Труды МАИ. 2022. № 124
Trudy MAI, 2022, no. 124

Научная статья
УДК 531.381
DOI: 10.34759/trd-2022-124-03

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Алексей Сергеевич Смирнов[1]✉, Борис Александрович Смольников[2]

[1,2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

[1,2]Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

[1]smirnov.alexey.1994@gmail.com✉

[2]smolnikovba@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается движение твердого тела под действием управляющего момента, формирование которого осуществляется различными способами и отвечает конкретным целям управления. Обсуждаются основные свойства коллинеарного управления и его модифицированного варианта, которые приводят к увеличению или уменьшению как кинетической энергии, так и кинетического момента, вследствие чего они позволяют осуществлять разгон или торможение твердого тела. Также рассматривается ортогональное управление, которое не нарушает постоянства кинетической энергии и кинетического момента и приводит к переориентации твердого тела в пространстве. Помимо этого, строятся комбинированные управления, которые сочетают в своей структуре особенности как коллинеарного, так и ортогонального управления. В качестве первого из них принимается управление, позволяющее рассеивать или накапливать кинетическую энергию при неизменном кинетическом моменте, а второй вариант напротив приводит к уменьшению или увеличению кинетического момента при постоянной кинетической энергии. Подобные управления можно трактовать как рациональные, поскольку они обладают эффективностью, имеют достаточно простую структуру и удобны для практической реализации. Кроме того, для построенных вариантов управления приводятся физические аналогии, позволяющие соотнести их действие с силами инерции, диссипативными силами внешнего и внутреннего трения, а также гироскопическими силами. На основе различных методов для упомянутых режимов строятся точные аналитические решения, описывающие процесс управляемого движения твердого тела и демонстрирующие его свойства. Полученные в работе результаты имеют не только фундаментальное теоретическое значение, но могут найти и применение при решении прикладных задач динамики твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело, рациональный режим управления, коллинеарное управление, ортогональное управление, комбинированное управление

Для цитирования: Смирнов А.С., Смольников Б.А. Построение и анализ рациональных режимов управления движением твердого тела // Труды МАИ. 2022. № 124. DOI: 10.34759/trd-2022-124-03

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF RATIONAL MODES OF RIGID BODY MOTION CONTROL

Alexey S. Smirnov[1], Boris A. Smolnikov[2]

[1,2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

St. Petersburg, Russia

[1,2]Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,

St. Petersburg, Russia

[1]smirnov.alexey.1994@gmail.com

[2]smolnikovba@yandex.ru

Abstract. The paper considers the motion of a rigid body under the action of a control moment, formation of which is carried out in various ways and meets the specific control goals. The main properties of the collinear control and its modified version are discussed, which lead to an increase or decrease in both kinetic energy and kinetic momentum, and as a result they allow overclocking or braking of a rigid body. Orthogonal control is also considered, which does not violate the constancy of kinetic energy and kinetic momentum and leads to a reorientation of the rigid body in space. In addition, combined control options are constructed, which have the features of both collinear and orthogonal controls in their structure. First control option allows dissipating or accumulating kinetic energy at a constant kinetic moment, and the second option, on the contrary, leads to a decrease or increase in the kinetic moment at a constant kinetic energy. Such controls can be interpreted as rational, since they are efficient, have a fairly simple structure, and are convenient for practical implementation. Moreover, physical analogies are given for the constructed control options, which make it possible to correlate their action with inertia forces, dissipative forces of external and internal friction, as well as gyroscopic forces. Based on various methods, exact analytical solutions are constructed for the mentioned modes, and these solutions describe the process of controlled motion of a rigid body and demonstrate its properties. The results obtained in the work are not only of fundamental theoretical significance, but can also be used in solving applied problems of rigid body dynamics.

Keywords: rigid body, rational control mode, collinear control, orthogonal control, combined control

For citation: Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Construction and analysis of rational modes of rigid body motion control. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: 10.34759/trd-2022-124-03

Введение

Задачам динамики твердого тела посвящено значительное число трудов [1-7]. Особый интерес при этом представляют вопросы о построении и исследовании режимов управления вращением закрепленного твердого тела вокруг неподвижной точки или незакрепленного твердого тела вокруг его центра масс, которые отвечают заданным целям [8-18]. К этому направлению, в частности, относится важная практическая задача о вращении космического аппарата, который трактуется как твердое тело, находящееся под действием управляющего момента. Для управления его движением обычно используются реактивные (газореактивные) двигатели, установленные на периферии корпуса и создающие моменты самовозбуждения, т. е. внешние силовые моменты вокруг главных осей инерции космического аппарата [9].

Из сказанного следует, что формирование рациональных управлений, посредством которых можно было бы реализовать необходимый режим или достичь некоторой конечной цели движения твердого тела, представляет не только фундаментальный теоретический интерес, но и практическое значение, что побуждает уделить данному вопросу серьезное внимание. Под рациональными управлениями здесь понимаются такие варианты их формирования, которые обладают достаточной эффективностью и при этом имеют относительно несложную форму записи, а потому будут иметь определенное удобство и при их реализации.

Ясно, что данные вопросы выходят далеко за рамки традиционных концепций и построений теории автоматического управления, поскольку при исследовании вращательных движений твердого тела при больших значениях угловых скоростей уравнения движения не допускают линеаризацию, и между различными угловыми степенями свободы отчетливо проявляется тесная динамическая связь [9]. Именно наличие нелинейных слагаемых в уравнениях движения заметно усложняет задачу синтеза законов управления. В этом случае для построения управляющих воздействий целесообразно в максимальной степени использовать собственные динамические свойства системы, т. е. ее кинетику, учитывающую динамическое взаимодействие различных степеней свободы и их естественную взаимосвязь [19].

