : -\frac{\beta}{2} \leq \alpha \leq \frac{\beta}{2}, -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \right\}$ и изменяющейся

во времени по закону $P(\tau) H(\tau)$.

Безразмерные нормальные перемещения оболочки определяются по формуле (12) с учетом (22), в которой поверхностный интеграл с учетом геометрии области D заменяется повторным интегралом:

$$w(\alpha, z, \tau) = G(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \\ = \int_0^{\tau} dt \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\xi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} G(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) d\zeta. \quad (23)$$

Для вычисления интеграла в (23) используем квадратурную формулу метода прямоугольников:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^s \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{\tau}{s} \cdot G_{wijk}(\alpha, z, \tau) p\left(\frac{\tau}{s}k\right),$$

$$G_{wijk}(\alpha, z, \tau) = G_w\left(\alpha - \frac{\beta}{n}i + \frac{\beta}{2}, z - \frac{b}{m}j + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau}{s}k\right). \quad (24)$$

Соотношения (21) и (24) с учетом функции Грина (18) позволяют исследовать пространственно-временные распространения нестационарных возмущений в неограниченной оболочке Кирхгофа-Лява при воздействии сосредоточенной и распределенной по внешней поверхности нестационарной нагрузки.

Построенные функции при переходе к размерным величинам дают возможность исследовать нестационарное напряженно-деформированное состояние протяженных анизотропных цилиндрических оболочек.

3. Примеры расчетов

Нестационарные функции нормального прогиба (21) и (24) являются универсальными по отношению к свойствам материала оболочки, который может быть изотропным, трансверсально-изотропным, ортотропным или анизотропным. Оценим характер распространения нестационарных возмущений в неограниченной оболочке для нескольких вариантов симметрии упругой среды – изотропной, ортотропной и анизотропной.

Для вычисления необходимых упругих постоянных C^{ijkl} , входящих в функцию прогиба через инженерные константы, воспользуемся связью матрицы упругих постоянных C с матрицей податливости D :

$$C = D^{-1},$$

где [33]:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.1}}{G_{12}} \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.2}}{G_{12}} \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.3}}{G_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\eta_{31.23}}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\eta_{23.31}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ \frac{\kappa_{1.12}}{E_1} & \frac{\kappa_{2.12}}{E_2} & \frac{\kappa_{3.12}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\nu_{lk}}{E_l} = \frac{\nu_{kl}}{E_k}, \quad \frac{\kappa_{i.kl}}{E_i} = \frac{\kappa_{kl.i}}{G_{kl}}, \quad \frac{\eta_{ik.lm}}{G_{ik}} = \frac{\eta_{lm.ik}}{G_{lm}}. \quad (25)$$

В (25): E_i – модули упругости первого рода, G_{ik} – модули упругости второго рода, μ_{lk} – коэффициенты Пуассона, $\kappa_{i.kl}$, $\kappa_{kl.i}$ – коэффициенты взаимного влияния, $\eta_{ik.lm}$ – коэффициенты Ченцова.

Исследуем нестационарную динамику изотропной и ортотропной цилиндрической оболочки с соотношением радиуса к толщине $k = 50$ при воздействии внезапно приложенной нагрузки вида (22), распределенной по области боковой поверхности оболочки размерами $z = 0.5$, $\alpha = \pi / 24$, с амплитудой, меняющейся по закону:

$$P(\tau) = H(7 - \tau).$$

Изотропная среда. Исследуем нестационарную динамику металлической цилиндрической оболочке с модулем Юнга $E = 198$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.28$. Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова – нулевые. Компоненты тензора упругих постоянных согласно (24) примут значения (в Па):

$$c_{11} = 2.531 \cdot 10^{11}, c_{12} = 9.844 \cdot 10^{10}, c_{16} = 0,$$

$$c_{22} = 2.531 \cdot 10^{11}, c_{66} = 7.734 \cdot 10^{10}, c_{26} = 0.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы согласно (6) таковы:

$$C_1 = 0.389, C_2 = 0, C_3 = 1.000, C_4 = 0, C_5 = 0.306.$$

На рис. 2 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения изотропной цилиндрической оболочки в безразмерные моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 6$.

