



Научная статья

УДК 539.37: 624.04

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188266>

EDN: <https://www.elibrary.ru/THYDBI>

МОДЕЛЬ НЕСУЩИХ СЛОЕВ И ПОДХОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ

В.Н. Бакулин  

Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия

 ybak@yandex.ru

Цитирование: Бакулин В.Н. Модель несущих слоев и подход для построения модели заполнителя трехслойных оболочек // Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188266>

Аннотация. В статье отмечено, что благодаря высоким показателям изгибной жесткости, весовой эффективности, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения и многих других важных характеристик актуальным является применение трехслойных оболочек в авиационной, ракетно-космической и другой современной технике.

В связи с большими возможностями и перспективностью применения трехслойных оболочек в современной технике развиваются теории и модели расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек.

В статье представлен обзор теорий и рассмотрены особенности расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек. Основное отличие моделей для исследования трёхслойных элементов конструкций от однородных состоит в стремлении как можно более точно учесть реальное распределение перемещений и напряжений по толщине пакета. В точной постановке заполнитель должен рассматриваться как трехмерное тело. Однако решение уравнений трехмерной теории упругости сопряжено с большими математическими трудностями. Этим вызвано возникновение и развитие приближенных моделей для расчёта трехслойных оболочек и пластин, в которых применяются определенные упрощения о работе заполнителя. В статье

рассмотрено историческое развитие теорий и различных допущений при расчете напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя и несущих слоях трехслойных оболочек.

Отмечено, что несмотря на актуальность, проблема исследования напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек, в том числе оболочек вращения двойной кривизны, особенно с прямоугольными в плане сквозными и несквозными вырезами, недостаточно изучена из-за математических трудностей при получении решения таких задач. Это привело к необходимости в соответствии с подходом, предложенным и разработанным автором статьи, привлечения метода конечных элементов для построения моделей послойного анализа.

Приведен алгоритм построения конечно-элементной модели моментных несущих слоев трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны.

Проведено сравнение результатов, полученных с помощью построенной модели несущих слоев, с известными аналитическим и численными решениями.

Кратко изложен подход к построению конечно-элементной модели слоя заполнителя и модели послойного исследования напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек вращения двойной кривизны, позволяющих учесть отмеченные выше важные особенности трехслойных оболочек и получить на основе этих моделей решения задач по моделированию напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек, ослабленных прямоугольными в плане сквозными и несквозными вырезами.

Ключевые слова: трехслойные оболочки вращения двойной кривизны; моментные несущие слои; заполнитель; напряжённо-деформированное состояние; конечно-элементная модель.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН).

A MODEL OF LOAD-BEARING LAYERS AND AN APPROACH FOR MODELING THE CORE OF SANDWICH SHELLS

V.N. Bakulin  

Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences,

Moscow, Russia

 vbak@yandex.ru

Citation: Bakulin V.N. A model of load-bearing layers and an approach for modeling the core of sandwich shells // Trudy MAI. 2026. No. 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188266>

Abstract. The article notes that due to their high flexural stiffness, weight efficiency, thermal protection, sound insulation, vibration absorption, and many other important characteristics, the use of sandwich shells in aviation, aerospace, and other modern technologies is highly relevant.

Given the significant potential and promising applications of sandwich shells in modern engineering, theories and computational models for analyzing the stress-strain state of three-layer shells are being developed.

This article provides an overview of the theories and discusses the specifics of calculating the stress-strain state of three-layer shells. The main difference between models for studying sandwich structural elements and those for homogeneous elements lies in the aim to account as accurately as possible for the actual distribution of displacements and stresses across the thickness of the shell. In a precise formulation, the core must be treated as a three-dimensional body. However, solving the equations of three-dimensional elasticity theory presents significant mathematical challenges. This has led to the emergence and development of approximate models for calculating sandwich shells and plates, in which certain simplifications regarding the behavior of the core are applied. This article examines the historical development of theories and various assumptions used in calculating the stress-strain state in the core layer and the load-bearing layers of three-layer shells.

It has been noted that, despite its relevance, the problem of investigating the stress-strain state of irregular three-layer shells in general, including shells of double curvature, especially those with rectangular through and non-through cutouts, has not been sufficiently studied due to the mathematical difficulties involved in solving such

problems. This led to the need, in accordance with the approach proposed and developed by the author of this article, to employ the finite element method for constructing models for layer-by-layer analysis.

An algorithm is presented for constructing a finite element model of moment-bearing layers in three-layer irregular shells of double curvature.

The results obtained using the constructed model of load-bearing layers were compared with known analytical and numerical solutions.

This paper briefly outlines an approach to constructing a finite-element model of the core layer and a model for the layer-by-layer analysis of the stress-strain state in the general case of irregular three-layer shells of double curvature, which allow for the important features of sandwich shells noted above and, based on these models, provide solutions to problems involving the stress-strain state of sandwich shells weakened by rectangular through-holes and non-through-holes in the in-plane direction.

Keywords: sandwich doubly curved shell of revolution; core layer; skin-layers; stress and strain state; finite element model.

Funding: This work was carried out as part of a government-funded project at the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IAM RAS).

Введение

Идея трехслойных конструкций вытекает из эпюры напряжений при изгибе, пример – рельс. Трехслойная оболочка состоит из двух разнесенных слоев, как правило, относительно маложесткого и легкого заполнителя, обеспечивающего совместную работу внешних несущих слоев, обычно тонких из высокопрочного материала.