Основной целью настоящей статьи является обсуждение и развитие уже известных ранее режимов коллинеарного и ортогонального управления движением твердого тела, а также построение и анализ комбинированных режимов управления, которые основаны на сочетании свойств коллинеарного и ортогонального режимов.

Уравнения управляемого движения твердого тела

Рассмотрим задачу о движении твердого тела под действием управляющего момента, создаваемого системой поворотных двигателей, причем ось этого момента может принимать произвольную ориентацию в связанных с телом осях. Запишем уравнение управляемого вращательного движения твердого тела в известном виде:

$$\dot{\underline{K}} + \underline{\omega} \times \underline{K} = \underline{m}, \tag{1}$$

где $\underline{K} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}$ – вектор кинетического момента твердого тела, $\underline{\underline{J}}$ – его тензор инерции в главных осях, A_1, A_2, A_3 – главные моменты инерции твердого тела, $\underline{\omega}$ – вектор угловой скорости, ω_1, ω_2, ω_3 – его проекции на главные оси инерции, $\underline{m}$ – вектор управляющего момента, m_1, m_2, m_3 – его проекции на эти же оси. При этом, под $\dot{\underline{K}}$ в (1) подразумевается локальная производная вектора $\underline{K}$, т. е. производная во вращающемся базисе, который отвечает главным осям инерции тела. В развернутой форме уравнение (1) записывается в виде трех динамических уравнений Эйлера [2]:

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_3\omega_2 = m_1 \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = m_2 \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_2\omega_1 = m_3 \end{cases}. \tag{2}$$

Кинетическая энергия T и квадрат вектора кинетического момента $\underline{K}$ имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2\right), \qquad K^2 = A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2. \tag{3}$$

Принимая во внимание уравнения (2), получим следующие ключевые соотношения:

$$\dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3, \quad \frac{1}{2}\dot{(K^2)} = \underline{m} \cdot \underline{K} = m_1A_1\omega_1 + m_2A_2\omega_2 + m_3A_3\omega_3, \tag{4}$$

которые демонстрируют изменение кинетической энергии и кинетического момента с течением времени. Ясно, что строить управляющие воздействия целесообразно, опираясь именно на эти соотношения. Подчеркнем, что величины m_1, m_2, m_3, фигурирующие в соотношениях (4), и играют роль управлений, полностью характеризуя модуль вектора $\underline{m}$ и его направление относительно главных осей инерции твердого тела. При этом будем полагать, что компоненты m_1, m_2, m_3 вектора $\underline{m}$ зависят только от компонент ω_1, ω_2, ω_3 вектора угловой скорости $\underline{\omega}$. В этом случае система динамических уравнений (2) становится автономной и описывает процесс управления угловой скоростью твердого тела.

Рассмотрим далее несколько вариантов формирования управляющего момента $\underline{m}$, которые отвечают различным целям управления, и обсудим их основные качественные и количественные особенности.

Коллинеарный и ортогональный режимы управления

Обратимся сначала к изучению управления, которое позволит усиливать или подавлять движения твердого тела. Ясно, что в этих случаях необходимо подчинить управляющий момент соответственно следующим парам соотношений:

$$\dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} \geq 0, \quad \frac{1}{2}\dot{(K^2)} = \underline{m} \cdot \underline{K} \geq 0 \ \text{ или } \ \dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} \leq 0, \quad \frac{1}{2}\dot{(K^2)} = \underline{m} \cdot \underline{K} \leq 0. \qquad (5)$$

Нетрудно понять, что обеспечить выполнение этих неравенств можно различными способами. Однако наиболее эффективными разгонными или тормозными свойствами обладает *коллинеарное управление*, когда вектор управляющего момента $\underline{m}$ формируется коллинеарно вектору кинетического момента системы, т. е. в виде:

$$\underline{m} = \gamma(t)\underline{K}, \tag{6}$$

где γ – управляющий коэффициент, который может быть как постоянным, так и являться некоторой заданной функцией времени. Управление (6) имеет четкую физическую трактовку – оно является кинетическим и действует в унисон с силами инерции, возникающими при разгоне твердого тела, и против сил инерции при его торможении. Отметим, что во втором из этих вариантов управление (6) может также трактоваться как диссипативные моменты внешнего вязкого трения [5, 20, 21]. Подставляя (6) в (5), легко получить следующие уравнения для определения *T* и *K*:

$$\dot{T} = 2\gamma(t)T, \quad \dot{K} = \gamma(t)K, \tag{7}$$

откуда ясно, что при $\gamma(t) > 0$ будет иметь место разгон твердого тела, а при $\gamma(t) < 0$ – его торможение, как и ожидалось. Решение уравнений (7) имеет следующий вид:

$$T = T_0 \exp\left[2\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right], \quad K = K_0 \exp\left[\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right], \tag{8}$$

где T_0 и K_0 – начальные значения (при $t = 0$) кинетической энергии и кинетического момента соответственно. При этом легко видеть, что $T / K^2 = T_0 / K_0^2$, как это было и для твердого тела в двухстепенном кардановом подвесе при наличии коллинеарного управления [8]. В частном случае, когда $\gamma(t) = \gamma = \mathrm{const}$, получим из (8):

$$T = T_0 e^{2\gamma t}, \quad K = K_0 e^{\gamma t}, \tag{9}$$

т. е. экспоненциальный закон нарастания (при $\gamma > 0$) или убывания (при $\gamma < 0$) как кинетической энергии, так и кинетического момента, но показатели экспонент в этих выражениях различаются в два раза. В более сложном случае, когда $\gamma(t)=\gamma_0 e^{\alpha t}$, т. е. сама функция $\gamma(t)$ экспоненциально нарастает (при $\alpha>0$) или убывает (при $\alpha<0$) во времени, получим согласно (8):

$$T=T_0\exp\left[\frac{2\gamma_0}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)\right],\quad K=K_0\exp\left[\frac{\gamma_0}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)\right]. \tag{10}$$

В частности, отсюда следует, что при $\alpha<0$, т. е. при плавном понижении значений функции $\gamma(t)$ с течением времени, можно обеспечить выход кинетической энергии и кинетического момента на постоянные уровни, поскольку при $t\to\infty$ будем иметь:

$$T\to T_0 e^{\frac{2\gamma_0}{|\alpha|}},\quad K\to K_0 e^{\frac{\gamma_0}{|\alpha|}}. \tag{11}$$

причем при $\gamma_0>0$ эти значения будут больше, чем T_0 и K_0 соответственно, а при $\gamma_0<0$ – меньше, как этого и следовало ожидать.