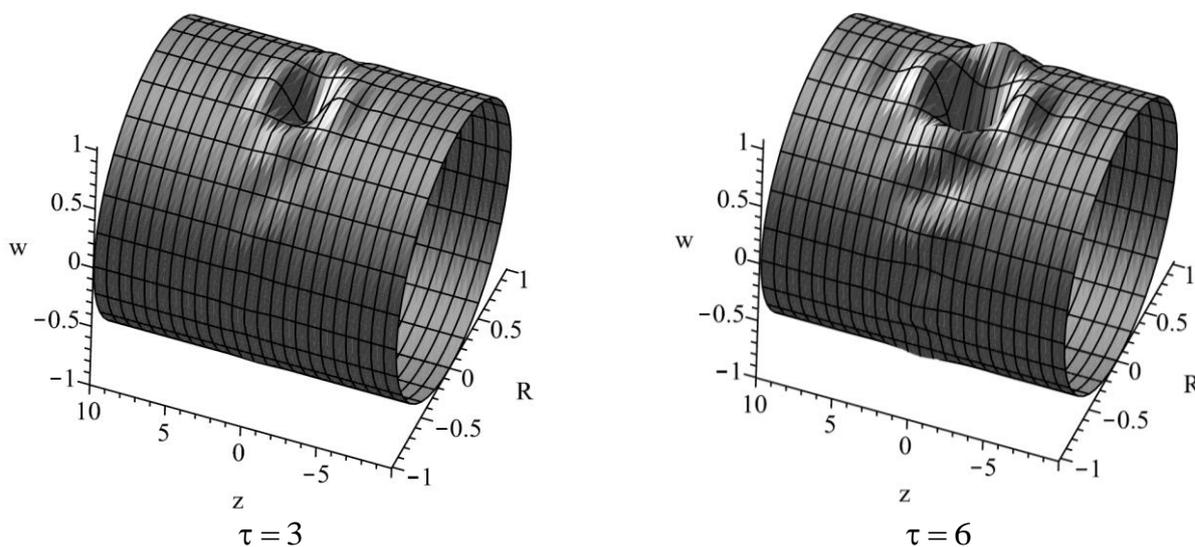


Рис. 2. Пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной оболочки при воздействии распределенной нагрузки

Ортотропная среда. Исследуем нестационарную динамику полимерной композитной оболочки с симметричной относительно срединной плоскости схемой

армирования. Приведенные характеристики пакета примем равными (модули упругости в Па):

$$E_1 = 2.09 \times 10^{11}, E_2 = 9.45 \times 10^9, E_3 = 9.45 \times 10^9,$$

$$G_{12} = 5.5 \times 10^9, G_{23} = 3.9 \times 10^9, G_{31} = 5.5 \times 10^9,$$

$$\nu_{12} = 0.27, \nu_{23} = 0.4, \nu_{31} = 0.27.$$

Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова – нулевые.

Компоненты тензора упругих постоянных примут значения (в Па):

$$c_{11} = 2.113 \cdot 10^{11}, c_{12} = 4.300 \cdot 10^9, c_{16} = 0,$$

$$c_{22} = 1.134 \cdot 10^{10}, c_{66} = 5.500 \cdot 10^9, c_{26} = 0.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы из (6):

$$C_1 = 0.020, C_2 = 0, C_3 = 0.054, C_4 = 0, C_5 = 0.026.$$

На рис. 3 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения ортотропной цилиндрической оболочки в безразмерные моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 6$.