Трехслойные оболочки обладают высокими показателями изгибной жесткости, весовой эффективности, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения, радиопрозрачности при изготовлении из композиционных материалов (КМ), а также возможностью регулирования этих и многих других важных свойств путем изменения геометрических и физико-механических характеристик (ФМХ) слоев особенно из КМ.

Благодаря высоким показателям изгибной жесткости, весовой эффективности, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения и многих других важных характеристик актуальным является применение трехслойных оболочек в авиационной и космической технике [1-3].

Так, конструкция фирмы «Аэроика» используется для аппаратов, входящих в атмосферу. Многослойность заполнителя обеспечивает при минимальной массе конструкции высокий коэффициент теплоизоляции [4]. Применение панелей с заполнителем наблюдается на космическом корабле «Спейс шаттл» [4].

Эффективно применение трехслойных оболочек в корпусах транспортно-пусковых контейнеров ракетных комплексов [5-7] и твердотопливных двигателей [8, 9] и других конструкциях современной ракетной техники [10, 11].

У трехслойных оболочек в отличие от подкрепленных и вафельных можно добиться высокого качества внешней (что актуально для высокоскоростных транспортных средств и особенно для летательных аппаратов (ЛА), в том числе в борьбе с флаттером) и внутренней (что актуально в случае ракетных жидкостных и твердотопливных двигателей (РДТТ)) поверхностей. У трехслойных оболочек можно управлять пограничным слоем вокруг ЛА с помощью транзита воздуха через специальную конструкцию заполнителя. В заполнителе трехслойных конструкций можно прокладывать подкрепляющие элементы (шпангоуты, стрингеры и др.) и различные коммуникации (кабели, трубопроводы и т.п.), что позволяет эффективно и безопасно использовать пространство внутри и снаружи изделий и при этом коммуникации могут быть защищены от электромагнитных полей, радиации, механических повреждений и др.

Флаттер трехслойных и слоистых оболочек из КМ исследовался, например, в [1, 12].

Анализ трехслойных оболочечных конструкций, в т.ч. из КМ, показал наличие у них особенностей, которые сложно или невозможно учесть в достаточно точной постановке с помощью используемых в настоящее время моделей и на которые необходимо обратить внимание при разработке новых более совершенных расчетных моделей и применении их для исследования

напряжённно-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек современных изделий.

К таким особенностям относится:

- наличие сквозных и несквозных (когда сплошность нарушена не во всех слоях) и закрытых крышками прямоугольных в плане (распространенной формой) вырезов, которые могут быть подкреплены элементами, располагаемыми между несущими слоями вместо заполнителя по контуру вырезов для снижения концентрации напряжений;
- незамкнутость в окружном направлении трехслойных оболочек (открытые оболочки);
- переменные геометрические и физико-механические характеристики слоев по координатам, в том числе по толщине заполнителя, когда он выполнен из разных материалов;
- несущие слои могут быть выполнены из разных материалов и иметь разную толщину - несимметричная структура стенки трехслойной оболочки;
- разные виды нагрузок, различные условия приложения этих нагрузок к отдельным слоям, и разные условия закрепления слоев (например, один из несущих слоев закреплен или к нему приложена нагрузка, а другой слой свободен от закрепления или нагружения, т.е. разные граничные условия для каждого из слоев) и т.п.

Применение трёхслойных оболочек сдерживается, в т. ч., недостаточным совершенством моделей для расчета НДС с учетом указанных выше особенностей.

Несмотря на актуальность исследования напряженно-деформированного состояния оболочек с прямоугольными в плане отверстиями, проблеме моделирования НДС трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами посвящено незначительное число публикаций и практически отсутствуют достоверные решения задач.

Поэтому актуальна разработка методологии послойного моделирования с помощью оболочечных конечно-элементных моделей (КЭМ) естественной кривизны, позволяющих решить поставленную проблему и исследовать

напряженно-деформированное состояние трехслойных оболочек из композиционных материалов с прямоугольными в плане вырезами с учетом указанных особенностей. При послойном моделировании трехслойная оболочка, разбивается по толщине на слои, которые затем стыкуются между собой. При таком подходе можно в зависимости от толщины и физико-механических характеристик слоев и условий задач создавать и применять разные модели для слоев.

Краткий обзор теорий и особенности расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек

В связи с большими возможностями и перспективностью применения трехслойных оболочек в современной технике развиваются теории и модели расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек.

Основное отличие моделей для исследования трёхслойных и многослойных конструкций от однородных состоит в стремлении как можно более точно учесть реальное распределение перемещений и напряжений по толщине пакета.

При построении математических моделей, описывающих НДС трёхслойных оболочек, важным является учет влияния деформаций в заполнителе (особенно поперечных деформаций, тем более в случае мало жестких «легких» [13, 14] (иногда встречается название «мягких» [15, 16]) заполнителей) на НДС слоев и конструкции в целом, а также учет неоднородной структуры по толщине стенки оболочек, в том числе в слое заполнителя (если имеется такая разнородность материала). От точности учета этих факторов зависит размерность математических моделей, точность и сложность расчета НДС трёхслойных оболочек. Пренебрежение или недостаточно полный учет этих факторов может привести к значительным погрешностям расчета.

В точной постановке заполнитель должен рассматриваться как трехмерное тело. Однако решение уравнений трехмерной теории упругости сопряжено с большими математическими трудностями. Этим вызвано возникновение и развитие приближенных моделей для расчёта трехслойных оболочек и пластин, в которых применяются определенные упрощения о работе заполнителя.