Обратимся теперь к исследованию случая, когда твердое тело обладает динамической симметрией, и полагая при этом $\gamma(t)=\gamma=\mathrm{const}$. В этой ситуации можно легко определить угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3 как функции времени *t*. Положим для определенности, что $A_1=A_2=A$, $A_3=C$. Тогда система уравнений (2) с учетом (6) приведется к следующему виду:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1+(C-A)\omega_3\omega_2=\gamma A\omega_1 \\ A\dot{\omega}_2-(C-A)\omega_1\omega_3=\gamma A\omega_2 \\ C\dot{\omega}_3=\gamma C\omega_3 \end{cases}. \tag{12}$$

Из последнего уравнения системы (12) сразу же находим зависимость

$$\omega_3=\omega_{30}e^{\gamma t}, \tag{13}$$

где ω_{30} – начальное значение величины ω_3. Обращаясь теперь к оставшимся двум уравнениям системы (12), домножим второе из них на мнимую единицу i и сложим с первым, как это сделано в [22], вводя при этом комплексную переменную $w = \omega_1 + i\omega_2$ и принимая во внимание выражение (13). В результате получим одно уравнение:

$$\dot{w} - \left(\gamma + i\frac{C-A}{A}\omega_{30}e^{\gamma t} \right) w = 0. \tag{14}$$

Его решение с учетом начального условия $w = w_0$ при $t = 0$, где $w_0 = \omega_{10} + i\omega_{20}$, есть:

$$w(t) = w_0 \exp\left[\int_0^t \left(\gamma + i\frac{C-A}{A}\omega_{30}e^{\gamma\tau} \right) d\tau \right] = w_0 \exp\left[\gamma t + i\frac{C-A}{\gamma A}\omega_{30}(e^{\gamma t} - 1) \right]. \tag{15}$$

Учитывая, что $\omega_1 = \operatorname{Re} w$, а $\omega_2 = \operatorname{Im} w$, окончательно находим согласно (15):

$$\omega_1(t) = W_0 e^{\gamma t} \cos\left(\frac{C-A}{\gamma A}\omega_{30}(e^{\gamma t} - 1) + \varphi_0 \right), \quad \omega_2(t) = W_0 e^{\gamma t} \sin\left(\frac{C-A}{\gamma A}\omega_{30}(e^{\gamma t} - 1) + \varphi_0 \right), \tag{16}$$

где сделаны обозначения: $W_0 = |w_0| = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$, $\varphi_0 = \arg w_0$, так что $\operatorname{tg}\varphi_0 = \omega_{20} / \omega_{10}$.

Что же касается общего случая, когда твердое тело не обладает динамической симметрией, то закон движения системы под действием коллинеарного управления может быть найден при помощи следующих соображений. Введем вектор $\underline{\Omega}$ таким образом, чтобы он был коллинеарен вектору угловой скорости: $\underline{\omega} = K\underline{\Omega}$. Подставляя это выражение в уравнение (1) с учетом (6) и вводя в рассмотрение новое время τ, производную по которому будем далее обозначать штрихом, получим:

$$\dot{K}\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega} + K\dot{\tau}\left(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega}' \right) + K^2 \underline{\Omega} \times (\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega}) = \gamma(t) K \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega}. \tag{17}$$

Принимая во внимание, что $\dot{K} = \gamma(t)K$ согласно второй формуле (7), а также полагая, что $\dot{\tau} = K(t)$, получим для новой переменной $\underline{\Omega}$ в приведенном времени τ уравнение, идентичное уравнению свободного эйлерова движения [11]:

$$\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega}' + \underline{\Omega} \times (\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\Omega}) = 0\,, \tag{18}$$

для которого существует точное аналитическое решение в эллиптических функциях Якоби [4]. Определяя зависимость $\underline{\Omega}$ от τ, можно найти и исходную угловую скорость $\underline{\omega} = K\underline{\Omega}$, где $K(t)$ определяется вторым выражением (8), а зависимость τ от исходного времени t дается путем решения уравнения $\dot{\tau} = K(t)$. Таким образом, можно сделать следующий вывод: под действием коллинеарного управления твердое тело совершает движение, геометрически подобное свободному эйлерову движению, но отличающееся от него характером своего развития во времени, при этом вектор $\underline{K}$ меняется лишь по величине и сохраняет направление в пространстве.

