

УДК 621.376.57

Способ нахождения оптимальных по критерию «эффективная скорость передачи информации» параметров блочного кода в двоично-симметричном канале без памяти.

А.В.Чикин

В статье предлагается критерий эффективной передачи информации в двоично-симметричном канале без памяти для сравнения и выбора наилучшего блочного корректирующего кода. На основе этого критерия получена методика для поиска оптимальных параметров кода. Рассматриваются только линейные максимально разнесенные блочные коды. Также приводятся несколько примеров, показывающих применимость и эффективность изложенной методики. В заключении даются рекомендации по обобщению методики на более широкий класс линейных блочных кодов.

Введение и постановка задачи.

При проектировании цифровой системы передачи данных по каналу связи перед разработчиком неизбежно встает вопрос о борьбе с возникающими при передаче ошибками. Для этой цели используется кодирование информации с последующей коррекцией ошибок. Известно довольно большое разнообразие корректирующих кодов [1]. Для оптимального выбора того или иного кода разработаны специальные методики, которые можно найти в [2], там же приводится обширная библиография по этому вопросу. Основным недостатком большинства приводимых методик заключается в том, что оптимальные параметры кода ищутся только для конкретного канала связи, предполагая при этом, что в течение сеанса связи статистика канала мало отличается от принятой модели, для которой искался оптимальный код. В практических ситуациях в разных сеансах связи возможно существенное различие в параметрах канала, поэтому можно говорить о своего рода вероятностном распределении того, что в данном сеансе параметр канала связи будет иметь то или иное значение. В связи с этим в данной работе излагается соответствующий критерий для сравнения различных блочных кодов и приводится методика для поиска оптимальных по этому критерию параметров корректирующего кода. Из всего множества корректирующих кодов в данной работе рассматриваются только линейные блочные коды. Также приводятся несколько примеров, показывающих практическую применимость и эффективность изложенной методики.

Пусть по каналу связи необходимо передать информационную последовательность, состоящую из l двоичных символов (бит). Поведение канала связи может быть описано моделью двоично-симметричного канала без памяти (ДСК) [3]. Математически строгое описание модели канала имеется в [4]. В целях исправления ошибок, произошедших при передаче, используется блочное кодирование с параметрами $n, k, t(d_x)$, где n – общее число символов кода, k – количество информационных символов в коде и $t(d_x)$ – максимальное количество исправляемых кодом ошибок при декодировании, т.е. корректирующая способность кода. Количество исправляемых ошибок зависит от величины d_x , которую принято называть расстоянием Хэмминга в метрике пространства кода [1].

Перед передачей вся информационная последовательность разбивается на $N_{\text{бл}} = \left\lceil \frac{l}{k} \right\rceil$ информационных блоков по k символов в каждом, где операция $\lceil x \rceil$ означает взятие ближайшего целого от аргумента x . После этого выполняется процедура кодирования каждого блока, в результате чего каждый информационный блок преобразуется в набор из n символов, соответствующей определенной кодовой комбинации кода. В каждой кодовой комбинации содержится k бит полезной информации, остальная же часть является избыточной и служит при декодировании для определения местоположения ошибочно принятого символа. Следует отметить, что избыточность также может использоваться и для обнаружения определенных комбинаций ошибок, но не для их исправления. В этой работе такое свойство кода не используется, поэтому подразумевается, что при декодировании имеет место только исправление ошибок, а не обнаружение.

Пусть теперь вероятность правильного приема k информационных символов в одной кодовой комбинации равна $P_{\text{пр.бл}}$. Это значение будет зависеть от параметров модели канала связи и корректирующей способности кода.

Предположим условно, что имеется идеальная обратная связь между передатчиком и приемником, по которой после каждой передачи одной кодовой комбинации передается специальный сигнал о повторе передачи кодовой комбинации в случае неверного декодирования. Такое предположение вводится для оценки количества времени, затрачиваемого на передачу одного информационного блока вплоть до его правильного приема. Из-за свойств двоично-симметричного канала без памяти ошибки, происходящие в кодовых комбинациях будут независимыми, а это значит, что и величина $P_{\text{пр.бл}}$ для каждого информационного блока не будет зависеть от предыдущих передач. Таким образом вероятность того, что до правильного приема

