УДК 539.3

Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала

Зверяев Е.М.,* Олехова Л.В.**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,

Миусская пл., 4, Москва, 125047, Россия

**e-mail: zveriaev@gmail.com ,*

***olekhova@gmail.com*

Аннотация

Рассмотрена задача построения уравнений состояния для полосы и пластины из композиционного материала близких к уравнениям классической теории. Процесс построения основан на полуобратном методе Сен-Венана, трактуемом как итерационный и подчиняющийся принципу сжатых отображений. Уравнения теории упругости преобразуются так, чтобы при вычислениях можно было использовать метод простых итераций. В них выделяется малый параметр для анализа сходимости процесса. Решение в первом приближении позволяет определить все искомые неизвестные, выраженные через величины нулевого приближения. Выполнение граничных условий на лицевых поверхностях дает уравнения состояния тела с эффективными коэффициентами для определения величин нулевого приближения, учитывающими интегральные свойства композита. Подстановка найденных из этих уравнений величин в выражения для неизвестных первого приближения дает локальные напряжения и перемещения.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, балка, пластина, малый параметр, композиционный материал.

Введение

Решающую роль играет постановка задачи и такой анализ результатов ее решения, который позволяет сделать некоторые общие, скорее, качественные, заключения. Напротив, увеличение точности качественно ясных результатов оказывается зачастую ненужным. Такое положение дел существовало всегда, и появление и широкое распространение вычислительных машин лишь усугубило его. С помощью машинной математики многие технические трудности были преодолены, в результате чего возможности расчетов неизмеримо выросли. Однако познавательная ценность извлекаемых результатов ещё более чем в докомпьютерную эру определяется адекватностью модели, чёткостью постановки задачи расчета и глубиной предварительного анализа имеющихся данных.

При построении моделей композиционных материалов и изделий из них необходимо экспериментальное определение свойств материалов с различными схемами армирования. Однако толкование измеренных величин требует теоретических представлений о работе материала, образуя, таким образом, замкнутый круг, выйти из которого можно только построив «вчерне» некоторую механическую модель, и, может быть, улучшить ее в дальнейшем. Инженер, имея, например, балку из композиционного материала, интересуется в первую очередь ее интегральной изгибной жесткостью для определения прогиба из разрешающего уравнения и затем, вычисляя напряжения, локальными соотношениями. При определении интегральных свойств интерес представляют осредненные коэффициенты жесткости разрешающих уравнений, полученные в результате наилучшего приема осреднения, определяемого как материалом, так и формой рассматриваемого тела. Поэтому надо найти такой способ построения теоретических моделей изделий из композиционных материалов, который позволит определить не только осредненные характеристики, но и описать локальные особенности происходящих процессов. В [1], доступным языком описаны существующие методы моделирования композиционных сред уравнениями с быстро меняющимися коэффициентами. Процедура замены неоднородной среды на однородную носит название гомогенизации [2]. Решение строится в виде суммы «усредненного по объему структурной ячейки медленно меняющегося члена решения и локальной поправки, которая имеет нулевое среднее значение по объему ячейки периодичности» [1, 3]. Метод успешно применяется для решения уравнений с одним неизвестным.

Для решения систем уравнений теории упругости Б. Сен-Венаном предложен полуобратный метод. В монографии [4] рассмотрены задачи изгиба и кручения длинного стержня, сопровождающиеся пояснениями: «Дело обстоит иначе, если применяют смешанный метод и идут как бы полуобратным, или промежуточным, путем между трудным или невозможным определением перемещений при заданных силах и непосредственным и легким определением сил по перемещениям, предполагаемым заданными. Этот метод состоит в том, что задаются частью перемещений и одновременно частью сил и, соответственно, определяют точным расчетом, какими должны быть другие перемещения и другие силы, убедившись, разумеется, в том, что выбранные данные согласуются между собой. Действуя таким образом, можно встретиться только с доступными для решения интегралами, дающими легко вычисляемые выражения, и получить полное и точное решение задачи о перемещениях для большого числа частных случаев, которые встречаются на практике или дают как бы пределы, к которым практические данные, вообще говоря, достаточно хорошо приближаются.» Именно таким образом, Сен-Венан выделил из общей задачи нагружения стержня, подобрав величины исходного приближения, задачи кручения и изгиба. Если задаться, как рекомендует Сен-Венан, частью перемещений и частью сил и вычислить остальные искомые величины, можно через эти последние вычислить ранее заданные величины и, сравнив заданные и вычисленные между собой, сделать вывод о правильности выбора заданных величин. Принимая заданные величины в качестве величин нулевого приближения и обозначив эти же величины после вычисления через остальные как величины первого приближения, приходим к последовательным приближениям. На этом основании будем считать полуобратный метод Сен-Венана, в котором он выделяет искомый вид решения путем задания величин нулевого приближения с заданными свойствами, нулевым приближением метода последовательных приближений.