Отметим, что коллинеарное управление допускает некоторую модификацию, а именно, можно принять управляющий момент не пропорционально, а лишь «параллельно» вектору кинетического момента, т. е. в виде [9]:

$$\underline{m} = \gamma(t)\frac{\underline{K}}{K}\,, \tag{19}$$

причем в этой ситуации функция $\gamma(t)$, очевидно, будет характеризовать модуль управляющего момента, т. к. $|\underline{m}| = |\gamma(t)|$. Следовательно, по аналогии с тем, что было изложено выше, здесь можно получить вместо уравнений (7) следующие уравнения:

$$\dot{K} = \gamma(t), \quad \dot{T} = 2\gamma(t)\frac{T}{K} = 2\frac{\dot{K}}{K}T\,, \tag{20}$$

решения которых определяются выражениями:

$$K = K_0 + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau, \quad T = T_0 \left(\frac{K}{K_0} \right)^2 = T_0 \left(1 + \frac{1}{K_0} \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right)^2, \tag{21}$$

причем здесь также имеет место соотношение $T / K^2 = T_0 / K_0^2$. В частном случае, когда $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$, из (21) находим:

$$K = K_0 + \gamma t, \quad T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma t}{K_0} \right)^2, \tag{22}$$

т. е. линейный закон нарастания (при $\gamma > 0$) или убывания (при $\gamma < 0$) кинетического момента, а для кинетической энергии – квадратичный закон нарастания (при $\gamma > 0$) или убывания (при $\gamma < 0$). Важное отличие выражений (22) от (9) состоит в том, что для модифицированного коллинеарного закона управления можно добиться полного гашения вращательного движения твердого тела (т. е. обращения в нуль величин T и K) за конечное время, равное $t_* = -K_0 / \gamma = K_0 / |\gamma|$, тогда как в исходном варианте торможение осуществляется формально за бесконечное время. Разумеется, для рассматриваемого модифицированного варианта коллинеарного управления уравнения движения также могут быть сведены к уравнениям свободного эйлерова движения (18) для новой переменной и в приведенном времени.

Рассмотрим теперь случай, когда цель управления состоит в переориентации твердого тела, не изменяющей величину кинетической энергии и величину кинетического момента. В этой ситуации, очевидно, должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} = 0, \quad \frac{1}{2} (\dot{K^2}) = \underline{m} \cdot \underline{K} = 0, \tag{23}$$

и мы будем иметь вынужденное консервативное движение твердого тела. При этом по отношению к вектору $\underline{K}$ тело будет совершать движение, геометрически подобное свободному эйлеровому движению, но сам этот вектор может изменять свое направление, т. е. произвольно поворачиваться в пространстве. Выполнение соотношений (23) обеспечивает *ортогональное управление*, когда вектор управляющего момента $\underline{m}$ принимается ортогональным векторам $\underline{\omega}$ и $\underline{K}$ [23]:

$$\underline{m} = \gamma(t)\frac{\underline{\omega}\times\underline{K}}{|\underline{\omega}\times\underline{K}|} = \gamma(t)\frac{\underline{\omega}\times\underline{K}}{\sqrt{\omega^2 K^2 - h^2}}, \tag{24}$$

где учтено, что $|\underline{\omega}\times\underline{K}| = \sqrt{\underline{K}\cdot\left(\underline{\omega}\times(\underline{K}\times\underline{\omega})\right)} = \sqrt{\omega^2 K^2 - h^2}$, $h = 2T$ – удвоенная кинетическая энергия твердого тела, а γ – управляющий коэффициент (или функция времени), который, как и для модифицированного варианта коллинеарного управления, определяет модуль управляющего момента: $|\underline{m}| = |\gamma(t)|$. Ясно, что такое управление будет имитировать гироскопические силы. Наиболее ясную трактовку ортогональному управлению можно дать в том случае, когда $\gamma = \mathrm{const}$, $\omega^2 = \mathrm{const}$, причем $\gamma = \sqrt{\omega^2 K^2 - h^2}$, так что $\underline{m} = \underline{\omega}\times\underline{K}$. В самом деле, из уравнения (1) получим, что $\dot{\underline{K}} = 0$, и решением динамических уравнений Эйлера будет ω_1, ω_2, $\omega_3 = \mathrm{const}$. При этом твердое тело совершает чистое вращение вокруг неподвижной в пространстве оси (т. е. вынужденное перманентное вращение), причем вектор $\underline{K}$ описывает конус вокруг вектора $\underline{\omega}$, образуя с ним постоянный угол θ, такой, что:

$$\sin\theta = \frac{m}{\omega K}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{\omega^2 K^2 - m^2}}{\omega K} = \frac{h}{\omega K}. \tag{25}$$

Из этих соображений вытекает крайне простой способ поворота вектора $\underline{K}$ с помощью постоянного по модулю ортогонального момента [9]. Ясно, что в отсутствие управляющего момента вектор $\underline{\omega}$ описывает некоторую коническую поверхность вокруг неподвижного в пространстве вектора $\underline{K}$. Если в какой-то момент времени приложить ортогональный момент $\underline{m} = \underline{\omega} \times \underline{K}$, то тело мгновенно перейдет в режим вынужденного перманентного вращения вокруг ставшего неподвижным вектора $\underline{\omega}$, в результате чего поворачиваться начнет уже вектор $\underline{K}$.

В общем же случае уравнение управляемого движения твердого тела (1) с учетом (24) может быть переписано в виде:

$$\dot{\underline{K}} + \underline{\omega} \times \underline{K} \left(1 - \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\omega^2 K^2 - h^2}} \right) = 0 . \tag{26}$$

Это уравнение при помощи введения нового времени τ по формуле

$$\dot{\tau} = 1 - \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\omega^2(\tau) K^2 - h^2}} = f(t, \tau) \tag{27}$$

может быть сведено к уравнению свободного эйлерова движения твердого тела:

$$\underline{K}' + \underline{\omega} \times \underline{K} = 0 , \tag{28}$$

где штрихом по-прежнему обозначается производная по времени τ. Определяя посредством уравнения (28) зависимость $\underline{\omega}$ от τ и подставляя ее в (27) на место $\omega^2(\tau)$, можно установить путем решения уравнения (27) и приведенное время τ как функцию исходного времени *t*. Тем самым завершается построение решения задачи о движении твердого тела под действием ортогонального момента в общем случае.