одного информационного блока необходимо будет выполнить ровно m передач имеет «геометрическое+1» распределение [5]

$$P_{\text{бл}}(m) = (1 - p_{\text{пр.бл}})^{m-1} p_{\text{пр.бл}} .$$

Будем считать, что среднее время, затраченное на передачу одного информационного блока, есть математическое ожидание случайной величины m , умноженное на длину кодовой комбинации n

$$M[m] = \frac{1}{p_{\text{пр.бл}}},$$

$$T_{\text{ср.бл}} = M[m] \cdot n.$$

Следовательно, среднее время, затраченное на передачу всей информационной последовательности из l символов, будет равно

$$T_{\text{ср}} = T_{\text{ср.бл}} \cdot N_{\text{бл}} = M[m] \cdot n \cdot N_{\text{бл}}.$$

Теперь можно вычислить эффективную скорость передачи информации для данного канала связи как отношение общей длины информационной последовательности к среднему времени, требуемому на ее безошибочную передачу

$$r = \frac{l}{T_{\text{ср}}} = \frac{l}{M[m] \cdot n \cdot N_{\text{бл}}} = \frac{p_{\text{бл}} \cdot l}{n \cdot \left[\frac{l}{k} \right]} = p_{\text{бл}} \frac{k}{n}.$$

Следовало ожидать, что эффективная скорость для данного канала не зависит от длины информационной последовательности l .

Возникает вопрос, при каких значениях параметров блочного кода, т.е. $n, k, t(d_x)$ достигается максимальное значение эффективной скорости передачи для данного канала.

Решение задачи.

Будем искать решение поставленной задачи в классе блочных кодов, у которых значение количества исправляемых ошибок $t(d_x)$ может быть выражено аналитически через длину кода n и количество информационных символов в коде k в виде $t(d_x) = f(n, k)$. Вследствие свойств двоично-симметричного канала без памяти (ДСК) вероятность того, что при передаче n символов кодовой комбинации не будет правильно принято более $t(d_x)$ символов, что соответствует отсутствию ошибки при последующем декодировании кодовой комбинации, имеет биномиальный закон распределения и вычисляется по формуле

$$P_{np,\bar{b}l}(p, n, k) = \sum_{i=0}^{t(d_x)=f(n,k)} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ - количество комбинаций, P - вероятность ошибки на символ (параметр канала ДСК). Как показано в [6] значение $P_{np,\bar{b}l}$ может быть выражено через неполную $B_\alpha(x, y)$ и полную $B(x, y)$ бета-функции

$$P_{np,\bar{b}l} = \frac{B_{1-p}(n-t(d_x), t(d_x)+1)}{B(n-t(d_x), t(d_x)+1)} = \frac{B_{1-p}(n-f(n,t), f(n,t)+1)}{B(n-f(n,t), f(n,t)+1)},$$

где

$$B_\alpha(x, y) = \int_0^\alpha z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz.$$

Такое представление более удобно для анализа, т.к. теперь не накладываются ограничения на целочисленность параметров кода n и k . Это означает, что оптимальные значения параметров кода n_{opt} и k_{opt} по критерию эффективной скорости передачи в выбранном классе блоковых кодов принадлежат полубесконечному непрерывному интервалу $[1, \infty) \in R^1$. Конечно, при физической реализации оптимального кода приходится выбирать целочисленные значения параметров кода, поэтому необходимо будет провести оценку потерь за счет округления.

При каждом конкретном P эффективная скорость передачи информации выражается формулой $r_{эф}(p) = \frac{k}{n} P_{np,\bar{b}l}(p, n, k)$. Однако для получения значения эффективной скорости передачи информации при всех возможных P необходимо выполнить интегрирование $r_{эф}(p)$ по области определения P с весом $\varphi(p)$

$$r_{эф} = \frac{k}{n} \int_{p \in (0,1)} C \cdot \varphi(p) \cdot P_{np,\bar{b}l}(p, n, k) dp,$$

где $\varphi(p)$ - произвольная непрерывная в каждой точке интервала $(0,1)$ функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, об ограничениях на ее выбор при эксплуатации приемного устройства будет сказано ниже; C - нормировочная константа, которая для упрощения записей далее будет опущена, ее всегда можно включить в весовую функцию. Распишем эту формулу более подробно

$$r_{\text{эф}} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{\int_0^1 x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx} \cdot \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx dp =$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{B(n-f(n,k), f(n,k)+1)} \cdot \int_0^1 \varphi(p) B_{1-p}(n-f(n,k), f(n,k)+1) dp$$