А.Л. Рабинович (1946 г.) [17] для расчёта трехслойных стержней и Э. Рейсснер (1948 г.) [18] для расчёта трехслойных пластин, а затем и трехслойных оболочек (1949г.) [19] рассмотрели допущения о пренебрежении в заполнителе нормальными и касательными напряжениями, параллельными срединной поверхности

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = 0 \quad (1)$$

В соответствии с ранними допущениями заполнитель воспринимает только поперечный сдвиг и поперечную нормальную деформацию, а несущие слои не воспринимают изгиб и кручение (т.е. напряжения в несущих слоях распределены равномерно по их толщине). Дополнительно в [18] предполагалась не сжимаемость заполнителя в поперечном направлении $E_3 = \infty$.

Э.И. Григолюк в 1957 г. раскритиковал рассмотрение несущих слоев как мембран [13]. Уравнения изгиба трехслойных круговых цилиндрических оболочек с учетом изгибной жесткости несущих слоев приведены в статье [20] (1958 г.). В [13, 21, 22] говорилось также о важности учета для заполнителей поперечных деформаций. Указанные выше допущения применялись при рассмотрении уравнений осесимметричных трехслойных оболочек симметричного строения с легким заполнителем в [23] (1960 г.).

В статье в сборнике [22] исследованы границы изменения параметров трехслойных пластин и оболочек, при которых применимы описанные выше предположения. А.П. Прусаковым в 1951 г. при рассмотрении основных уравнений изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким сжимаемым в поперечном направлении заполнителем вместо (1) были предложены допущения относительно физических свойств материала слоев [24]. Если в несущих слоях модули упругости на три-четыре порядка больше, чем в слое заполнителя, то можно принять для заполнителя

$$E_1 = E_2 = G_{12} = 0,$$

а для несущих слоев

$$E_3 = G_{13} = G_{23} = \infty.$$

То есть предлагались для несущих слоев гипотезы, эквивалентные гипотезам Кирхгофа-Лява, и при этом пренебрегалось жесткостью заполнителя

на растяжение и сдвиг в плоскости, параллельной несущим слоям. После интегрирования уравнений теории упругости задача свелась к нахождению произвольных функций интегрирования, не зависящих от нормальной к срединной плоскости пластины координаты. Эти функции находятся из условия сопряжения слоев и граничных условий на внешних поверхностях и кромках трехслойной пластины.

В статье [25] на основании подхода А.П. Прусакова получены основные уравнения изгиба трехслойных круговых цилиндрических оболочек с легким заполнителем.

В статье [26] указывается, что допущения относительно упругих свойств материала слоев могут привести к ошибкам.

Кан С.Н., Каплан Ю.И. [27] при расчете неоднородных цилиндрических оболочек с учетом поперечного сдвига и «надавливания волокон» рассматривали модели с переменными по толщине стенки модулями упругости.

Получение уравнений равновесия пологих трехслойных оболочек несимметричной структуры с учетом поперечных деформаций рассматривалось Галимовым Н. К., Муштари Х. М. [28] (1964 г.).

Вопросы расчета слоистых оболочек и уточнения гипотез теории слоистых оболочек с учетом сдвига обсуждались в работах Каюмова Р.А. [29, 30 и др.], разработка математической модели деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями в [31].

При расчете трехслойных конструкций допущение о поперечной не сжимаемости заполнителя, которое существенно упрощает дифференциальные уравнения, нашло широкое распространение. Однако применение такого допущения в некоторых задачах может привести к значительной погрешности при исследовании трехслойных пластин и оболочек [32 - 35].

Уравнения многослойных оболочек с заполнителем, сжимаемым в поперечном направлении, рассматривались в [36] и многих других работах.

Теории изгиба трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем исследовались Паймушиным В.Н., его коллегами и учениками [37 - 39 и др.].

Учет поперечной сжимаемости заполнителя обсуждался в работах [33 – 36, 40, 41 и др.].

Трехслойные оболочки с жестким заполнителем рассматривались в работах Э.И. Григолюка (1958г.), А.П. Прусакова (1960г.) [42], Н.С. Божко (1961г.) [43] и многих других авторов.

Уравнения равновесия и естественные граничные условия трехслойных оболочек переменной жесткости с жестким сжимаемым заполнителем на основе гипотезы ломаной линии для всего пакета получены в [44].

Конечно-элементная модель несущих слоев трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны

Несмотря на актуальность, проблема исследования напряжённо-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек, в том числе оболочек вращения двойной кривизны, особенно с прямоугольными в плане сквозными и несквозными вырезами, недостаточно изучена из-за больших математических трудностей при получении решения таких задач.

Это привело к необходимости в соответствии с подходом, предложенным и разработанным автором статей для трехслойных оболочек вращения цилиндрической и конической формы [45- 47], привлечения метода конечных элементов для построения моделей послойного анализа, позволяющих учесть отмеченные выше важные особенности трехслойных оболочек и получить на основе этих моделей решения поставленных задач по исследованию напряжённо-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек двойной кривизны, в том числе ослабленных прямоугольными в плане сквозными и несквозными вырезами.

При послойном моделировании трехслойная оболочка, а при необходимости и заполнитель (уточненное послойное моделирование), разбивается по толщине на слои, которые затем стыкуются между собой. При таком подходе можно в зависимости от толщины и физико-механических характеристик слоев и условий задач создавать и применять разные модели для расчета слоев.