Комбинированные режимы управления

Построенные выше коллинеарный и ортогональный режимы управления обладают тем свойством, что первый из них влияет одновременно на изменение и T, и K, а второй не изменяет значений ни T, ни K. Возникает вопрос, как можно построить такие управляющие воздействия, которые будут изменять только один из этих факторов, не влияя при этом на другой, и каким будет качественный характер движений твердого тела в этих случаях? Такие варианты далее мы будем называть *комбинированными управлениями*, подчеркивая тем самым, что они сочетают в своей структуре особенности как коллинеарного, так и ортогонального управлений.

Предположим сначала, что необходимо для определенности подчинить управляющий момент следующим требованиям:

$$\dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} \le 0, \quad \frac{1}{2}(\dot{K^2}) = \underline{m} \cdot \underline{K} = 0. \tag{29}$$

Такое управление будет сохранять неизменным значение кинетического момента, но при этом оно будет монотонно рассеивать кинетическую энергию. Как известно, подобной особенностью обладают силы внутреннего трения. Поэтому можно сделать вывод, что построенное указанным образом управление будет имитировать внутреннюю диссипацию. Наглядный пример действия на систему сил внутреннего трения продемонстрирован в книге [24]. Интересно также обратить внимание и на представленную в монографии [7] задачу о вращении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, где возмущающий момент, который обусловлен влиянием этой жидкости, также удовлетворяет соотношениям вида (29).

Нетрудно понять, что при учете внутреннего трения конечным режимом движения твердого тела будет являться его перманентное вращение вокруг оси с максимальным моментом инерции, т. к. именно ему соответствует минимальная кинетическая энергия при заданном значении кинетического момента $K = \mathrm{const}$. В самом деле, при вращении вокруг оси 3 (для определенности) имеем $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = K / A_3$, так что отвечающая этому режиму удвоенная кинетическая энергия будет равна $2T = A_3\omega_3^2 = K^2 / A_3$. Отсюда и вытекает, что минимальной эта величина будет в том случае, когда A_3 будет максимальным из всех моментов инерции. Этот вывод был также подтвержден экспериментально на примере американского космического аппарата «Explorer-1», который, будучи закрученным при выводе на орбиту вокруг главной оси с минимальным моментом инерции, продемонстрировал неустойчивость этого вращения и перешел в режим прецессии, а затем спустя несколько часов начал устойчиво вращаться вокруг оси с максимальным моментом инерции [9]. Впоследствии американские ученые подтвердили данный вывод теоретическим путем, объяснив его нежесткостью конструкции аппарата, которая ведет к диссипации энергии его вращательного движения. Именно это заключение и оказывается полезным для настоящего исследования, позволяя сразу оценить характер движения твердого тела под действием управляющих воздействий, построенных в качественном отношении подобно силам внутреннего трения.

Разумеется, конкретный вид управления, удовлетворяющего условиям (29), может быть различным. Наиболее простым является следующий способ его конструирования. Так как $\underline{m} \cdot \underline{K} = 0$, то управляющий момент $\underline{m}$ можно принять в виде $\underline{m}=\underline{a}\times\underline{K}$, где $\underline{a}$ – пока что неопределенный вектор, и он должен быть подчинен первому условию (29), которое записывается в виде:

$$\dot{T}=\underline{m}\cdot\underline{\omega}=(\underline{a}\times\underline{K})\cdot\underline{\omega}=-\underline{a}\cdot(\underline{\omega}\times\underline{K})\leq 0. \tag{30}$$

Отсюда вытекает, что вектор $\underline{a}$ можно выбирать по формуле:

$$\underline{a}=(\underline{\omega}\times\underline{K})\cdot\underline{\underline{C}}, \tag{31}$$

где $\underline{\underline{C}}$ – симметричный положительно определенный тензор, компоненты которого могут быть функциями времени. В этом случае условие (30) будет выполнено, т. к.

$$\dot{T}=-(\underline{\omega}\times\underline{K})\cdot\underline{\underline{C}}\cdot(\underline{\omega}\times\underline{K})=-\underline{q}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\underline{q}, \tag{32}$$

где $\underline{q}=\underline{\omega}\times\underline{K}$, так что правая часть в (32) является отрицательно определенной квадратичной формой. Таким образом, искомое управление приобретает вид:

$$\underline{m}=\left[\underline{\underline{C}}\cdot(\underline{\omega}\times\underline{K})\right]\times\underline{K}. \tag{33}$$

Ясно, что в простейшем варианте тензор $\underline{\underline{C}}$ можно выбрать пропорционально единичному тензору $\underline{\underline{E}}$, т. е. в виде $\underline{\underline{C}}=\gamma(t)\underline{\underline{E}}$, где γ – положительный управляющий коэффициент (или функция времени), который в данном случае оказывается единственным. Тогда управление (33) упрощается и принимает вид:

$$\underline{m}=\gamma(t)(\underline{\omega}\times\underline{K})\times\underline{K}, \tag{34}$$

а энергетическое соотношение (30) приводится к следующей простой форме:

$$\dot{T}=-\gamma(t)(\underline{\omega}\times\underline{K})^2\leq 0. \tag{35}$$

В общем же случае (33) может быть большее количество управляющих параметров.

Из анализа соотношения (35) вытекает, что для достижения минимально возможного значения кинетической энергии при заданном значении кинетического момента следует также разумно подходить к выбору функции $\gamma(t)$. В самом деле, например, при ее уменьшении до нуля может оказаться, что кинетическая энергия будет выходить на некоторый больший уровень, который, очевидно, не отвечает режиму перманентного вращения твердого тела вокруг оси с максимальным моментом инерции, а именно он обычно и является основной целью управления.