Задача отыскания оптимальных по выбранному критерию параметров кода $n_{\text{онм}}$ и $k_{\text{онм}}$ сводится к отысканию максимума функционала для $r_{\text{эф}}$

$$\max_{n_{\text{онм}}} r_{\text{эф}} = \frac{k_{\text{онм}}}{n_{\text{онм}}} \int_{p \in (0,1)} \varphi(p) \cdot p_{\text{пр.бл}}(p, n_{\text{онм}}, k_{\text{онм}}) dp .$$

В математическом анализе [7] доказывается, что необходимым условием существования критической точки функционала является непрерывность в окрестности точки $(n_{\text{онм}}, k_{\text{онм}})$ и равенство нулю его частных производных в этой точке, т.е.

$$\left. \frac{\partial r_{\text{эф}}}{\partial n} \right|_{n=n_{\text{онм}}} = \left. \frac{\partial r_{\text{эф}}}{\partial k} \right|_{k=k_{\text{онм}}} = 0 .$$

Представим $r_{\text{эф}}$ в виде отношения двух функций

$$r_{\text{эф}} = \frac{F_1(n, k)}{F_2(n, k)} ,$$

где

$$F_1(n, k) = \frac{k}{n} \cdot \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx dp ,$$

$$F_2(n, k) = B(n-f(n, k), f(n, k)+1) .$$

Частные производные теперь можно записать в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_{\text{эф}}}{\partial n} = \frac{F_2(n, k) \frac{\partial}{\partial n} F_1(n, k) - F_1(n, k) \frac{\partial}{\partial n} F_2(n, k)}{F_2^2(n, k)} = 0 \\ \frac{\partial r_{\text{эф}}}{\partial k} = \frac{F_2(n, k) \frac{\partial}{\partial k} F_1(n, k) - F_1(n, k) \frac{\partial}{\partial k} F_2(n, k)}{F_2^2(n, k)} = 0 \end{array} \right. ,$$

решением которой является точка экстремума функционала $r_{\text{эф}}$.

Вычислим отдельно частные производные $\frac{\partial}{\partial n} F_1(n, k), \frac{\partial}{\partial n} F_2(n, k), \frac{\partial}{\partial k} F_1(n, k), \frac{\partial}{\partial k} F_2(n, k)$, но предварительно получим выражение для частных производных от бета-функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} B_\alpha(n - f(n, k), f(n, k) + 1) &= \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\alpha x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\ &= \int_0^\alpha x^{n-f(n, k)-1} \frac{\partial}{\partial n} (1-x)^{f(n, k)} dx + \int_0^\alpha (1-x)^{f(n, k)} \frac{\partial}{\partial n} x^{n-f(n, k)-1} dx = \\ &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \int_0^\alpha \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx + \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \int_0^\alpha \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx \\ \frac{\partial}{\partial k} B_\alpha(n - f(n, k), f(n, k) + 1) &= \frac{\partial}{\partial k} \int_0^\alpha x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\ &= \int_0^\alpha x^{n-f(n, k)-1} \frac{\partial}{\partial k} (1-x)^{f(n, k)} dx + \int_0^\alpha (1-x)^{f(n, k)} \frac{\partial}{\partial k} x^{n-f(n, k)-1} dx = \\ &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^\alpha \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx - \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^\alpha \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} F_1(n, k) &= \frac{\partial}{\partial n} \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp = \\ &= \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) \frac{\partial}{\partial n} B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp - \frac{k}{n^2} \int_0^1 \varphi(p) B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp = \\ &= \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp + \\ &+ \frac{k}{n} \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp - \\ &- \frac{k}{n^2} \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k} F_1(n, k) &= \frac{\partial}{\partial k} \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp = \\
&= \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) \frac{\partial}{\partial k} B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp + \frac{1}{n} \int_0^1 \varphi(p) B_{1-p}(n - f(n, k), f(n, k) + 1) dp = \\
&= \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp - \\
&- \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp + \\
&+ \frac{1}{n} \int_0^1 \varphi(p) \int_0^{1-p} x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx dp,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n} F_2(n, k) &= \frac{\partial}{\partial n} \int_0^1 x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\
&= \int_0^1 x^{n-f(n, k)-1} \frac{\partial}{\partial n} (1-x)^{f(n, k)} dx + \int_0^1 (1-x)^{f(n, k)} \frac{\partial}{\partial n} x^{n-f(n, k)-1} dx = \\
&= \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \int_0^1 \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx + \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \int_0^1 \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k} F_2(n, k) &= \frac{\partial}{\partial k} \int_0^1 x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\
&= \int_0^1 x^{n-f(n, k)-1} \frac{\partial}{\partial k} (1-x)^{f(n, k)} dx + \int_0^1 (1-x)^{f(n, k)} \frac{\partial}{\partial k} x^{n-f(n, k)-1} dx = \\
&= \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx - \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx
\end{aligned}$$