Для реализации предложенной методологии послойного моделирования рассмотрено построение по толщине оболочки блоков, состоящих из оболочечных конечных элементов (КЭ) естественной кривизны для расчета напряжённо-деформированного состояния несущих слоев и слоя заполнителя, с целью исследования НДС трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны

При послойном, особенно уточненном послойном моделировании значительно растет размерность конечно-элементной модели (КЭМ), зависящая от числа слоев оболочки; числа конечных элементов, которыми моделируется слой, в том числе по толщине, и числа степеней свободы КЭ. Высокая размерность конечно-элементной модели значительно затрудняет послойное моделирование напряжённо-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек с учетом указанных выше особенностей с надлежащей точностью и степенью детализации.

Измельчение сеток разбиений возле вырезов увеличивает размерность конечно-элементной модели. Получение эффективных конечно-элементных аппроксимаций (КЭА) для построения конечно-элементной модели позволяет решить проблему снижения размерности КЭМ, так как эффективные КЭА повышают скорость сходимости решений, что приводит к возможности уменьшения числа КЭ для моделирования. Это особенно актуально при послойном моделировании.

Для улучшения сходимости рассматриваемой модели получены перемещения как твердого тела (ПТТ) тонкой моментной оболочки вращения двойной кривизны, которые определяются интегрированием соотношений Коши, связывающих вектор обобщенных деформаций (далее будем называть вектор деформаций) $\varepsilon_i^c = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \kappa_1, \kappa_2, \chi\}^T$ с вектором перемещений $\delta_i^c = \{u, v, w\}^T$, при нулевых значениях деформаций.

Перемещения как твердого тела записываются с помощью шести неопределенных коэффициентов α , являющихся константами интегрирования.

Выбор аппроксимирующих функций перемещений (АФП) связан с числом степеней свободы конечных элементов. Узловыми перемещениями конечных

элементов моментных несущих слоев служат $u, v, w, \vartheta_x, \vartheta_y$ в каждом из четырех узлов, расположенных в угловых точках конечных элементов. Здесь u, v, w - перемещения точек срединной поверхности несущих слоёв оболочки, ϑ_x, ϑ_y - углы поворота нормали к срединной поверхности относительно меридиональной и окружной осей координат.

Таким образом, конечные элементы несущих слоев имеют двадцать степеней свободы, из которых шесть отвечают за перемещения как твёрдого тела (эти перемещения записаны с помощью первых шести неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_6$), оставшиеся четырнадцать степеней свободы отвечают за перемещения, вызванные деформированием КЭ (эти перемещения записываются с помощью оставшихся четырнадцати неопределенных коэффициентов $\alpha_7, \dots, \alpha_{20}$).

Аппроксимирующие функции перемещений четырехугольного конечного элемента естественной кривизны для моделирования напряжённо-деформированного состояния в несущих слоях рассматриваемых трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны складываются из аппроксимаций перемещений как твердых тел и деформационных смещений.

Деформационную составляющую перемещений u и v аппроксимируем билинейными полиномами, а деформационную составляющую перемещения w неполным бикубическим полиномом.

Аппроксимирующие функции перемещений записаны с помощью неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_{20}$ (вектор α_i^c), число их равно числу степеней свободы конечного элемента, то есть двадцати.

Сравнение результатов, полученных с помощью построенной модели несущих слоев трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны, с известными аналитическим и численными решениями

Достоверность, точность, сходимость и эффективность приведенной модели конечного элемента несущих слоев трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны подтверждена сопоставлением с точным, а также с конечно-элементным решением [48], полученным с помощью наиболее распространенного четырехугольного криволинейного конечного элемента с 24

степенями свободы, на примере сферической оболочки с круговыми отверстиями (с углом полураствора, равным $\sim 6,4$ градуса) и нагруженной по контуру отверстия равномерно распределенной погонной радиальной нагрузкой. Параметры оболочки $R = 100$ см, $h = 1$ см, $\alpha_v = 12,8$ градуса, $E = 6.74 \cdot 10^5$ кг / см², $\mu = 0.33$, где R - радиус оболочки, h - толщина оболочки, α_v - угол раствора выреза, E , μ - модуль упругости и коэффициент Пуассона. Из-за симметрии задачи моделировался сегмент оболочки, при этом по окружной координате использовался один КЭ.

Из анализа графиков сходимости максимальных значений прогиба к точному решению в зависимости от числа конечных элементов разбиения сегмента по меридиональной координате (рисунок 1) видно, что рассмотренный КЭ несущих слоев трехслойной незамкнутой оболочки вращения двойной кривизны (20 степеней свободы) (график 1) обеспечивает практически одинаковую сходимость и точность с наиболее распространенным КЭ (24 степени свободы) [48] (график 2).