Проанализируем теперь детально характер движений твердого тела при наличии управления (34) в случае $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$, рассматривая, как и выше для коллинеарного закона управления, случай динамической симметрии твердого тела, когда $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = C$. Тогда система уравнений (2) приведется к виду:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C-A)\omega_3\omega_2 = -\gamma C(C-A)\omega_1\omega_3^2 \\ A\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_1\omega_3 = -\gamma C(C-A)\omega_2\omega_3^2 \\ \quad C\dot{\omega}_3 = \gamma A(C-A)\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{cases}. \tag{36}$$

Интеграл момента, вытекающий из второй формулы (29), будет иметь вид:

$$K^2 = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C^2\omega_3^2 = \text{const}. \tag{37}$$

Исключая из него $\omega_1^2 + \omega_2^2$ и подставляя в последнее уравнение системы (36), приходим к следующему уравнению относительно ω_3:

$$\dot{\omega}_3 = \gamma \frac{C-A}{AC}\omega_3(K^2 - C^2\omega_3^2). \tag{38}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое приводится к виду:

$$\int_{\omega_{30}}^{\omega_3} \frac{dw_3}{w_3(K - Cw_3)(K + Cw_3)} = \frac{1}{2K^2}\int_{\omega_{30}}^{\omega_3}\left(\frac{2}{w_3} + \frac{C}{K - Cw_3} - \frac{C}{K + Cw_3}\right)dw_3 = \gamma\frac{C-A}{AC}\int_0^t d\tau, \tag{39}$$

где учтено, что при $t=0$ имеем $\omega_3=\omega_{30}$, а подынтегральная дробь в левой части разложена на простейшие дроби. В результате после вычисления интегралов и решения получившегося уравнения относительно ω_3 можно определить, что

$$\ln\frac{\omega_3^2(K^2-C\omega_{30}^2)}{\omega_{30}^2(K^2-C\omega_3^2)}=2\gamma K^2\frac{C-A}{AC}t,\quad \omega_3(t)=\frac{K\omega_{30}e^{\gamma K^2\frac{C-A}{AC}t}}{\sqrt{K^2+C^2\omega_{30}^2\left(e^{2\gamma K^2\frac{C-A}{AC}t}-1\right)}}. \tag{40}$$

Отсюда отчетливо видно, что характер зависимости $\omega_3(t)$ существенно зависит от соотношения между моментами инерции A и C. Так, если $C>A$, то при $t\to\infty$ имеем согласно (40) $\omega_3\to K/C$, а если $C<A$, то получим уже $\omega_3\to 0$ при $t\to\infty$.

Чтобы определить закон изменения угловых скоростей ω_1 и ω_2 во времени, обратимся к первым двум уравнениям системы (36) и приведем их к одному уравнению относительно переменной $w=\omega_1+i\omega_2$, как это делалось ранее:

$$\dot{w}-\frac{C-A}{A}\left[i\omega_3(t)-\gamma C\omega_3^2(t)\right]w=0. \tag{41}$$

Ясно, что его решение может быть представлено в виде:

$$w(t)=w_0\exp\left[\frac{C-A}{A}\left(i\int_0^t\omega_3(\tau)d\tau-\gamma C\int_0^t\omega_3^2(\tau)d\tau\right)\right], \tag{42}$$

так что далее необходимо вычислить интегралы:

$$\begin{gathered}\int_0^t\omega_3(\tau)d\tau=\frac{A}{\gamma K(C-A)}\ln\frac{C\omega_{30}e^{\frac{\gamma K^2(C-A)}{AC}t}+\sqrt{K^2+C^2\omega_{30}^2\left(e^{\frac{2\gamma K^2(C-A)}{AC}t}-1\right)}}{K+C\omega_{30}},\\ \int_0^t\omega_3^2(\tau)d\tau=\frac{A}{2\gamma C(C-A)}\ln\frac{K^2+C^2\omega_{30}^2\left(e^{\frac{2\gamma K^2(C-A)}{AC}t}-1\right)}{K^2}.\end{gathered} \tag{43}$$

В результате после преобразований можно получить из выражения (42) с учетом начального условия $w = w_0 = \omega_{10} + i\omega_{20}$ при $t = 0$ величины $\omega_1 = \mathrm{Re}\,\omega$ и $\omega_2 = \mathrm{Im}\,\omega$:

$$\omega_1(t) = W(t)\cos\varphi(t), \quad \omega_2(t) = W(t)\sin\varphi(t), \tag{44}$$

где функции $W(t)$ и $\varphi(t)$ с учетом прежних обозначений $W_0 = |w_0| = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}$ и $\varphi_0 = \arg w_0$ (откуда $\mathrm{tg}\varphi_0 = \omega_{20} / \omega_{10}$) определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered} W(t) = \frac{W_0 K}{\sqrt{K^2 + C^2\omega_{30}^2\left(e^{\frac{2\gamma K^2(C-A)}{AC}t} - 1\right)}}, \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{1}{\gamma K}\ln\frac{C\omega_{30}e^{\frac{\gamma K^2(C-A)}{AC}t} + \sqrt{K^2 + C^2\omega_{30}^2\left(e^{\frac{2\gamma K^2(C-A)}{AC}t} - 1\right)}}{K + C\omega_{30}}, \end{gathered} \tag{45}$$

причем величины W_0 и φ_0 являются начальными значениями функций $W(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно (при $t = 0$). Из (44) и (45) видно, что в случае $C > A$ при $t \to \infty$ имеем $W(t) \to 0$, т. е. $\omega_1 \to 0$, $\omega_2 \to 0$, так что твердое тело выходит на режим вращения вокруг оси динамической симметрии. В случае $C < A$ получаем, что $\omega_1 \to \mathrm{const}$, $\omega_2 \to \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, т. к.

$$W(t) \to \frac{W_0 K}{\sqrt{K^2 - C^2\omega_{30}^2}} = \mathrm{const}, \quad \varphi(t) \to \varphi_0 + \frac{1}{\gamma K}\ln\frac{\sqrt{K^2 - C^2\omega_{30}^2}}{K + C\omega_{30}} = \mathrm{const}, \tag{46}$$

и твердое тело будет выходить на режим вращения вокруг оси, перпендикулярной оси динамической симметрии и также являющейся главной осью инерции [2]. Таким образом, посредством полученных формул можно проследить весь процесс выхода движений твердого тела на режим, отвечающий вращению вокруг оси с максимальным моментом инерции, как это и было высказано изначально.