Преобразуем полученные выражения.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} F_1(n, k) &= \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \int_0^1 \varphi(p) \Psi_1(1-p) dp + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \int_0^1 \varphi(p) \Psi_2(1-p) dp - \frac{k}{n^2} \int_0^1 \varphi(p) B(1-p) dp = \\ &= \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) \left[\frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \Psi_1(1-p) + \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \Psi_2(1-p) + \frac{1}{n} B(1-p) \right] dp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} F_1(n, k) &= \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \varphi(p) \Psi_1(1-p) dp - \frac{k}{n} \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \varphi(p) \Psi_2(1-p) dp + \frac{1}{n} \int_0^1 \varphi(p) B(1-p) dp = \\ &= \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) \left[\frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \Psi_1(1-p) - \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \Psi_2(1-p) + \frac{1}{k} B(1-p) \right] dp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} F_2(n, k) &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \int_0^1 \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx + \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \int_0^1 \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\ &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial n} \Psi_1(1) + \left(1 - \frac{\partial f(n, k)}{\partial n}\right) \Psi_2(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} F_2(n, k) &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx - \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} \int_0^1 \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx = \\ &= \frac{\partial f(n, k)}{\partial k} [\Psi_1(1) - \Psi_2(1)], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Psi_1(\alpha) = \int_0^\alpha \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx,$$

$$\Psi_2(\alpha) = \int_0^\alpha \ln x \cdot x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx,$$

$$B(\alpha) = B_\alpha(n - f(n, k), f(n, k) + 1) = \int_0^\alpha x^{n-f(n, k)-1} (1-x)^{f(n, k)} dx.$$

Теперь окончательно система уравнений, позволяющая найти оптимальные параметры кода, может быть записана следующим образом

$$\left\{ \begin{aligned}
& B(1) \int_0^1 \varphi(p) \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \Psi_1(1-p) + \left(1 - \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \right) \Psi_2(1-p) + \frac{1}{n} B(1-p) \right] dp = \\
& = \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \Psi_1(1) + \left(1 - \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \right) \Psi_2(1) \right] \int_0^1 \varphi(p) B(1-p) dp, \\
& B(1) \frac{k}{n} \int_0^1 \varphi(p) \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial k} \Psi_1(1-p) - \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} \Psi_2(1-p) + \frac{1}{k} B(1-p) \right] dp = \\
& = \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} [\Psi_1(1) - \Psi_2(1)] \int_0^1 \varphi(p) B(1-p) dp, \\
& \qquad \qquad \qquad B(1) \neq 0, \\
& \qquad \qquad \qquad n, k \in [1, \infty), k < n.
\end{aligned} \right.$$

В принципе полученная система уравнений позволяет найти оптимальные значения параметров блочного кода, однако получить решение в явном виде довольно затруднительно. Здесь необходимо применять приближенные численные методы решения или непосредственно решать экстремальную задачу для уравнения (1.1) приближенными методами, изложенными в [8,9].

Выбор весовой функции $\varphi(p)$.