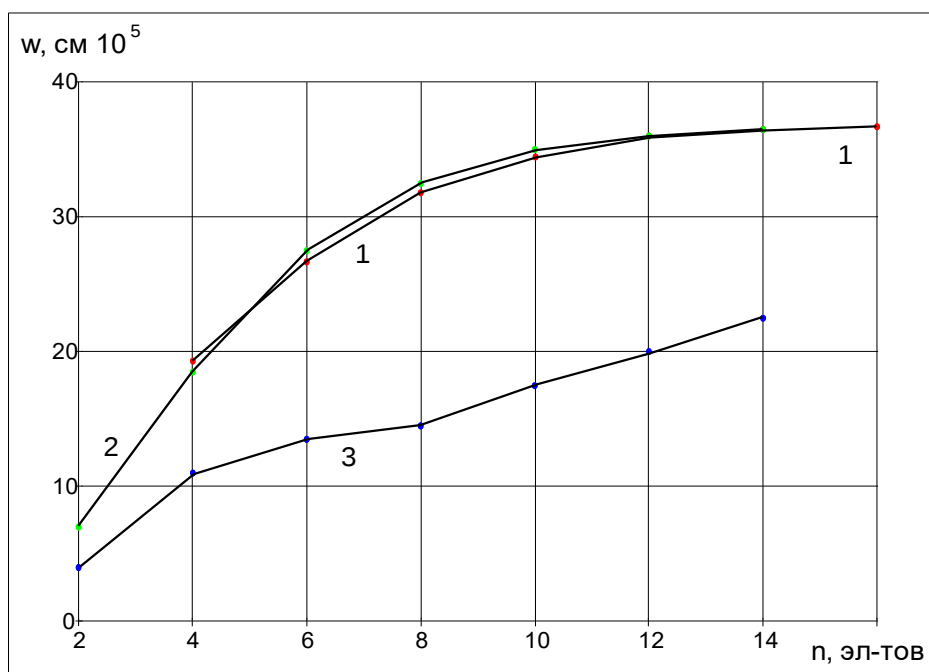


Рисунок.1 - Графики сходимости максимальных значений прогиба к точному решению в зависимости от числа КЭ разбиения сферического сегмента по меридиональной координате. 1- рассмотренный КЭ несущих слоев трехслойной незамкнутой оболочки вращения двойной кривизны (20 степеней свободы); 2 - КЭ (24 степени свободы) [48]; 3 - КЭ, в аппроксимирующих функциях которого не учитываются перемещения как твердого тела

График 3 (рисунок 1) соответствует результатам, полученным с помощью КЭ, в аппроксимирующих функциях которого не учитываются перемещения как твердого тела. Этим объясняется плохая сходимость КЭ и низкая точность результатов расчета с помощью КЭ без учета перемещений как твердого тела.

Достоверность, сходимость, точность и эффективность рассмотренной модели и КЭ несущих слоев трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны подтверждена так же сопоставлением с аналитическим решением [49] и с решением, полученным с использованием программного комплекса ANSYS с помощью КЭ типа «SHELL63» (упругая оболочка) [49], для задачи деформирования сферического бака ($R/h=100$) под действием самоуравновешенных сил P , равномерно распределенных по дугам окружности [49].

Подход для построения модели для исследования напряжённно - деформированного состояния в слое заполнителя трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами

Как отмечалось выше, разрабатываемая модель для решения задач исследования напряжённно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны основана на построении и последующем объединении двух типов прямоугольных в плане КЭ естественной кривизны - двумерного КЭ моментных несущих слоев и трёхмерного КЭ слоя заполнителя.

Чтобы избежать разрыва обобщенных перемещений на поверхностях раздела несущих слоев и слоя заполнителя, для трехмерных КЭ заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны на поверхностях раздела слоев будет выбираться столько же узлов, сколько их у КЭ несущих слоев, и в качестве аппроксимаций используются те же обобщенные перемещения и аппроксимирующие функции, что и у КЭ несущих слоев.

Таким образом, в отличие от распространенного в механике деформируемых тел и конструкций подхода к построению оболочечных КЭ с узловой поверхностью, расположенной на срединной поверхности КЭ, при построении трехмерного конечного элемента слоя заполнителя трехслойной

нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны в качестве узловых будут выбираться обе криволинейные поверхности КЭ слоя заполнителя.

В соответствии со сказанным, трёхмерный КЭ слоя заполнителя трехслойной нерегулярной оболочки вращения двойной кривизны будет иметь сорок степеней свободы.

Заключение

Приведено построение эффективной модели конечного элемента моментных несущих слоев. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью построенной модели несущих слоев, с известными аналитическим и численными решениями.

Кратко изложен подход к построению трёхмерной конечно-элементной модели слоя заполнителя и модели послойного исследования напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек вращения двойной кривизны, позволяющих учесть отмеченные выше важные особенности трехслойных оболочек.

На основе предложенной методологии послойного анализа подход к построению моделей для исследования напряжённо-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек двойной кривизны с учетом незамкнутости оболочек позволит учесть наличие сквозных и несквозных вырезов, переменных геометрических и физико-механических характеристик слоев по координатам, в том числе и по толщине слоя заполнителя, свойства которого могут изменяться в широком диапазоне; приложение нагрузок к отдельным слоям и разные условия закрепления слоев; моментное состояние в несущих слоях; трехмерное напряженное состояние в слое заполнителя.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Благодарности

Статья посвящена светлой памяти Всеволода Ивановича Феодосьева (05.05.1916–24.09.1991) — выдающегося учёного в области строительной механики и прочности конструкций ракетно-космической техники, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий, члена-корреспондента АН СССР, заведующего кафедры МВТУ им. Н. Э. Баумана, в связи со 110-летием со дня его рождения.

Acknowledgments

The article is dedicated to the blessed memory of Vsevolod Ivanovich Feodosiev (05.05.1916–24.09.1991), an outstanding scientist in the field of structural mechanics and the strength of rocket and space structures, Hero of Socialist Labour, laureate of the Lenin and State Prizes, corresponding member of the USSR Academy of Sciences, and head of the department at the Bauman Moscow Higher Technical School (MVTU), on the occasion of his 110th anniversary.