Решение задач теории упругости всегда связано с использованием априорной информации о виде решения. В энергетических методах это проявляется в выборе базисных функций в виде полиномов или функций ортогональных рядов. Используются термины вроде «одночленной» или «двухчленной» аппроксимации решения [5]. Появилось выражение «что заложишь, то и получишь». При построении теории пластин и оболочек искомое решение выделяется путем использования гипотезы прямой нормали в геометрических уравнениях и осреднением уравнений равновесия [6]. Для выделения решений специального вида в теории оболочек А.Л. Гольденвейзером [7] предложено использовать для разложения каждого неизвестного в ряды по малому параметру с множителями в виде малого параметра в соответствующей степени. Одну из особенностей такого подхода можно пояснить с помощью примера для системы алгебраических уравнений.

Пример. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$u + \varepsilon^2 v = b, \quad \varepsilon^3 u - v = 0\,, \tag{B.1}$$

в которых u, v – искомые неизвестные, b – заданная величина. Решение будем искать в виде разложений неизвестных в ряды по малому параметру ε

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \cdots. \tag{B.2}$$

Примем, что заданная величина b также раскладывается по степеням величины ε $b = b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \cdots$. Подставив эти разложения в уравнения системы (B.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины ε в левых и правых частях уравнений, получим последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений неизвестных u, v

$$u_i + v_{i-2} = b, \quad u_{i-3} - v_i = 0\,, \tag{B.3}$$

в которых величины с отрицательными индексами следует считать равными нулю. Соответствующая последовательность систем выглядит так

$$\begin{matrix} u_0 = b_0 \\ v_0 = 0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_1 = b_1 \\ v_1 = 0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_2 + v_0 = b_2 \\ v_2 = 0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_3 + v_0 = b_3 \\ v_3 = u_0 \end{matrix}, \qquad \cdots,$$

откуда видно, что для нахождения ненулевых значений неизвестных надо провести четыре итерации. Взяв разложения в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots, \quad v = \varepsilon^3 \left(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \cdots \right) \tag{B.4}$$

получим последовательность систем

$$\begin{matrix} u_0 = b_0 \\ v_0 = u_0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_1 = b_1 \\ v_1 = u_1 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_2 = b_2 \\ v_2 = u_2 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} u_i = b_i \\ v_i = u_i \end{matrix}, \qquad \cdots,$$

в которой в каждой итерации система разрешима, позволяя определить все неизвестные. Разложение вида (В.2), начинающиеся для каждого неизвестного с члена с коэффициентом ε^0, назовем нулевыми разложениями, разложения вида (В.4), с подобранными (или взвешенными) весовыми коэффициентами, различными для каждого неизвестного, – согласованными.

В задачах теории упругости использованным выше обозначениям u, v соответствуют дифференциальные операторы с большим числом неизвестных, содержащие малые параметры. Соответственно, использование нулевых асимптотических разложений приводит к необоснованному повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и к невозможности их сведения, даже частично, к уравнениям классической теории. Поэтому каждое неизвестное должно быть представлено в соответствии с примером, данным разложениями (В.3), (В.5), в виде

$$y_k = \varepsilon^{\alpha_k} (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) \tag{B.5}$$

в котором k – число неизвестных. Величину ε^{α_k} будем называть весовым коэффициентом k-ого неизвестного, а α_k – его показателем, подлежащим определению. Легко видеть, что в разложениях (В.2), (В.4), (В.5) величины u_i, v_i, y_i при $i > 0$ играют второстепенную роль уточнения величины y_0, тогда как весовой множитель ε^{α_k} определяют не только количественную, но и качественную роль k-ого неизвестного.

Проблема определения весовых коэффициентов в задачах теории оболочек сведена к методу простых итераций в работе [8]. В справочнике [9] метод последовательных приближений носит имя Пикара-Линделёфа. Метод в применении к задачам элементарной математики описан в [10]. С помощью метода простых итераций в работе [6] получена уточненная теория изгиба пластин типа Э. Рейсснера и в работе [11] – уточненная теория колебаний балки типа С.П. Тимошенко. Выделение в исходных уравнениях малого параметра (или двух [12]) позволило использовать метод простых итераций для установления весовых коэффициентов и вида асимптотических разложений для построения процедуры интегрирования.

Изложение связи метода простых итераций с принципом сжатых отображений и теоремой о неподвижной точке (теорема Банаха) можно найти в любом курсе функционального анализа. Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях простейшим и в то же время наиболее важным является, так называемый, принцип сжатых отображений, дающим путь достижения неподвижной точки – метод простых итераций.

Связь метода простых итераций и метода асимптотического интегрирования исследована в работах [6, 8, 11-13]. Показано, что для уравнений с малым параметром метод простых итераций устанавливает форму асимптотических разложений каждого неизвестного путем определения весовых коэффициентов. Полученные в результате простых итераций и в результате асимптотического интегрирования компоненты медленно меняющихся решений совпадают. Быстро меняющиеся компоненты типа пограничного слоя и в том и другом методах определяются грубо, т. к. при изменяемости НДС порядка единица, когда искомые функции при дифференцировании возрастают в ε^{-1} раз, хорошую точность, вообще говоря, можно получить только из решения уравнений теории упругости.