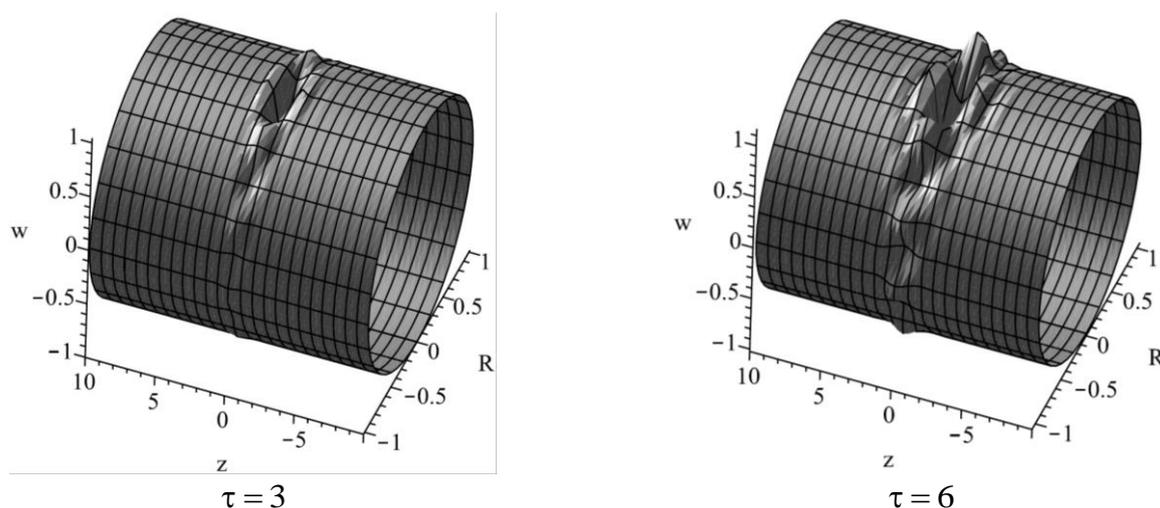


Рис. 3. Пространственные зависимости нестационарного прогиба ортотропной оболочки при воздействии распределенной нагрузки

Из рис. 2 и рис. 3 видно, что в случае изотропного материала распределения нормальных перемещений носят концентрический характер. В случае ортотропного материала различимы две плоскости симметрии распространения нестационарных возмущений.

Анизотропная среда. Исследуем нестационарную динамику анизотропной цилиндрической оболочки с отношением радиуса к толщине $k = 500$ и $k = 50$ при воздействии сосредоточенной нагрузки вида (19) с амплитудой, меняющейся по закону:

$$P(\tau) = \sin(\tau) \operatorname{sch}(3\tau).$$

Упругие константы примем согласно [34] с учетом (24) (в Па):

$$\begin{aligned} c_{11} &= 9.55 \cdot 10^{10}, c_{12} = 2.890 \cdot 10^{10}, c_{16} = 4.470 \cdot 10^{10}, \\ c_{22} &= 2.590 \cdot 10^{10}, c_{66} = 3.270 \cdot 10^{10}, c_{26} = 1.560 \cdot 10^{10}, \end{aligned}$$

что соответствует следующим безразмерным константам из (6):

$$C_1 = 0.302, C_2 = 0.468, C_3 = 0.271, C_4 = 0.163, C_5 = 0.342.$$

На рис. 4 и 5 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки в безразмерные моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 6$ с отношениями радиуса к толщине $k = 500$ и $k = 50$ соответственно.

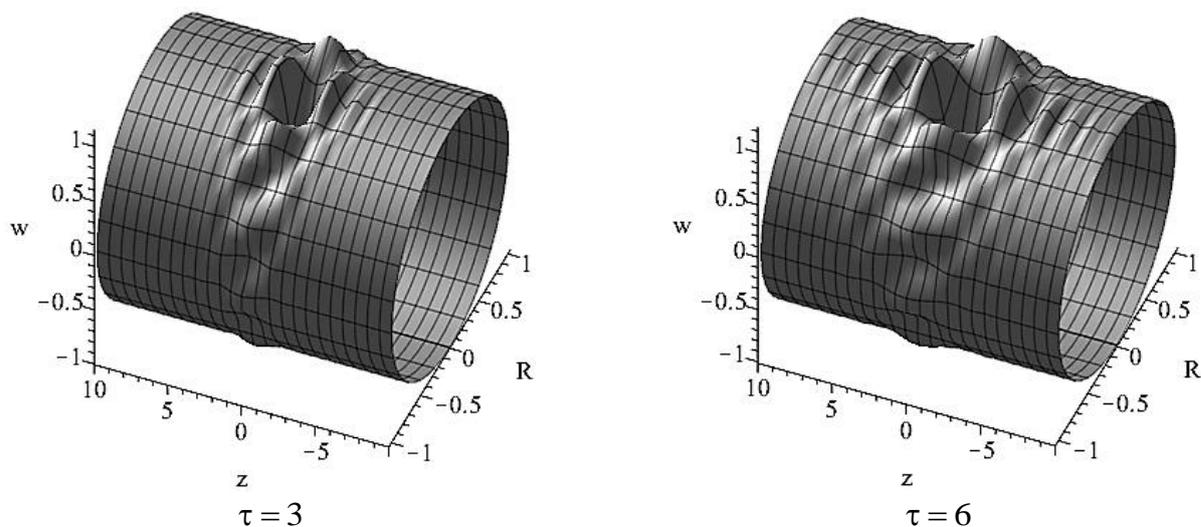


Рис. 4. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки при воздействии сосредоточенной нагрузки, $k = 500$