Список источников

1. Bakulin V.N. Three-layer structural elements of aviation and space technology. methodology for constructing models of layer-by-layer finite element analysis of the stress-strain state of irregular three-layer shells, including those with rectangular cutouts // Russian Aeronautics. 2025. Vol. 68, no. 2. P. 274–282.
2. Bakulin V.N. The influence of the thickness of the supporting layer on the stress-strain state in the layers of sandwich cylindrical compartments with rectangular cutouts // Russian Aeronautics. 2024. Vol. 67, no. 3. P. 476–483.
3. Bakulin V.N. Influence of dimensions of rectangular cutouts and modulus of elasticity of reinforcing embedded elements on the stress-strain state of sandwich compartments // Russian Aeronautics. 2023. Vol. 66, no. 2. P. 204–215.
4. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с заполнителем: справочник. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.
5. Bakulin V.N. A three-dimensional shell model for layer-by-layer study of the stress and strain state of irregular conical sandwich shells // Doklady Physics. 2023. Vol. 68, no. 10. P. 334–339.

6. Авдеев В.С. Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения. Путь длиной в полвека. Хотьково, 2015. 300 с.
7. Bakulin V.N. Effective three-dimensional shell model for layer-by-layer study of stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells // Moscow University Mechanics Bulletin. 2024. Vol. 79, no. 3. P. 102–109.
8. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Flutter of a sandwich shell with inner cylinder and annular ribs // Mechanics of Composite Materials. 2024. Vol. 60, no. 3. P. 449–458.
9. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Dynamic stability of three-layered cylindrical shell, reinforced ring ribs and hollow cylinder under external pressure pulsing // Doklady Physics. 2021. Vol. 66, no.6. P. 175–181.
10. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Parametric resonance of a three-layer cylindrical composite shell, supported by longitudinal ribs and a cylinder, under the action of a time-varying axial force // Doklady Physics. 2022. Vol. 67, no. 7. P. 209–214.
11. Bakulin V.N. A corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells // Doklady Physics. 2017. Vol. 62, no. 1. P. 37–41.
12. Bakulin V.N. Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 53, no. 4. P. 411–417.
13. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. 1957. № 1. С. 77–84.
14. Bakulin V.N. Effective Models in the refined analysis of the strain state for three-layer non-axisymmetric cylindrical shells // Doklady Physics. 2007. Vol. 52, no. 6. P. 330–334.
15. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
16. Хайруллин Ф.С. О расчётах трёхслойной оболочки с очень мягким заполнителем // Механика оболочек и пластин: сборник докладов 20-й Международной конференции по теории оболочек и пластин, Нижний Новгород, 17–19 сентября, 2002. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. Вып. 11. С. 304–308.
17. Рабинович А.Л. Устойчивость обшивки с заполнителем при сжатии // Труды ЦАГИ. Изд-во «Бюро новой техники», 1946. № 595. С. 51–57.

18. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates // Journal of the Aeronautical Sciences. 1948. Vol. 15, no. 7. P. 435–440.
19. Reissner E. Small bending and stretching of sandwich type shells / National Advisory Committee for Aeronautics. 1950. P. 13–32. NACA-TR-975.
20. Куршин Л.М. Уравнения изгиба трехслойных круговых цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1958. № 3. С. 65–72.
21. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
22. Расчеты элементов авиационных конструкций. Трехслойные панели и оболочки. Сб. статей / под ред. А.Я. Александрова и др. М.: Машиностроение, 1965. 203 с.
23. Караванов В.Ф. Уравнения осесимметричных трехслойных оболочек с легким заполнителем // Прочность авиационных конструкций. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе. 1960. Вып. 130. С. 110–132.
24. Прусаков А.П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15, № 1. С. 27–36.
25. Краснобаев И.А. Основные уравнения изгиба трехслойных круговых цилиндрических оболочек с легким заполнителем // Ученые записки Кабардино-Балкарского ин-та. 1972. Вып. 44, ч. 2. С. 113–116.
26. Хорошун Л.П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. 1978. Т. 14, № 10. С. 3–21.
27. Кан С.Н. Расчет неоднородных цилиндрических оболочек с учетом поперечного сдвига и надавливания волокон // Прикладная механика, 1979. Т. 15, № 5. С. 34–42.
28. Галимов Н.К., Муштари Х.М. К теории трехслойных пластин и оболочек // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Казань: Казан. гос. ун-т, 1964. Вып. 2. С. 56–62.
29. Каюмов Р.А. Об уточнении гипотез теории слоистых оболочек с учетом сдвига. Актуальные проблемы механических оболочек // Тезисы

докладов международной конференции, посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина, Казань, 26–30 июня, 2000. Казань, 2000. С. 47.

30. Каюмов Р.А. К вопросу расчета слоистых оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности. 2000. № 61. С. 31–35.

31. Вячкин Е.С. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 55. С. 72–83.

32. Bakulin V.N. Model for analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no.1. P. 102–110.

33. Писковитина И.А. О влиянии сжимаемости заполнителя на изгиб трехслойной цилиндрической оболочки // Прикладная механика. 1977. Т. XIII, № 2. С. 26–34.

34. Bakulin V.N. The influence of elasticity of the filler material on stresses in the layers of three-layered shells of rotation under the action of local loads // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 26, no. 1. P. 33–37.

35. Прохоров Б.Ф. Трехслойные конструкции в судостроении. Л.: Судостроение, 1972. 344 с.

36. Ингульцев В.Л. Уравнения многослойных оболочек с заполнителями, сжимаемыми в поперечном направлении // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970. С. 256–262.