1. Уравнения теории изгиба балки из композиционного материала

Рассмотрим задачу определения НДС длинной упругой полосы, соответствующей балке в сопротивлении материалов, модуль упругости и коэффициент Пуассона которой меняются по высоте по произвольному закону. При E и ν постоянных эта задача решена в [6, 11]. Будем исходить из уравнений плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial \tau^*}{\partial z^*}=0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial \tau^*}{\partial x^*}=0, \quad \varepsilon_x=\frac{E^*}{1-\nu^{*2}}\left(\sigma_x-\nu\sigma_z\right), \quad \varepsilon_z=\frac{E^*}{1-\nu^{*2}}\left(\sigma_z-\nu\sigma_x\right),$$

$$\gamma=\frac{E^*}{2\left(1+\nu^*\right)}\tau \qquad \varepsilon_x=\frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma=\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}$$

Отмеченные звездочкой величины являются размерными. Полосу, длиной l и толщиной $2h$ отнесем к системе прямоугольных координат, считая, что $0 \le x \le l$ и $-1 \le z \le 1$. Введем безразмерные координаты $x = x^* / l,\ z = z^* / h$, безразмерные перемещения $u = u^* / h$, $w = w^* / h$, безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h^*$, $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h^*$, $\tau = \tau^* / E_h^*$, некоторую величину E_h^*, представляющую собой, например, среднее значение модуля упругости, и безразмерный модуль упругости $E = E^* \big/ E_h^*$. Будем считать, что $E = E(z)$. Уравнения представим в виде, позволяющем последовательноопределить все неизвестные

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z, \quad \varepsilon_z = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_z - \nu\varepsilon_x, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \tag{1.1}$$

Действительно, если в двух первых уравнениях выбрать в качестве начального приближения величины $w = w_0, \tau = \tau_0$ в качестве известных, остальные неизвестные могут быть вычислены последовательно. Сначала вычисляются u_0 и σ_{z0} путем прямого интегрирования по z, затем через них – ε_{x0}, σ_{x0}, ε_{z0}. Потом по известным σ_{x0}, ε_{z0} вычисляются w_1 и τ_1 в первом приближении и т.д.

В качестве величин начального приближения возьмем $w = w_0(x),\ \tau = \tau_0(x)$, считая поперечное перемещение и касательное напряжение в нулевом приближении независящими от поперечной координаты. В итоге получим следующую запись искомых неизвестных в первом приближении:

$$w=w_0+\varepsilon^2 w_0''\int_0^z \nu z dz+\varepsilon\tau_0'\left[\int_0^z \nu\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E}zdz\right]-\varepsilon u_0'\int_0^z \nu dz+\sigma_{z0}\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E}dz,$$

$$u=-\varepsilon w_0' z+\tau_0\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dz+u_0+\varepsilon^2 u_0''\left[-\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z Edzdz+\int_0^z\int_0^z \nu zdzdz\right]+$$
$$+\varepsilon\sigma_{z0}'\left[-\int_0^z\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E}zdzdz-\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z \nu dzdz\right],$$

$$\tau=\varepsilon^3 w_0'''\int_0^z Ezdz+\tau_0+\varepsilon^2\tau_0''\left[-\int_0^z E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^z \nu zdz\right]-\varepsilon^2 u_0''\int_0^z Edz-\varepsilon\sigma_{z0}'\int_0^z \nu dz,$$

$$\sigma_z=-\varepsilon^4 w_0^{IV}\int_0^z\int_0^z Ezdzdz-\varepsilon\tau_0' z-\varepsilon^3\tau_0'''\int_0^z\left[-\int_0^z E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz+\int_0^z \nu zdz\right]dz+$$
$$+\sigma_{z0}+\varepsilon^3 u_0'''\int_0^z\int_0^z Edzdz+\varepsilon^2\sigma_{z0}''\int_0^z\int_0^z \nu dzdz, \tag{1.2}$$

$$\sigma_x=-E\varepsilon^2 w_0'' z+\varepsilon\tau_0'\left[E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dz-\nu z\right]+E\varepsilon u_0'+$$
$$+\varepsilon^3 u_0'''\int_0^z\int_0^z Edzdz+\nu\sigma_{z0}+\varepsilon^2\sigma_{z0}''\int_0^z\int_0^z \nu dzdz,$$

$$\varepsilon_x=-\varepsilon^2 w_0'' z+\varepsilon\tau_0'\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dz+\varepsilon u_0',$$

$$\varepsilon_z=\nu\varepsilon^2 w_0'' z+\varepsilon\tau_0'\left[\nu\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dz-\frac{1-\nu^2}{E}z\right]-\nu\varepsilon u_0'+\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{z0}.$$

Неизвестные выражены через четыре новые величины нулевого приближения $w_0, \tau_0, \sigma_{z0}, u_0$. Две последние являются произволами интегрирования системы (1.1), при $w=\tau=0$ и являются функциями только координаты x.

2. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

Теперь надо выполнить граничные условия на длинных краях

$\tau=\tau_+$ при $z=1$, $\tau=\tau_-$ при $z=-1$ и $\sigma_z=q_+$ при $z=1$, $\sigma_z=q_-$ при $z=-1$.