Решение системы нелинейных уравнений (1.2) сильно зависит от вида весовой функции $\varphi(p)$. В рамках этой задачи решающая схема приемного устройства и форма передаваемого сигнала бывают известны, поэтому целесообразным является переход от параметра ДСК P к значению отношения сигнал/шум h^2 в канале связи, который связан с P некоторой функциональной зависимостью $p = g(h^2)$. Корректный переход и, следовательно, получение точного решения системы (1.2) возможно только если существует обратная функция $h^2 = g^{-1}(p)$. В этом случае система (1.2) может быть записана следующим образом.

$$\Psi_1(\alpha) = \int_0^{g^{-1}(\alpha)} \ln(1-x) \cdot x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx,$$

$$\Psi_2(\alpha) = \int_0^{g^{-1}(\alpha)} \ln x \cdot x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx,$$

$$B(\alpha) = B_\alpha(n-f(n,k), f(n,k)+1) = \int_0^{g^{-1}(\alpha)} x^{n-f(n,k)-1} (1-x)^{f(n,k)} dx.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & B(1) \int_0^\infty \varphi_g(h^2) \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \Psi_1(1-g(h^2)) + \left(1 - \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \right) \Psi_2(1-g(h^2)) + \frac{1}{n} B(1-g(h^2)) \right] dh^2 = \\ & = \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \Psi_1(1) + \left(1 - \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} \right) \Psi_2(1) \right] \int_0^\infty \varphi_g(h^2) B(1-g(h^2)) dh^2, \\ & B(1) \frac{k}{n} \int_0^\infty \varphi_g(h^2) \left[\frac{\partial f(n,k)}{\partial k} \Psi_1(1-g(h^2)) - \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} \Psi_2(1-g(h^2)) + \frac{1}{k} B(1-g(h^2)) \right] dh^2 = , \\ & = \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} [\Psi_1(1) - \Psi_2(1)] \int_0^\infty \varphi_g(h^2) B(1-g(h^2)) dh^2, \\ & \qquad \qquad \qquad B(1) \neq 0, \\ & \qquad \qquad \qquad n, k \in [1, \infty), k < n. \end{aligned} \right.$$

где $\varphi_g(h^2) = \varphi(g(h^2))$ - сложная весовая функция, носителем которой является область определения отношения сигнал/шум h^2 , т.е. $h^2 \in [0, +\infty)$.

Функция $\varphi_g(h^2)$ может быть построена следующим образом. Пусть по результатам статистических измерений в канале связи установлено, что во время сеанса связи с вероятностью p_i значение отношения сигнал/шум равно h_i^2 . Конечное множество $H = \{h_i^2 : i = 1, 2, \dots, m\}$ является подмножеством $R^+ = [0, +\infty)$, т.е. $H \subset R^+$. При этом каждому элементу h_i^2 из H поставлено во взаимнооднозначное соответствие некоторое число p_i из $[0, 1]$. Рассмотрим счетное подмножество всех рациональных чисел R_r^+ , всюду плотное в R^+ , т.е. $R_r^+ \subset R^+$. Очевидно, что $H \subset R_r^+ \subset R^+$. Зададим меру P на полуалгебре множеств из R_r^+ с условием, что выполняется соотношение $P\{h_i^2 : h_i^2 \in H \subset R_r^+, i = 1, 2, \dots, m\} = p_i$. Тогда по известной в функциональном анализе теореме Хана-Банаха о продолжении меры, можно однозначно продолжить меру P с полуалгебры множеств из R_r^+ на σ -алгебру борелевских множеств B из R^+ [10,11]. Таким образом, построено

вероятностное пространство (R^+, B, P) . Далее в силу полноты пространств R^+ и R^+ можно, используя теорему о монотонной сходимости [10-11], показать

$$\underline{\lim}\sigma_i \leq \sigma \leq \overline{\lim}\sigma_i,$$

где $\{\sigma_i\}$ - система простых $R^+ \times P$ - измеримых функций, причем $P\{\sigma(h_i^2) : h_i^2 \in H, i = 1, 2, \dots, m\} = p_i$. Относительно аппроксимирующей $R^+ \times P$ -измеримой функции σ на множестве \overline{H} не делается никаких ограничений. Ее поведение на этом множестве может быть произвольным и выбирается из эвристических соображений. Для сохранения нормировки функция σ должна содержать некоторую константу C , т.е. должно выполняться равенство $\int \sigma dP = 1$, где интеграл по мере P понимается в смысле интеграла Лебега.

Примеры.

Рассмотрим несколько примеров использования изложенной выше методики для нахождения оптимальных по критерию эффективной скорости передачи параметров блокового корректирующего кода.