37. Паймушин В. Н. Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 1. С. 3–26.

38. Паймушин В.Н. Задачи о напряженно-деформированном состоянии трехслойной цилиндрической оболочки с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины при внешнем давлении и торцевом сжатии несущих слоев неодинаковыми усилиями // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2003. № 1. С. 8–13.

39. Луканкин С.А. Уточненная теория среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины при термосиловом нагружении // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. науч. тр. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 68. С. 5–16.
40. Коган Ф.А. Некоторые вопросы теории трехслойных оболочек с учетом сжимаемости заполнителя // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 1. С. 27–29.
41. Попов В.Г. Приближенное решение задачи изгиба трехслойных оболочек с учетом сжимаемости заполнителя. Судостроение и морские сооружения // Республиканский межведомственный научно-тех. сб. 1970. № 12. С. 120–125.
42. Прусаков А.П. Об одной форме уравнений изгиба и свободных колебаний пологих трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1960. № 1. С. 123–127.
43. Божко Н.С. Некоторые задачи изгиба трехслойной замкнутой цилиндрической оболочки с жестким заполнителем // Сб. научных трудов Днепропетровского инженерного строительного института. 1961. № 16. С. 27–29.
44. Земсков А.В. К расчету напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек переменной жесткости // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18, № 1. С. 158–193.
45. Bakulin V.N. Block finite-element approach to building refined models of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells // Journal of Physics. Conference Series. 2019. Vol. 1392. Art. 012065.
46. Bakulin V.N. A model for refined calculation of the stress-strain state of sandwich conical irregular shells // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, no. 5. P. 786–796.
47. Bakulin V.N. Block-layer approach for the analysis of the stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells of rotation // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56, no. 7. P. 295–304.

48. Железнов Л.П. Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1990. № 1. С. 131–136.

49. Виноградов Ю.И. Расчет сферического бака при локальном воздействии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 2. С. 109–120.

References

1. Bakulin V.N. Three-layer structural elements of aviation and space technology. methodology for constructing models of layer-by-layer finite element analysis of the stress-strain state of irregular three-layer shells, including those with rectangular cutouts. *Russian Aeronautics*, 2025, vol. 68, no. 2, pp. 274–282.

2. Bakulin V.N. The influence of the thickness of the supporting layer on the stress-strain state in the layers of sandwich cylindrical compartments with rectangular cutouts. *Russian Aeronautics*, 2024, vol. 67, no. 3, pp. 476–483.

3. Bakulin V.N. Influence of dimensions of rectangular cutouts and modulus of elasticity of reinforcing embedded elements on the stress-strain state of sandwich compartments. *Russian Aeronautics*, 2023, vol. 66, no. 2, pp. 204–215.

4. Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstruktsii s zapolnitelem* [Placeholder constructions] a reference book, Moscow, Mashinostroenie, 1991. 272 p.

5. Bakulin V.N. A three-dimensional shell model for layer-by-layer study of the stress and strain state of irregular conical sandwich shell. *Doklady Physics*, 2023, vol. 68, no. 10, pp. 334–339.

6. Avdeev V.S. *Tsentral'nyi nauchno-issledovatel'skii institut spetsial'nogo mashinostroeniya. Put' dlinoi v polveka* [Central Scientific Research Institute of Special Mechanical Engineering. The path is half a century long], Khotkovo, 2015. 300 p.

7. Bakulin V.N. Effective three-dimensional shell model for layer-by-layer study of stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2024, vol. 79, no. 3, pp. 102–109.

8. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Flutter of a sandwich shell with inner cylinder and annular ribs. *Mechanics of Composite Materials*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 449–458.

9. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Dynamic stability of three-layered cylindrical shell, reinforced ring ribs and hollow cylinder under external pressure pulsing. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, no. 6, pp. 175–181.
10. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Parametric resonance of a three-layer cylindrical composite shell, supported by longitudinal ribs and a cylinder, under the action of a time-varying axial force. *Doklady Physics*, 2022, vol. 67, no. 7, pp. 209–214.
11. Bakulin V.N. A corrected model of level-by-level analysis of three-layer irregular conical shells. *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 1, pp. 37–41.
12. Bakulin V.N. Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 411–417.
13. Grigolyuk E.I. *Izv. AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1957, no. 1. pp. 77–84.
14. Bakulin V.N. Effective Models in the refined analysis of the strain state for three-layer non-axisymmetric cylindrical shells. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 6, pp. 330–334.
15. Bolotin V.V., Novikov Yu.N. *Mekhanika mnogoslownykh konstruksii* [Mechanics of multilayer structures], Moscow, Mashinostroenie, 1980, 376 p.
16. Khairullin F.S. *Mekhanika obolochek i plastin: Sbornik dokladov 20-i Mezhdunarodnoi konferentsii po teorii obolochek i plastin, Nizhnii Novgorod, 17–19 sentyabrya, 2002* [Mechanics of shells and plates: collection of reports of the 20th International Conference on the Theory of Shells and Plates, Nizhny Novgorod, September 17–19 2002], N. Novgorod, Izd-vo NNGU, 2002, vol. 11. pp. 304–308.
17. Rabinovich A.L. *Trudy TSAGI* [The works of TsAGI], Moscow, Izd-vo “Byuro novoi tekhniki”, 1946, vol. 595, pp. 51–57.
18. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1948, vol. 15, no. 7, pp. 435–440.
19. Reissner E. *Small bending and stretching of sandwich type shells*. National Advisory Committee for Aeronautics, 1950, pp 13–32. NACA-TR-975.
20. Kurshin L.M. *Izv. AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i mashinostroenie*, 1958, no. 3, pp. 65–72.