Наконец, рассмотрим такой вариант управления, когда кинетическая энергия остается неизменной, а кинетический момент при этом монотонно убывает:

$$\dot{T} = \underline{m} \cdot \underline{\omega} = 0, \quad \frac{1}{2}\dot{(K^2)} = \underline{m} \cdot \underline{K} \le 0. \qquad (47)$$

В отличие от предыдущего случая, это управление уже не будет иметь такой же четкой физической аналогии, однако оно также заслуживает отдельного внимания.

Ясно, что посредством данного управления можно осуществить выход на режим перманентного вращения вокруг оси с минимальным моментом инерции, поскольку именно ему соответствует минимальное значение кинетического момента при заданной кинетической энергии $T = \text{const}$. Так, при вращении вокруг оси 3, когда $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = \sqrt{2T / A_3}$, будем иметь $K = A_3\omega_3 = \sqrt{2A_3T}$, и это значение достигает минимума, когда A_3 будет минимальным из всех моментов инерции.

Для выполнения соотношений (47) можно несколько модифицировать все заключения, приведенные выше, и формировать управляющий момент в виде:

$$\underline{m} = \left[\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{K} \times \underline{\omega})\right] \times \underline{\omega}, \qquad (48)$$

который в частном случае $\underline{\underline{C}} = \gamma(t)\underline{\underline{E}}$ принимает еще более простую форму:

$$\underline{m} = \gamma(t)\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{K}), \qquad (49)$$

где γ – положительный управляющий коэффициент (или функция времени, к выбору которой следует относиться осмысленно, как это было указано выше).

Остановимся кратко на исследовании случая динамической симметрии, когда $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = C$, и при $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$. Тогда система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C-A)\omega_3\omega_2 = \gamma(C-A)\omega_1\omega_3^2 \\ A\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_1\omega_3 = \gamma(C-A)\omega_2\omega_3^2 \, . \\ \quad C\dot{\omega}_3 = -\gamma(C-A)\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2) \end{cases} \tag{50}$$

Записывая интеграл энергии, вытекающий из первой формулы (47):

$$2T = A(\omega_1^2+\omega_2^2) + C\omega_3^2 = \text{const}\,, \tag{51}$$

и исключая из него $\omega_1^2+\omega_2^2$, приведем третье уравнение системы (50) к виду:

$$\dot{\omega}_3 = -\gamma\frac{C-A}{AC}\omega_3(2T - C\omega_3^2)\,. \tag{52}$$

В результате его решения по аналогии с (38)-(40) получим следующую зависимость:

$$\omega_3(t) = \frac{\sqrt{2T}\,\omega_{30}e^{-2\gamma T\frac{C-A}{AC}t}}{\sqrt{2T + C\omega_{30}^2\left(e^{-4\gamma T\frac{C-A}{AC}t} - 1\right)}}\,. \tag{53}$$

Отсюда хорошо видно, что если $C > A$, то при $t \to \infty$ будет $\omega_3 \to 0$, а если $C < A$, то будем иметь уже $\omega_3 \to \sqrt{2T/C}$ при $t \to \infty$. Что касается выражений для угловых скоростей ω_1 и ω_2 во времени, то они могут быть найдены абсолютно аналогично тому, как это было сделано выше для первого варианта формирования комбинированного закона управления. В результате нетрудно получить, что в случае $C > A$ будем иметь $\omega_1 \to \text{const}$, $\omega_2 \to \text{const}$ при $t \to \infty$, так что твердое тело будет выходить на режим вращения вокруг оси, перпендикулярной оси динамической симметрии. Если $C < A$, то при $t \to \infty$ будем иметь $\omega_1 \to 0$, $\omega_2 \to 0$, так что твердое тело будет выходить на режим вращения вокруг оси динамической симметрии. Таким образом, можно заключить, что в обоих случаях с течением времени действительно происходит выход на режим вращения вокруг оси с минимальным моментом инерции, как этого и следовало ожидать.

Остается отметить, что если для рассмотренных комбинированных вариантов управления величину γ принять отрицательной, то в первом из них кинетическая энергия станет уже возрастать, и конечному режиму движения будет отвечать вращение вокруг оси с минимальным моментом инерции, а во втором случае возрастающим окажется кинетический момент, поэтому в конечном счете будет происходить выход на вращение вокруг оси с максимальным моментом инерции.

Заключение

Резюмируя результаты проведенного исследования, можно заключить, что использование рациональных режимов управляемого движения позволяет добиться различных целей – разгона или торможения твердого тела, его переориентации, а также выхода на режим вращения вокруг осей с максимальным или минимальным моментом инерции. Сделанные в настоящей статье выводы сопровождаются построением точных аналитических решений, которые отчетливо демонстрируют картину поведения твердого тела и достижение конкретной цели управления. Полученные результаты являются основой для конструирования более сложных вариантов управления и могут оказаться полезными для различных приложений.

Список источников

1. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. – 468 с.

2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. – 592 с.

3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 384 с.

4. Магнус К. Гироскоп, теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.

5. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. – М.: Наука, 1983. Т. 2. – 544 с.

6. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 294 с.

7. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.