Решение будет ищется в довольно широком классе блоковых кодов – максимально разнесенных линейных кодов. Известно [1], что для таких кодов корректирующая способность

выражается в виде $t = f(n, k) = \frac{n-k}{2}$.

В некоторых метровых каналах гражданской связи (а также в диапазоне 900МГц при использовании широкополосной модуляции ППРЧ [12]) можно считать, что параметр модели ДСК- P имеет равновероятное распределение от сеанса к сеансу (либо при перескоках с одной частоты на другую). В этом случае $\varphi(p) = 1$ и условие нормировки соблюдается. Решая систему нелинейных уравнений (1.2) находим оптимальные параметры кода – $n = 2.4, k = 1.4$. Следовательно, реализованными могут быть следующие коды (2,1), (3,2), (3,1). По формуле (1.1) получаем значения эффективной скорости для каждого из кодов $r(2,1) = 0.25, r(3,2) = 0.251, r(3,1) = 0.167$. Максимальному значению эффективной скорости передачи соответствует линейный блоковый код (3,2). Электрическая скорость передачи информации в этом случае будет равна 0.66. Потери в канале будут составлять 75%. Общий вид зависимости эффективной скорости передачи от параметров кода при $\varphi(p) = 1$ приведен на рис.1.

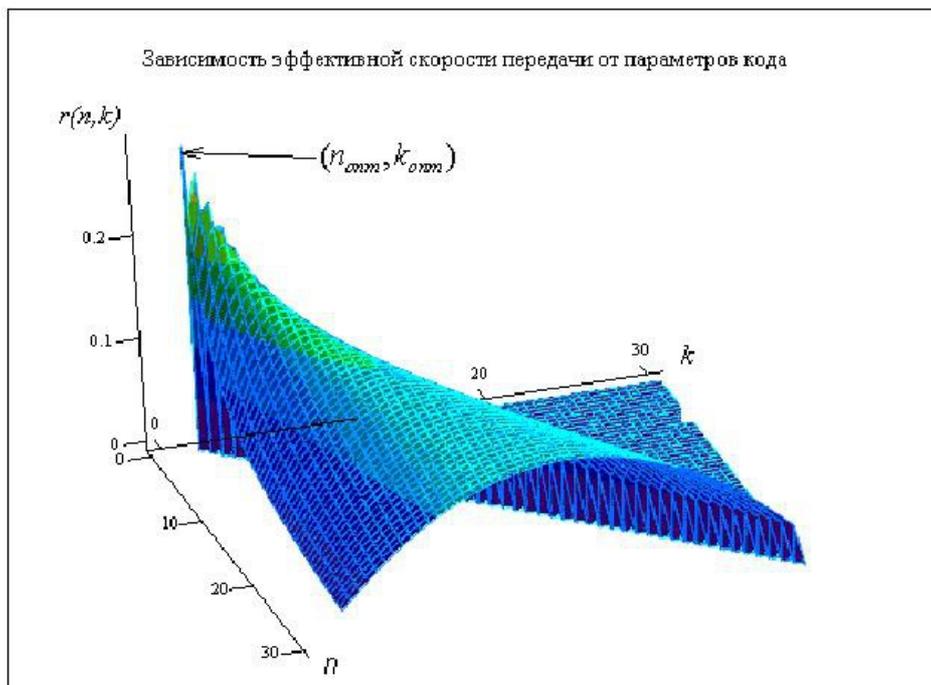


Рис.1

Пусть осуществляется передача с двоичной ФМ на 90° , тогда вероятность ошибки при когерентном приеме выражается по формуле [13]

$$p = g(h^2) = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{h^2}{2} \right) \right],$$

где $\Phi(\bullet)$ - интеграл вероятности. Для того, чтобы найти в явном виде обратную функцию g^{-1} необходимо разложить экспоненту под интегралом вероятности в ряд Тейлора и ограничиться линейным приближением. Это приведет к некоторой погрешности, что существенно в области малых значений отношения сигнал/шум. Если вероятностная мера области малых значений отношения сигнал/шум много меньше меры области больших значений отношения сигнал/шум, то появляющейся погрешностью можно пренебречь. Такое условие может быть записано следующим образом

$$\int_{h^2 \in L_M} \varphi_g(h^2) dh^2 \ll \int_{h^2 \in L_G} \varphi_{g^k}(h^2) dh^2, L \cup L = R^+$$