21. Korolev V.I. *Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannykh plastmass* [Layered anisotropic plates and shells made of reinforced plastics], Moscow, Mashinostroenie, 1965, 272 p.
22. Alexandrov A.Ya. *Raschety ehlementov aviatsionnykh konstruksii. Trekhsloinye paneli i obolochki* [Calculations of aircraft structural elements. Three-layer panels and shells], collection of articles, Moscow, Mashinostroenie, 1965, 203 p.
23. Каравахов В.Ф. *Prochnost' aviatsionnykh konstruksii. Trudy MAI im. S. Ordzhonikidze*, 1960, vol. 130, pp. 110–132.
24. Prusakov A.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1951, vol. 15, no. 1. pp. 27–36.
25. Krasnobaev I.A. *Uchenye zapiski Kabardino-Balkarskogo in-ta*, 1972, vol. 44, iss. 2, pp. 113–116.
26. Khoroshun L.P. *Prikladnaya mekhanika*, 1978, vol. 14, no. 10, pp. 3–21.
27. Kan S.N. *Prikladnaya mekhanika*, 1979, vol. 15, no. 5, pp. 34–42.
28. Galimov N.K., Mushtari H.M. *Issledovanie po teorii plastin i obolochek* [Towards the theory of three-layer plates and shells], Kazan', Kazanskii gosudarstvennyi un-t, 1964, vol. 2, pp. 56–62.
29. Kayumov R.A. *Tezisy dokladov mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 100-letiyu prof. Kh.M. Mushtari, 90-letiyu prof. K. Z. Galimova i 80-letiyu prof. M.S. Kornishina, Kazan', 26–30 Iyunya, 2000* [Abstracts of the international conference dedicated to the 100th anniversary of prof. H.M. Mushtari, the 90th anniversary of prof. K. Z. Galimov and the 80th anniversary of prof. M.S. Kornishin, Kazan, June 26-30,]. Казань, 2000, pp. 47.
30. Kayumov R.A. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti*, 2000, no. 61, pp. 31–35.
31. Vyachkin E.S. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matematika i mekhanika*, 2018, no. 55, pp. 72–83.
32. Bakulin V.N. Model for analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 1, pp. 102–110.
33. Piskovitina I.A. *Prikladnaya mekhanika*, 1977, vol. XIII, no. 2. pp. 26–34.

34. Bakulin V.N. The influence of elasticity of the filler material on stresses in the layers of three-layered shells of rotation under the action of local loads. *Materials Physics and Mechanic*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 33–37.
35. Prokhorov B.F. *Trekhsloinye konstruksii v sudostroenii* [Three-layer structures in shipbuilding], Leningrad, Sudostroenie, 1972, 344 p.
36. Ingultsev V.L. *Trudy VII Vsesoyuznoi konferentsii po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the VII All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates], Moscow, Nauka, 1970, pp. 256–262.
37. Paymushin V.N. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 3–26.
38. Paymushin V.N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*, 2003, no. 1, pp. 8–13.
39. Lukankin S.A. *Problemy prochnosti i plastichnosti: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Problems of strength and plasticity: interuniversity collection of scientific papers]. N. Novgorod, Izd-vo NNGU, 2006, iss. 68, pp. 5–16.
40. Kogan F.A. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1972, no. 1, pp. 27–29.
41. Popov V.G. *Respublikanskii mezhvedomstvennyi nauchno-tekhnicheskii sbornik*, 1970, no. 12, pp. 120–125.
42. Prusakov A.P. *Izв. AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i mashinostroenie*, 1960, no. 1, pp. 123–127.
43. Bozhko N.S. *Sb. nauchnykh trudov. Dnepropetrovskogo inzhenerenogo stroitel'nogo instituta*, 1961, no. 16, pp. 27–29.
44. Zemskov A.V. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 158–193.
45. Bakulin V.N. Block finite-element approach to building refined models of layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells. *Journal of Physics. Conference Series*, 2019, vol. 1392, art. 012065.
46. Bakulin V.N. A model for refined calculation of the stress-strain state of sandwich conical irregular shells. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 786–796.

47. Bakulin V.N. Block-layer approach for the analysis of the stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells of rotation. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 295–304.
48. Zheleznov L.P. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1990, no. 1, pp. 131–136.
49. Vinogradov Yu.I. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2016, no. 2, pp. 109–120.

Информация об авторах

Владимир Николаевич Бакулин, к.т.н., старший науч. сотрудник, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН), Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9870-8757>; WoS ResearcherID: ABB-1123-2020; Scopus AuthorID: 7004872697; ПИНЦ AuthorID: 4457; тел.: (495)946-18-06, 946-18-02; факс: (495)946-18-03; e-mail: iam@iam.ras.ru

Information about the authors

Vladimir N. Bakulin, Doctor of Science, senior researcher, The leading scientist of the Institute of the application mechanics Russia Academy of science, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9870-8757>; WoS ResearcherID: ABB-1123-2020; Scopus AuthorID: 7004872697; ПИНЦ AuthorID: 4457; тел.: (495)946-18-06, 946-18-02; факс: (495)946-18-03; e-mail: iam@iam.ras.ru

Получено 27 апреля 2026 ● Принято к публикации 01 июня 2026 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 27 April 2026 ● Accepted 01 June 2026 ● Published 30 June 2026