Подставим выражения τ и σ_z из (1.2) в эти условия. После преобразований (сложения и вычитания попарно) и упрощений получается система из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $w_0, \tau_0, \sigma_{z0}, u_0$:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^3 w_0''' e_{11} + 2\tau_0 - \varepsilon^2 \tau_0'' e_{12} - \varepsilon^2 u_0'' e_{13} - \varepsilon \sigma_{z0}' e_{14} = \tau_+ + \tau_- \\
&-\varepsilon^4 w_0^{IV} e_{21} - 2\varepsilon \tau_0' + \varepsilon^3 \tau_0''' e_{22} + \varepsilon^3 u_0''' e_{23} + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' e_{24} = q_+ - q_- \\
&\varepsilon^3 w_0''' e_{31} + \varepsilon^2 \tau_0'' e_{32} - \varepsilon^2 u_0'' e_{33} - \varepsilon \sigma_{z0}' e_{34} = \tau_+ - \tau_- \\
&-\varepsilon^4 w_0^{IV} e_{41} - \varepsilon^3 \tau_0''' e_{42} + \varepsilon^3 u_0''' e_{43} + 2\sigma_{z0} + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' e_{44} = q_+ + q_-
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

в которых коэффициенты (осредненные) определяются следующими выражениями:

$$e_{11} = \int_0^1 Ezdz + \int_0^{-1} Ezdz, \quad e_{12} = \int_0^1 E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^1 \nu zdz + \int_0^{-1} E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^{-1} \nu zdz$$

$$e_{13} = \int_0^1 Edz + \int_0^{-1} Edz, \quad e_{14} = \int_0^1 \nu dz + \int_0^{-1} \nu dz. \quad e_{21} = \int_{-1}^1 \int_0^z Ezdzdz,$$

$$e_{22} = \int_{-1}^1 \left[\int_0^z E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_0^z \nu zdz \right] dz, \quad e_{23} = \int_{-1}^1 \int_0^z Edzdz, \; e_{24} = \int_{-1}^1 \int_0^z \nu dzdz$$

$$e_{31} = \int_{-1}^1 Ezdz, \quad e_{32} = \left[-\int_{-1}^1 E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz + \int_{-1}^1 \nu zdz \right], \quad e_{33} = \int_{-1}^1 Edz, \quad e_{34} = \int_{-1}^1 \nu dz$$

$$e_{41} = \int_0^1 \int_0^z Ezdzdz + \int_0^{-1} \int_0^z Ezdzdz$$

$$e_{42} = \int_0^1 \left[-\int_0^z E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz + \int_0^z \nu zdz \right] dz + \int_0^{-1} \left[-\int_0^z E\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz + \int_0^z \nu zdz \right] dz$$

$$e_{43} = \int_0^1 \int_0^z Edzdz + \int_0^{-1} \int_0^z Edzdz, \quad e_{44} = \int_0^1 \int_0^z \nu dzdz + \int_0^{-1} \int_0^z \nu dzdz.$$

Таким образом, в общем случае нагружения НДС композитной полосы описывается уравнениями (2.1) с 16 эффективными коэффициентами жесткости. В частности, для задач, ограничивающихся моделями аналогичными классической теории балок и имеющих дело с медленно меняющимися по длине нагрузками, систему (2.1) можно упростить, отбросив производные с малыми множителями по сравнению с самой функцией. Вместо системы (2.1) будем иметь такую

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3 w_0''' e_{11} + 2\tau_0 - \varepsilon^2 u_0'' e_{13} - \varepsilon\sigma_{z0}' e_{14} = \tau_+ + \tau_- \\
&-\varepsilon^4 w_0^{IV} e_{21} - 2\varepsilon\tau_0' + \varepsilon^3 u_0''' e_{23} + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' e_{24} = q_+ - q_- \\
&\varepsilon^3 w_0''' e_{31} + \varepsilon^2 \tau_0'' e_{32} - \varepsilon^2 u_0'' e_{33} - \varepsilon\sigma_{z0}' e_{34} = \tau_+ - \tau_- \\
&-\varepsilon^4 w_0^{IV} e_{41} - \varepsilon^3 \tau_0''' e_{42} + \varepsilon^3 u_0''' e_{43} + 2\sigma_{z0} = q_+ + q_-
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Здесь относительный вклад каждого слагаемого в каждое уравнение зависит от его весового множителя. Будем разыскивать решение системы в виде разложения каждого искомого неизвестного в асимптотический ряд по малому параметру ε

$$w_0 = \varepsilon^{-a}\left(w_{00} + \varepsilon^2 w_{01} + \ldots\right), \quad \tau_0 = \varepsilon^{-b}\left(\tau_{00} + \varepsilon^2 \tau_{01} + \ldots\right),$$

$$u_0 = \varepsilon^{-c}\left(u_{00} + \varepsilon^2 u_{01} + \ldots\right), \qquad \sigma_{z0} = \varepsilon^{-d}\left(\sigma_{z00} + \varepsilon^2 \sigma_{z01} + \ldots\right).$$

Множители перед скобками разложений являются весовыми коэффициентами. Показатели a, b, c, d должны быть непротиворечивыми, допуская определение всех искомых неизвестных рассматриваемой системы рекуррентным образом в порядке возрастания номера приближения. Этому условию удовлетворяют

$$a = 4, \quad b = 1, \quad c = 3, \quad d = 0 \qquad (2.3)$$

Для других значений показателей система (2.2), в которой оставлены только главные члены, будет противоречивой. В случае значений показателей (2.3) асимптотические ряды для неизвестных имеют вид

$$w_0 = \varepsilon^{-4}\left(w_{00} + \ldots\right), \quad \tau_0 = \varepsilon^{-1}\left(\tau_{00} + \ldots\right), \quad u_0 = \varepsilon^{-1}\left(u_{00} + \ldots\right), \quad \sigma_{z0} = \sigma_{z00} + \ldots,$$