Таким образом, вероятность ошибки при ФМ может быть аппроксимирована как

$$p = g(h^2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{h^2}{2}}$$

и тогда обратная функция легко находится

$$h^2 = g^{-1}(p) = -2 \ln 2p.$$

Весовая функция $\varphi_g(h^2)$ может быть представлена по результатам статистических

измерений в виде $\varphi_g(h^2) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(h^2 - m_{h^2})^2}{2\lambda^2}}$, где λ и m_{h^2} – некоторые вещественные параметры.

Общий вид зависимости $\varphi_g(h^2)$ от отношения сигнал/шум при $\lambda = 1, m_{h^2} = 10$ приведен на рис.2.

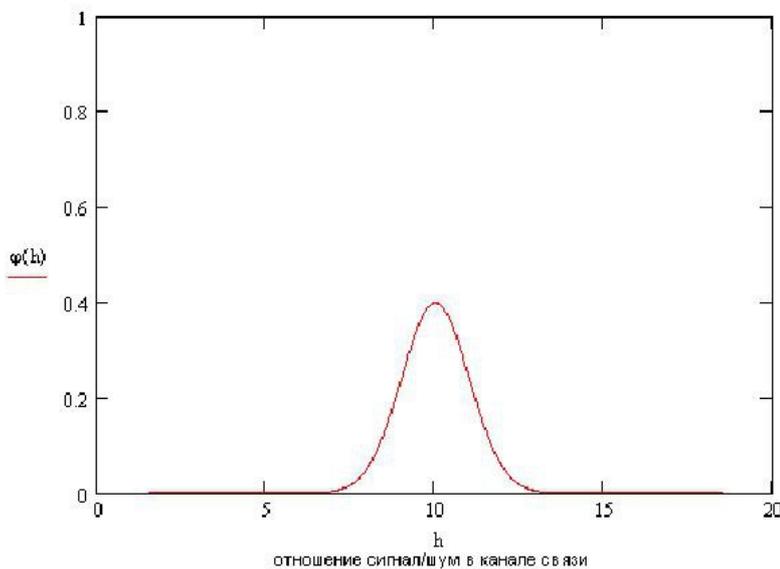


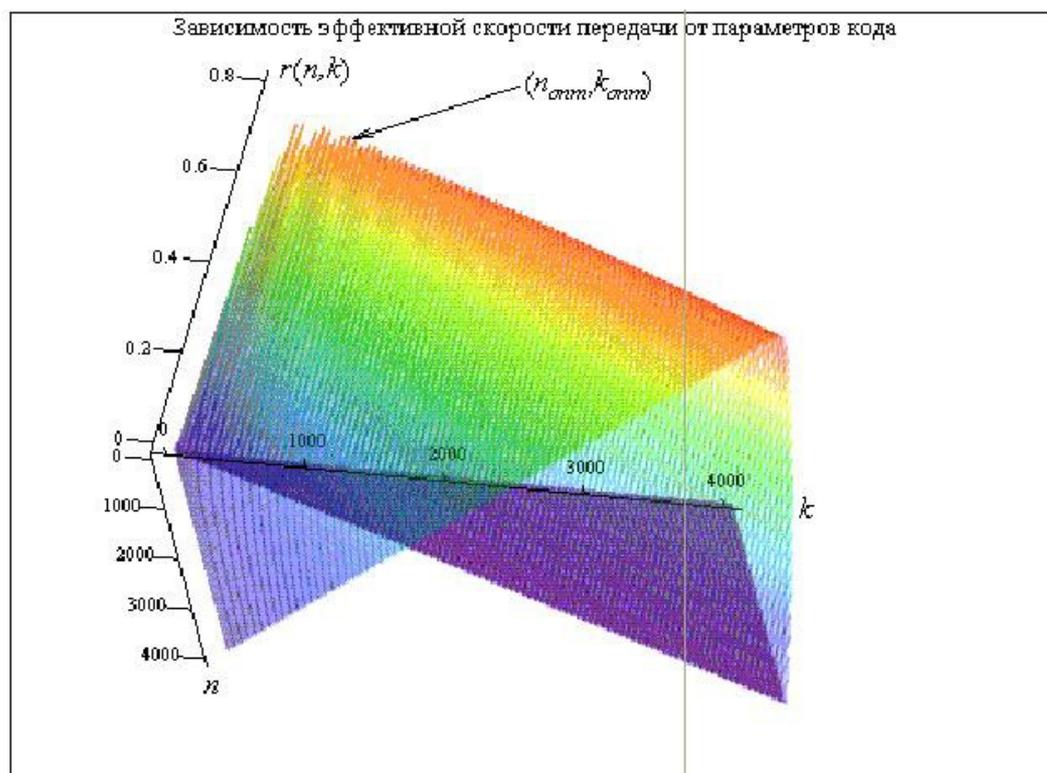
Рис.2.