8. Леонтьев В.А., Смирнов А.С., Смольников Б.А. Динамика свободных и управляемых движений твердого тела в двухстепенном подвесе // Робототехника и техническая кибернетика. 2020. Т. 8. № 1. С. 53-60. DOI: 10.31776/RTCJ.8106

9. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2003. – 532 с.

10. Капитанюк Ю.А., Хвостов Д.А., Чепинский С.А. Траекторное управление твердым телом относительно подвижного объекта // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 2 (90). С. 60-64.

11. Смольников Б.А. Обобщение Эйлерова случая движения твердого тела // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 735-736.

12. Королев В.С., Кравчук Р.Ю. Управление вращательным движением космического аппарата при переменном распределении массы // Научно-

технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 3 (73). С. 62-66.

13. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Оптимальное управление вращательным движением твердого тела с комбинированным критерием качества // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 3. С. 55-65. DOI: 10.1134/S0002338819030120

14. Алексеев А.В., Дорошин А.В., Ерёменко А.В., Крикунов М.М., Недовесов М.О. Динамика составного космического аппарата с подвижным устройством в трёхосном кардановом подвесе // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=90363

15. Сиротин А.Н. О частных случаях одной задачи оптимального управления угловым движением симметричного космического аппарата стабилизированного вращением // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=90363

16. Сиротин А.Н. Об экстремалях в задаче оптимального управления вращением несимметричного космического аппарата, допускающих аналитическое описание // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 4. С. 58-63.

17. Зеликин М.И. Оптимальное управление вращением твердого тела // Доклады Академии наук. 1996. Т. 365. № 3. С. 334-336.

18. Зубов В.И., Ермолин В.С., Сергеев С.Л., Смирнов Е.Я. Управление вращательным движением твердого тела. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 200 с.

19. Смирнов А.С., Смольников Б.А. Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 3 (52). С. 8-15.

20. Кривцов А.М. Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазикоординат // Механика твердого тела. 2000. № 4. С. 23-29.

21. Иванова Е.А. Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде // Механика твердого тела. 2001. № 6. С. 15-30.

22. Ламб Г. Теоретическая механика. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. Т. 3. – 292 с.

23. Смольников Б.А. Движение твердого тела под действием ортогонального момента // Механика твердого тела. 1979. № 3. С. 30-36.

24. Смирнов А.С., Смольников Б.А. Механика сферического маятника. – СПб: Политех-пресс, 2019. – 266 с.

References

1. MacMillan W.D. *Dynamics of Rigid Bodies*. New York, Dover Publishing, 1936, 478 p.

2. Markeev A.P. Teoreticheskaya mekhanika (Theoretical mechanics). Moscow, Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2007, 592 p.

3. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Rigid Body Dynamics). Moscow, Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2001, 384 p.

4. Magnus K. Kreisel. *Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971, 494 p.

5. Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Part II. New York, Dover Publishing, 1955, 484 p.

6. Vittenburg I. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Stuttgart, Teubner, 1977, 224 p.

7. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. *Evolyutsiya dvizhenii tverdogo tela otnositel'no tsentra mass* (Evolution of motions of a rigid body about its center of mass), Moscow, Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2015, 308 p.

8. Leont'ev V.A., Smirnov A.S., Smol'nikov B.A. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika*, 2020, vol. 8, no. 1, pp. 53-60. DOI: 10.31776/RTCJ.8106

9. Merkin D.R., Smol'nikov B.A. *Prikladnye zadachi dinamiki tverdogo tela* (Applied problems of rigid body dynamics), Saint Petersburg, Izd-vo SPbGU, 2003, 532 p.

10. Kapitanyuk Yu.A., Khvostov D.A., Chepinskii S.A. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2014, no. 2 (90), pp. 60-64.

11. Smol'nikov B.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1967, vol. 31, no. 2, pp. 735-736.

12. Korolev V.S., Kravchuk R.Yu. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2011, no. 3 (73), pp. 62-66.

13. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Izvestiya RAN. *Teoriya i sistemy upravleniya*, 2019, no. 3, pp. 55-65. DOI: 10.1134/S0002338819030120

14. Alekseev A.V., Doroshin A.V., Eremenko A.V., Krikunov M.M., Nedovesov M.O. *Trudy MAI,* 2018, no. 98. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90363

15. Sirotin A.N. *Trudy MAI,* 2017, no. 96. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90363

16. Sirotin A.N. *Aerospace MAI Journal,* 2010, vol. 17, no. 4, pp. 58-63.

17. Zelikin M.I. *Doklady Akademii nauk*, 1996, vol. 365, no. 3, pp. 334-336.

18. Zubov V.I., Ermolin V.S., Sergeev S.L., Smirnov E.Ya. *Upravlenie vrashchatel'nym dvizheniem tverdogo tela* (Control of rotational motion of a rigid body). Leningrad, Izd-vo LGU, 1978, 200 p.

19. Smirnov A.S., Smol'nikov B.A. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2017, no. 3 (52), pp. 8-15.

20. Krivtsov A.M. *Mekhanika tverdogo tela,* 2000, no. 4, pp. 23-29.

21. Ivanova E.A. *Mekhanika tverdogo tela,* 2001, no. 6, pp. 15-30.

22. Lamb H. *Higher mechanics.* Cambridge, The University Press, 1929, 292 p.

23. Smol'nikov B.A. *Mekhanika tverdogo tela,* 1979, no. 3, pp. 30-36.

24. Smirnov A.S., Smol'nikov B.A. *Mekhanika sfericheskogo mayatnika* (Spherical pendulum mechanics), Saint Petersburg, Politekh-press, 2019, 266 p.

Статья поступила в редакцию 12.05.2022
Статья после доработки 14.05.2022
Одобрена после рецензирования 19.05.2022
Принята к публикации 21.06.2022
The article was submitted on 12.05.2022; approved after reviewing on 19.05.2022; accepted for publication on 21.06.2022