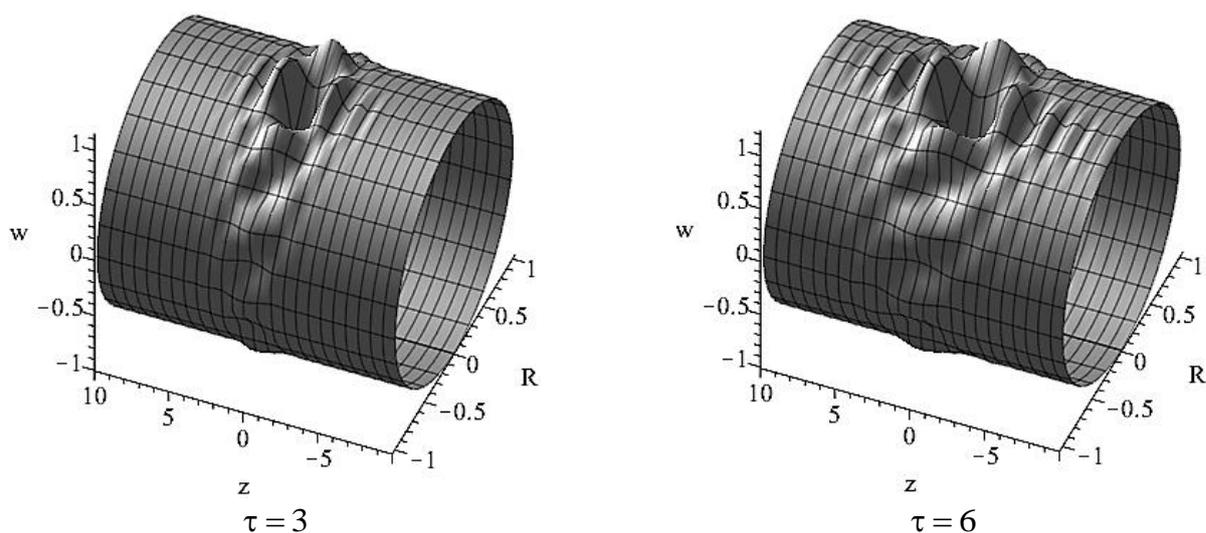


Рис. 5. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки при воздействии сосредоточенной нагрузки, $k = 50$

В представленных на рис. 4 и рис. 5 результатах решения, полученных для анизотропного материала, просматривается смещение возмущений относительно образующих цилиндра и, в целом, несимметричный характер прогиба оболочки. При этом чем меньше отношение радиуса оболочки к ее толщине тем сильнее проявляется данный эффект в оболочке Кирхгофа-Лява.

Представленные на рис. 2 – рис. 5 результаты демонстрируют обобщенность построенных нестационарной функции (21) и (24) нормального перемещения для упругой анизотропной неограниченной оболочки Кирхгофа-Лява в вопросе частных случаев анизотропии материала оболочки и универсальность по характеру действующей нагрузки.

Выводы

В работе получены новые численно-аналитические решения динамической задачи теории упругости для анизотропной упругой тонкой неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява при воздействии на нее нестационарной сосредоточенной и распределенной нагрузки с переменными во времени амплитудами с использованием нового фундаментального решения для динамических функций Грина. С применением функции Грина построены пространственно-временные зависимости нормальных перемещений неограниченной оболочки Кирхгофа-Лява. Установлена связь между геометрическими размерами анизотропной оболочки и несимметричным характером распространения возмущений. Для демонстрации универсальности построенных функций нормальных перемещений представлены примеры расчетов для нескольких вариантов симметрии упругой среды, характер распространения нестационарных возмущений в которых позволил дать оценку адекватности решения.

Представленный подход к построению нестационарной функции прогиба при переходе к размерным величинам открывает возможности для анализа

нестационарного напряженно-деформированного состояния протяженных цилиндрических оболочек с учетом различных вариантов анизотропии материала и закона распределения нестационарной нагрузки, как по координатам, так и по времени. Кроме того, применение построенной функции Грина возможно при решении широкого круга нестационарных задач для анизотропных оболочек, например, нестационарных контактных и обратных задач, а также исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек конечных размеров, например, с применением метода компенсирующих нагрузок.