Подставим разложения в уравнения (2.2), в которых для простоты примем $\tau_+ = \tau_- = q_- = 0$, оставив загруженным только верхний край полосы. Для главных членов разложения получим систему уравнений

$$w_{00}'''e_{11} + 2\tau_{00} - u_{00}''e_{13} = 0$$

$$-w_{00}^{IV}e_{21} - 2\tau_{00}' + u_{00}'''e_{23} = q_+$$

$$w_{00}'''e_{31} - u_0''e_{33} = 0$$

$$-w_{00}^{IV}e_{41} + u_{00}'''e_{43} + 2\sigma_{z00} = 0$$

Из первых трех уравнений можно получить одно уравнение для w_{00}

$$Cw_{00}^{IV} = q \tag{2.4}$$

в котором коэффициент эффективной изгибной жесткости определяется формулой

$$C = e_{11} - e_{21} - \frac{e_{31}}{e_{33}}\left(e_{13} + e_{23}\right) =$$
$$= \int_0^1 Ezdz + \int_0^{-1} Ezdz - \int_{-1}^1\int_0^z Ezdzdz - \frac{\int_{-1}^1 Ezdz}{\int_{-1}^1 Edz}\left(\int_0^1 Edz + \int_0^{-1} Edz + \int_{-1}^1\int_0^z Edzdz\right), \tag{2.5}$$

и через известную теперь величину w_{00} записать выражения для остальных неизвестных

$$u''_{00} = \frac{e_{31}}{e_{33}} w'''_{00}, \quad \sigma_{z00} = \frac{1}{2}\left(w^{IV}_{00} e_{41} - u'''_{00} e_{43}\right), \quad \tau_{00} = \frac{1}{2}\left(u''_{00} e_{13} - w'''_{00} e_{11}\right). \tag{2.6}$$

При $E = E_c = \text{const}$ имеем $e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{11} = E_c, \quad e_{21} = \frac{1}{3} E_c$ и это дает классическое уравнение изгиба простой балки (в безразмерном виде) $E_c \varepsilon^4 w_0^{IV} = q$.

Коэффициент жесткости (2.5) может быть легко вычислен для любого закона распределения модуля упругости. В случае медленно меняющегося НДС, входящие в выражения (2.5), (2.6) интегралы не зависят от коэффициента Пуассона. После определения неизвестных $w_{00}, \tau_{00}, \sigma_{z00}, u_{00}$ с помощью уравнений (2.4), (2.6) их надо помножить на весовые коэффициенты с показателями (2.3) и подставить в выражения (1.2), задающие закон распределения компонент напряженно-деформированного состояния в каждой точке. Если модуль E задан как кусочно-постоянная функция, имеет место случай слоистой полосы. Перемещения w, u и напряжения σ_z, τ в выражениях (1.2) непрерывны как для медленно меняющегося состояния, так и для быстро меняющегося. Напряжение σ_z и деформация ε_z могут иметь устранимые разрывы. Если рассматривать быстроменяющиеся состояния, необходимо решать уравнения (2.1) без каких-либо отбрасываний производных. Они в случае статической задачи порождают в области приложения локальной нагрузки (сосредоточенной силы) и на торцевых поверхностях решения типа пограничного слоя.

3. Построение решения для плиты из композиционного материала

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния упругой плиты, модуль упругости и коэффициент Пуассона которой меняются по высоте по произвольному закону $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Будем исходить из уравнений пространственной теории упругости, отметив звездочкой, как и ранее, размерные величины. Совместим срединную плоскость прямоугольной плиты с плоскостью $x^* y^*$ декартовой системы координат $x^* y^* z^*$. Пусть a, b – размеры плиты вдоль осей x^* и y^* соответственно, $2h$ – толщина плиты и $0 \le x^* \le a, 0 \le y^* \le b, \ -h \le z^* \le h$. Классические уравнения теории упругости после введения безразмерных координат $x = x^*/a, \ \ y = y^*/a, \ z = z^*/h,$ перемещений $u = u^*/h, \ \ v = v^*/h, \ \ w = w^*/h$, напряжений $\sigma_x = \sigma_x^*/E_h^*, \ \sigma_y = \sigma_y^*/E_h^*, \ \sigma_z = \sigma_z^*/E_h^*, \ \tau = \tau^*/E_h^*$, запишем в следующей форме

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z, .. \varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \varepsilon\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

Здесь введен малый параметр $\varepsilon = h/a$. Область, занятая плитой, в безразмерных координатах задается выражениями: $0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le b/a, \ -1 \le z \le 1$.