Решая систему нелинейных уравнений (1.2), находим, что оптимальные параметры кода будут (1738,1641). Электрическая скорость передачи информации в этом случае будет равна 0.944, а эффективная скорость – 0.933. Таким образом, потери в канале будут составлять менее 1.2%.

Если весовая функция $\varphi_g(h^2)$ может быть представлена по результатам статистических

измерений в виде $\varphi_g(h^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } h^2 < h_{\text{пор}}^2 \\ 1, & \text{если } h_{\text{пор}}^2 \leq h^2 < \infty \end{cases}$, где $h_{\text{пор}}^2$ – некоторое пороговое значение

отношения сигнал/шум, например $h_{\text{пор}}^2 = 7.8$, то решая систему нелинейных уравнений (1.2), находим, что оптимальные параметры кода будут (1963,1555). Электрическая скорость передачи информации в этом случае будет равна 0.792, а эффективная скорость – 0.784. Таким образом, потери в канале будут составлять менее 1%. Общий вид зависимости скорости передачи от параметров кода показан на рис.3.



Заключение.

В данной работе был показан метод сравнения блоковых кодов по критерию «эффективная скорость» передачи информации. Данный критерий был получен из предположения о том, что в канале связи ошибки происходят независимо, и он может быть представлен моделью двоично-симметричного канала ДСК без памяти с параметром P . В реальных каналах связи интенсивность помехи (в нашем случае аддитивной гауссовской) меняется от сеанса к сеансу, поэтому было принято, что статистические характеристики смены состояний канала известны в результате измерений и аппроксимируются какой-либо подходящей непрерывной функцией. В работе была показана возможность такой аппроксимации.

Все решения в примерах были получены только для линейных максимально разнесенных кодов, так как для них функция корректирующей способности от параметров кода имеет наиболее простой вид. Можно провести дополнительные исследования данной методики на более широкий класс линейных кодов, используя соотношение для границы Плоткина [1]

$$t = f(n, k) = \frac{n \cdot 2^{k-1}}{2^k - 1}.$$

Необходимо отметить, что изложенная методика легко обобщается на рекуррентные коды. Это результат свойств выбранной модели канала (ДСК). Необходимо только выбрать соответствующую функцию корректирующей способности кода $f(n, k)$.

Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976. – 594с.
2. Грицык В.В., Михайловский В.Н.. Оценка качества передачи информации. – Киев: Наукова думка, 1973. – 180с.
3. Фано Р.. Передача информации. Статистическая теория связи. – М.: Мир, 1965. – 438с.
4. Фанстейн А.. Основы теории информации. – М.: ИЛ, 1960. – 140с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 480с.
6. Левин Б.Р.. Теоретические основы статистической радиотехники.– М.: Сов. радио, 1974. – 552с.
7. Кудрявцев Л.Д.. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – 736с.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
9. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400с.
10. Пугачев В.С.. Лекции по функциональному анализу. – М.: МАИ, 1996. – 744с.
11. Садовничий В.А.. Теория операторов. – М.: Высшая школа, 1999. – 368с.
12. Борисов В.И. и др. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов методом псевдослучайной перестройки рабочей частоты. – М.: Радио и связь, 2000. – 384с.
13. Тепляков И.М. и др. Радиосистемы передачи информации. – М.: Радио и связь, 1982. – 264с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чикин Алексей Викторович, аспирант кафедры радиосистем передачи информации и управления Московского авиационного института (государственного технического университета) e-mail: avchikin@yandex.ru.