Список источников

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 472 с.
2. Богданович А.Е. Деформирование и прочность цилиндрических композитных оболочек при динамических нагрузках. – Рига: 1985. –560 с.
3. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. - 295 с.
4. Кошкина Т.Б. Деформирование и прочность подкрепленных композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках. – Рига: Академия наук Латвийской ССР, 1984. – 180 с.
5. Сибиряков А.В. Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: дисс... д.т.н. – М.: 2002. - 319 с.

6. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S105261881401017](https://doi.org/10.3103/S105261881401017)
7. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell // Mechanics of Solids, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107)
8. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall // Shell Structures: Theory and Applications, 2017, vol. 4, pp. 305-308. DOI: [10.1201/9781315166605-68](https://doi.org/10.1201/9781315166605-68)
9. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier // Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, 2019, pp. 385-386. DOI: [10.1007/978-3-319-91989-8_92](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92)
10. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
11. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Уфа, 19-24 августа 2019). – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. Т.3. С. 878–880.

12. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, vol. 158, no 1, pp. 012073. DOI: [10.1088/1757-899X/158/1/012073](https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073)
13. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104003>
14. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>
15. Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика // Труды МАИ. 2014. № 76. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49970>
16. Жигалко Ю.П., Садыкова М.М. Динамика, тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружении // Исследования по теории пластин и оболочек. 1990. № 20. С. 184-191.
17. Моргачев К.С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины // Вестник Самарского государственного технического университета. 2007. Т. 15. № 2. С. 162-164.
18. Дьяченко Ю.Г. Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке: Автореферат дисс.... к.ф-м.н. - Саратов: СГУ, 2008. - 19 с.

19. Шевченко В.П. Ветров О.С. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок // Труды института прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины. 2011. Т. 22. С. 207–215.
20. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media // Journal of applied mechanics-transactions of the ASME, 1989, vol. 56, no. 4, pp. 881 – 886. DOI: [10.1115/1.3176186](https://doi.org/10.1115/1.3176186)
21. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates // Materiaux & Techniques, 2019, vol. 107, no. 2. DOI: [10.1051/mattech/2019006](https://doi.org/10.1051/mattech/2019006)
22. Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates // Engineering analysis with boundary elements, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 19 – 27. DOI: [10.1016/j.enganabound.2015.01.001](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.01.001)
23. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates // Materials physics and mechanics, 2018, vol. 37, no. 1, pp. 79-83. DOI: [10.18720/MPM.3712018_11](https://doi.org/10.18720/MPM.3712018_11)
24. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method // Journal of mechanics, 2014, vol. 30, no. 6, pp. 561-570. DOI: [10.1017/jmech.2014.65](https://doi.org/10.1017/jmech.2014.65)
25. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of an Elastoplastic Three-Layer Circular Plate in a Temperature Field // Mechanics of Composite Materials, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 503–512. DOI: [10.1007/s11029-019-09829-6](https://doi.org/10.1007/s11029-019-09829-6)

26. Ryazantseva M.Y., Starovoitov E.I. Static and Dynamic Models of Bending for Elastic Sandwich Plates // *Structural Integrity*, 2019, vol. 8, pp. 294–297. DOI: [10.1007/978-3-030-21894-2_54](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_54)
27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Thermoelastic Deformation of a Circular Sandwich Plate by Local Loads // *Mechanics of Composite Materials*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 299-312. DOI: [10.1007/s11029-018-9740-x](https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x)
28. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads // *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 665–672. DOI: [10.1007/s11029-016-9615-y](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9615-y)
29. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – 112 с.
30. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 2018. – 92 с.
31. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. – М.: Изд-во Наука, 1971. – 288 с.
32. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 630 с.
33. Ашкенази Е.К. Анизотропия древесины и древесных материалов. – М.: Лесная промышленность, 1978. – 224 с.

34. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропии теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1(3). С. 115 - 119.

References

1. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in Continuous Media Study guide: for universities), Moscow, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
2. Bogdanovich A.E. *Deformirovanie i prochnost' tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri dinamicheskikh nagruzkakh* (Deformation and Strength for Cylindrical Composite Shells under Dinamic Loads), Riga, 1985, 560 p.
3. Bogdanovich A.E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* (Non-linear Problems of Dynamics of Cylindrical Composite Shells), Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
4. Koshkina T.B. *Deformirovanie i prochnost' podkreplennykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri dinamicheskikh szhimayushchikh nagruzkakh* (Deformation and Strength of Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Compressive Loads), Riga, Akademiya nauk Latviiskoi SSR, 1984, 180 p.
6. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S105261881401017](https://doi.org/10.3103/S105261881401017)

7. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell, *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107)
8. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall, *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp. 305-308. DOI: [10.1201/9781315166605-68](https://doi.org/10.1201/9781315166605-68)
9. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier, *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, 2019, pp. 385-386. DOI: [10.1007/978-3-319-91989-8_92](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92)
10. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon timoshenko beam, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
11. Vakhterova Ya.A., Fedotenkov G.V. *XII Vserossiiskii s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: sbornik trudov*. Ufa, Bashkirskii gosudarstvennyi universitet, 2019, vol. 3, pp. 878-880.
12. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no 1, pp. 012073. DOI: [10.1088/1757-899X/158/1/012073](https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073)
13. Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104003>

14. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58589>
15. Karpov V.V., Semenov A.A., Kholod D.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 76. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49970>
16. Zhigalko Yu.P., Sadykova M.M. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*, 1990, no. 20, pp. 184-191.
17. Morgachev K.S. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2007, vol. 15, no. 2, pp. 162-164.
18. D'yachenko Yu.G. *Nestatsionarnaya zadacha dinamiki plastin peremennogo secheniya v utochnennoi postanovke* (Transient problem of dynamics of plates of variable cross-section in a refined formulation), author's abstract, Saratov, SGU, 2008, 19 p.
19. Shevchenko V.P. Vetrov O.S. *Trudy instituta prikladnoi matematiki i mekhaniki Natsional'noi akademii nauk Ukrainy*, 2011, vol. 22, pp. 207–215.
20. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media, *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*, 1989, vol. 56, no. 4, pp. 881 – 886. DOI: [10.1115/1.3176186](https://doi.org/10.1115/1.3176186)
21. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates, *Materiaux & Techniques*, 2019, vol. 107, no. 2. DOI: [10.1051/mattech/2019006](https://doi.org/10.1051/mattech/2019006)
22. Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates, *Engineering analysis with boundary elements*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 19 – 27. DOI: [10.1016/j.enganabound.2015.01.001](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.01.001)

23. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates, *Materials physics and mechanics*, 2018, vol. 37, no. 1, pp. 79-83. DOI: [10.18720/MPM.3712018_11](https://doi.org/10.18720/MPM.3712018_11)
24. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method, *Journal of mechanics*, 2014, vol. 30, no. 6, pp. 561-570. DOI: [10.1017/jmech.2014.65](https://doi.org/10.1017/jmech.2014.65)
25. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of an Elastoplastic Three-Layer Circular Plate in a Temperature Field, *Mechanics of Composite Materials*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 503–512. DOI: [10.1007/s11029-019-09829-6](https://doi.org/10.1007/s11029-019-09829-6)
26. Ryazantseva M.Y., Starovoitov E.I. Static and Dynamic Models of Bending for Elastic Sandwich Plates, *Structural Integrity*, 2019, vol. 8, pp. 294–297. DOI: [10.1007/978-3-030-21894-2_54](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_54)
27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Thermoelastic Deformation of a Circular Sandwich Plate by Local Loads, *Mechanics of Composite Materials*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 299-312. DOI: [10.1007/s11029-018-9740-x](https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x)
28. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads, *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 665–672. DOI: [10.1007/s11029-016-9615-y](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9615-y)
29. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchie sootnosheniya i variatsionnye printsipy matematicheskoi teorii uprugosti* (General ratios and variation principles of mathematical theory of elasticity) Moscow, Izd-vo MAI-PRINT, 2009, 112 p.

30. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Uprugie plastiny i plogie obolochki* (Elastic Plates and Shallow Shells), Moscow, Izd-vo MAI, 2018, 92 p.

31. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasy i Z-preobrazovaniy* (Guide to the Practical application of Laplace and Z-transforms), Moscow, Izd-vo Nauka, 1971, 288 p.

32. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical Methods), Moscow, Nauka, 1975, 630 p.

33. Ashkenazi E.K. *Anizotropiya drevesiny i drevesnykh materialov* (Wood and Wood Materials Anisotropy), Moscow, Lesnaya promyshlennost', 1978, 224 p.

34. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2013, no. 1(3), pp. 115 - 119.

Статья поступила в редакцию 23.09.2021; одобрена после рецензирования 30.09.2021; принята к публикации 22.10.2021.

The article was submitted 23.09.2021; approved after reviewing 30.09.2021; accepted for publication 22.10.2021.