Записанная система уравнений позволяет использовать метод последовательных приближений (метод простых итераций) для нахождения решения. Если в трех первых уравнениях перемещение $w = w_0$ и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{xz0}$, $\tau_{yz} = \tau_{yz0}$ рассматривать в качестве известных величин начального приближения, остальные неизвестные могут быть вычислены последовательно. Выбрав в качестве величин начального приближения $w = w_0(x, y)$, $\tau_{xz} = \tau_{0xz}(x, y)$, $\tau_{yz} = \tau_{0yz}(x, y)$, проведем вычисления как для полосы и в итоге получим следующую запись искомых неизвестных в первом приближении:

– нормальное перемещение

$$w = w_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz - \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \left[\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} z dz \right] - \varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz,$$

– тангенциальные перемещения

$$u = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} z + \tau_{xz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^z \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz,$$

$$v = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z + \tau_{yz0} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + v_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \int_0^z \int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz -$$

$$-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} \int_0^z \int_0^z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1+\nu)} dz dz - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \frac{E}{2(1-\nu)} dz dz -$$

$$-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz\,,$$

– поперечные касательные напряжения

$$\tau_{xz}=\tau_{xz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\left[\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\int_0^z\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\int_0^z\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dz\,,$$

$$\tau_{yz}=\tau_{yz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}\left[\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\left[\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz\right]-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}dz-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_0^z\frac{E}{2(1+\nu)}dz-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\int_0^z\frac{E}{2(1-\nu)}dz-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

считающиеся в традиционных теориях постоянными по толщине, и

$$\tau_{xy} = -\varepsilon^2 \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{0xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{0yz}}{\partial y}\right)\int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz + \varepsilon \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right),$$

– нормальное напряжение

$$\sigma_z = \sigma_{z0} - \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} z dz dz - \varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) z +$$

$$+\varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)\left[\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz dz\right] +$$

$$+\varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\left[\int_0^z\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} z dz\right] -$$

$$-2\varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y^2}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E} dz dz dz +$$

$$+\varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2} dz dz + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)\int_0^z\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu} dz dz$$

также отсутствующее в традиционных теориях пластин;

– нормальные напряжения в плоскости пластины

$$\sigma_x = -\varepsilon^2 \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) z + \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right)\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz -$$

$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) + \varepsilon \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

$$\sigma_y = -\varepsilon^2 \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) z + \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x}\right)\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz -$$

$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon z\left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x}\right) + \varepsilon \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

– поперечную деформацию

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)z - \varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right)\left[\frac{\nu}{1-\nu}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dz + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}z\right] - \varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_{z0},$$

которая в традиционных теориях не определяется.

4. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах

Примем, что нагрузки, приложенные к верхней и нижней поверхностям пластины, уравновешены возникающими в пластине нормальными и касательными напряжениями:

$$\tau_{yz} = \tau_{yz+} \text{ при } z=1,\ \tau_{yz} = \tau_{yz-} \text{ при } z=-1;\ \sigma_z = q_+ \text{ при } z=1,\ \sigma_z = q_- \text{ при } z=-1.$$

Подставим выражения τ_{xz}, τ_{yz}, и σ_z в эти условия. После преобразований и упрощений исходная задача сведется к решению системы 6 равнений с 6 неизвестными $w_0, \tau_{0xz}, \tau_{0yz}, \sigma_{0z}, u_0, v_0$:

$$\tau_{xz+} + \tau_{xz-} = 2\tau_{xz0} + \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)e_{11} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}e_{12} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x\partial y}e_{13} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)e_{14} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{15} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{16} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}e_{17} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{18},$$

$$\tau_{xz+} - \tau_{xz-} = \varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)e_{21} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}e_{22} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x\partial y}e_{23} -$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}\right)e_{24} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{25} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{26} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}e_{27} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{28},$$

$$\tau_{yz+}+\tau_{yz-}=2\tau_{yz0}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)e_{31}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}e_{32}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}e_{33}-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)e_{34}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{35}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{36}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}e_{37}-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}e_{38},$$

$$\tau_{yz+}-\tau_{yz-}=\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)e_{41}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}e_{42}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}e_{43}-$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}\right)e_{44}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{45}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{46}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}e_{47}-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}e_{48},$$

$$q_++q_-=2\sigma_{z0}-\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)e_{51}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)e_{52}+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x\partial y^2}\right)e_{53}-2\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x\partial y^2}\right)e_{54}+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)e_{55}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)e_{56},$$

$$q_+-q_-=-\varepsilon^4\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)e_{61}-2\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial y^3}\right)e_{62}+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x\partial y^2}\right)e_{63}-2\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3\tau_{xz0}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\tau_{yz0}}{\partial x\partial y^2}\right)e_{64}+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right)e_{65}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{z0}}{\partial y^2}\right)e_{66},$$

в которых эффективные коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$e_{11}=e_{31}=\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}zdz,$$

$$e_{12}=e_{32}=\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz+\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{13}=e_{33}=\int_0^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz-\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{14}=e_{34}=\int_0^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz+\int_0^{-1}\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,\quad e_{15}=e_{35}=\int_0^1\frac{E}{1-\nu^2}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{1-\nu^2}dz,$$

$$e_{16}=e_{36}=\int_0^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1+\nu)}dz,\quad e_{17}=e_{37}=\int_0^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz+\int_0^{-1}\frac{E}{2(1-\nu)}dz,$$

$$e_{18}=e_{38}=\int_0^1\frac{\nu}{1-\nu}dz+\int_0^{-1}\frac{\nu}{1-\nu}dz,\quad e_{21}=e_{41}=\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}zdz,$$

$$e_{22}=e_{42}=\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz,\quad e_{25}=e_{45}=\int_{-1}^1\frac{E}{1-\nu^2}dz,$$

$$e_{23}=e_{43}=\int_{-1}^1\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}zdz,\quad e_{24}=e_{44}=\int_{-1}^1\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdz,$$

$$e_{26}=e_{46}=\int_{-1}^1\frac{E}{2(1+\nu)}dz,\quad e_{27}=e_{47}=\int_{-1}^1\frac{E}{2(1-\nu)}dz,\quad e_{28}=e_{48}=\int_{-1}^1\frac{\nu}{1-\nu}dz,$$

$$e_{51}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}zdzdz,$$

$$e_{52}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdzdz-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz-\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdzdz,$$

$$e_{53}=\int_0^1\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}dzdz-\int_0^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz-\int_0^{-1}\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}zdz,$$

$$e_{54}=\int_0^1\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz+\int_0^{-1}\int_0^z\frac{E}{1+\nu}\int_0^z\frac{1+\nu}{E}dzdzdz,\quad e_{66}=\int_{-1}^1\int_0^z\frac{\nu}{1-\nu}dzdz$$

$$e_{55}=\int_0^1\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}dzdz,\quad e_{56}=\int_0^1\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz+\int_0^{-1}\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}dzdz,$$

$$e_{61}=e_{65}=\int_{-1}^1\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}zdzdz,\quad e_{62}=\int_{-1}^1\int_0^z \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz-\int_{-1}^1\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdzdz,$$

$$e_{63}=\int_{-1}^1\int_0^z \frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz-\int_{-1}^1\int_0^z \frac{\nu}{1-\nu}zdz,\quad e_{64}=\int_{-1}^1\int_0^z \frac{E}{1+\nu}\int_0^z \frac{1+\nu}{E}dzdzdz.$$

5. Медленно меняющиеся нагрузки

В частности, для прикладных задач, ограничивающихся моделями, аналогичными классической теории пластин и балок, и имеющих дело с медленно меняющимися по длине нагрузками, систему уравнений можно упростить, воспользовавшись свойством малой изменяемости. При этом будем считать асимптотические порядки величин τ_{xz0} и τ_{yz0} одинаковыми, а изменяемости нулевыми. После упрощения получим следующую систему уравнений:

$$\tau_{xz+}+\tau_{xz-}=\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0 e_{11}+2\tau_{xz0}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{15}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{16}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}e_{17}-\varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{18}$$

$$\tau_{xz+}-\tau_{xz-}=\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0 e_{21}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2}e_{22}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x\partial y}e_{23}-$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{T}e_{24}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}e_{25}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}e_{26}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}e_{27}-\varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x}e_{28}$$

$$\tau_{yz+}+\tau_{yz-}=\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 e_{31}+2\tau_{yz0}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{35}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{36}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}e_{37}-\varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}e_{38}$$

$$\tau_{yz+}-\tau_{yz-}=\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 e_{41}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial y^2}e_{42}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x\partial y}e_{43}-$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{T}e_{44}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}e_{45}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}e_{46}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}e_{47}-\varepsilon\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y}e_{48},$$

$$q_+ + q_- = -\varepsilon^4 \Delta^2 w_0 e_{51} + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) e_{52} +$$

$$+\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} \right) e_{53} - 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathrm{T} e_{54} + \varepsilon^3 \Delta U e_{55} + 2\sigma_{z0},$$

$$q_+ - q_- = -\varepsilon^4 \Delta^2 w_0 e_{61} - 2\varepsilon \mathrm{T} + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 \tau_{xz0}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tau_{yz0}}{\partial y^3} \right) e_{62} +$$

$$+ \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} \right) e_{63} - 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathrm{T} e_{64} + \varepsilon^3 \Delta U e_{65} + \varepsilon^2 \Delta \sigma_{z0} e_{66}$$

Здесь введены обозначения $\mathrm{T} = \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}, \quad U = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}.$

Решение системы будем искать в виде разложений неизвестных в ряды по степеням малого параметра ε. Показатели весовых коэффициентов выберем такими же, как для полосы

$$w_0 = \varepsilon^{-4} \left(w_{00} + \varepsilon^2 w_{01} + \ldots \right), \quad \tau_{xz0} = \varepsilon^{-1} \left(\tau_{xz00} + \varepsilon^2 \tau_{xz01} + \ldots \right), \quad \tau_{yz0} = \varepsilon^{-1} \left(\tau_{xz00} + \varepsilon^2 \tau_{xz01} + \ldots \right),$$

$$u_0 = \varepsilon^{-3} \left(u_{00} + \varepsilon^2 u_{01} + \ldots \right), \quad v_0 = \varepsilon^{-3} \left(v_{00} + \varepsilon^2 v_{01} + \ldots \right), \quad \sigma_{z0} = \sigma_{z00} + \varepsilon^2 \sigma_{z01} + \ldots$$

При этом все величины в скобках считаются имеющими одинаковый порядок ε^0. Соответственно, имеем оценки $\mathrm{T}_0 = \frac{\partial \tau_{xz00}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz00}}{\partial y} \sim \varepsilon^{-1}, \quad U_0 = \frac{\partial u_{00}}{\partial x} + \frac{\partial v_{00}}{\partial y} \sim \varepsilon^{-3}.$

Отбрасывая на основании оценок малые второго порядка по сравнению с главными, после преобразований получим упрощенные уравнения:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xz+} + \tau_{xz-} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yz+} + \tau_{yz-} \right) = \varepsilon^3 \Delta^2 w_{00} e_{11} + 2\varepsilon \mathrm{T}_0 - \varepsilon^2 \Delta U_0 e_{15}$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xz+} - \tau_{xz-} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yz+} - \tau_{yz-} \right) = \varepsilon^3 \Delta^2 w_0 e_{21} - \varepsilon^2 \Delta U e_{25}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}+\tau_{xz-}\right)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}+\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^2\left[-\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]e_{15}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz+}-\tau_{xz-}\right)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz+}-\tau_{yz-}\right)=\varepsilon^2\left[-\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]e_{26}$$

$$\left(q_+-q_-\right)_0=-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{61}-2\varepsilon\mathrm{T}_0+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{65},$$

$$\left(q_++q_-\right)_0=-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{51}+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{55}+2\sigma_{z00}.$$

Для упрощения изложения примем $\tau_{xz+}=\tau_{xz-}=\tau_{yz+}=\tau_{yz-}=q_-=0,\ q_+=q$. Первые два уравнения и последние образуют систему уравнений с четырьмя неизвестными $\Delta^2 w_{00}, \mathrm{T}_0, \Delta U_0, \sigma_{z00}$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3\Delta^2 w_{00}e_{11}+2\mathrm{T}_0-\varepsilon^2\Delta U_0 e_{15}=0,\\
&-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{61}-2\varepsilon\mathrm{T}_0+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{65}=q_0,\\
&\varepsilon^3\Delta^2 w_{00}e_{21}-\varepsilon^2\Delta U_0 e_{25}=0,\\
&-\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}e_{51}+\varepsilon^3\Delta U_0 e_{55}+2\sigma_{z00}=q_0.
\end{aligned}\tag{5.1}$$

Все неизвестные системы легко определяются. Из третьего уравнения получаем

$$\Delta U=\varepsilon\Delta^2 w_{00}\frac{e_{21}}{e_{25}}.$$

Два первых в сумме дают

$$\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}\left(e_{11}-e_{61}\right)-\varepsilon^3\Delta U_{00}\left(e_{15}-e_{65}\right)=q_0.$$

Заменив ΔU_0, получим уравнение, совпадающее с классическим уравнением изгиба

$$\varepsilon^4\Delta^2 w_{00}C=q_0,$$

в котором изгибная жесткость C определена формулой

$$C = e_{11} - e_{61} + \frac{e_{21}}{e_{25}} \left(e_{65} - e_{15} \right) =$$

$$= \int_0^1 E^{PS} z dz + \int_0^{-1} E^{PS} z dz - \int_{-1}^{1} \int_0^{z} E^{PS} z dz dz + \frac{\int_{-1}^{1} E^{PS} z dz}{\int_{-1}^{1} E^{PS} dz} \left(\int_{-1}^{1} \int_0^{z} E^{PS} z dz dz - \int_0^1 E^{PS} dz - \int_0^{-1} E^{PS} dz \right),$$

и введено обозначение $E^{PS} = \frac{E}{1-\nu^2}$.

Зная $\Delta^2 w_{00}$, можно вычислить ΔU_0:

$$\Delta U_0 = \varepsilon^{-3} \frac{q_0}{C} \frac{e_{21}}{e_{25}} = \varepsilon^{-3} \frac{q_0}{C} \frac{\int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} z dz}{\int_{-1}^{1} \frac{E}{1-\nu^2} dz}.$$

Четвертое уравнение из системы (5.1) дает

$$\sigma_{z00} = \frac{q_0}{2} \left(1 + \frac{e_{51}}{C} - \frac{e_{21} e_{55}}{C e_{25}} \right)$$

и из первого уравнения получаем последнее неизвестное

$$\mathrm{T}_0 = \varepsilon^{-1} \frac{q_0}{C} \left(\frac{e_{21} e_{15}}{e_{25}} - e_{11} \right).$$

Заключение

Без каких либо гипотез априорного осреднения в соответствии с полуобратным методом Сен-Венана построены в первом приближении теории изгиба полосы (балки) и пластины из композиционного материала. Большое количество получившихся эффективных коэффициентов жесткости требуется только для определения быстро меняющихся величин типа пограничного слоя на торцевых поверхностях и в месте приложения локальной нагрузки. Остальная область полосы и пластины имеет медленно меняющееся напряженно-деформированное состояние.

Библиографический список

1. Барзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 376 с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. - М.: Мир, 1982. - 334 с.
3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. - М.: Наука, 1984. - 352 с.
4. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. - М.: ГИФМЛ, 1961. - 519 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
6. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
8. Зверяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. №2. С. 3-19.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
10. Виленкин Н.Я. Метод последовательных приближений. – М.: Наука, 1963. -108 с.

11.Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.

12.Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Оценка погрешности уравнений теории пологих оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 4. С. 38-42.

13.Зверяев Е.М. Итерационные методы в механике сплошных сред // Труды Международной молодежной научной конференции при поддержке РФФИ "Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций". Москва. 18 ноября 2014. Стр. 66-81.