УДК 539.3;517.9

Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость

Иванов С.В.[1*], Могилевич Л.И.[2], Попов В.С.[2***]**

[1]*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия*

[2]*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия*

[*]*e-mail: evilgraywolf@gmail.com*

[**]*e-mail: mogilevich@sgu.ru*

[***]*e-mail: vic_p@bk.ru*

Статья поступила 01.03.2019

Аннотация

В настоящей работе развивается метод возмущений для исследования волн деформаций в физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке с конструкционным демпфированием в продольном направлении, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой Винклера. Метод двухмасштабных разложений приводит к обобщенному модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза, не имеющему точного решения. Влияние упругой окружающей среды, конструкционного демпфирования, наличие внутри оболочки вязкой жидкости, оценено путем реализации численного решения этого уравнения.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость.

Введение

Тонкостенные оболочки, в том числе содержащие жидкость, широко используются в космической и авиационной технике, поэтому исследования динамических процессов в них имеют не только теоретический, но и практический интерес для авиакосмической промышленности. Ряд явлений в механических системах, несмотря на малые значения зависимых переменных, целиком определяются зависимостью скорости распространения возмущений от величины зависимых переменных и исследуется на базе нелинейных уравнений. В современной механике деформируемого твердого тела, а также при изучении динамики и прочности упругих элементов конструкций, эти исследования проводятся с помощью методов возмущений. Волновые процессы в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1-4]. При взаимодействии оболочки с вязкой жидкостью, но без учета волновых явлений рассмотрены в [5-7].

Вместе с тем, в литературе отсутствуют исследования влияния на волновой процесс в упругих оболочках вязкой несжимаемой жидкости, находящейся внутри них с учетом локальных членов инерции.

Задачи гидроупругости делятся на стационарные и нестационарные [8]. В данной работе рассматриваются нестационарные задачи, которые, в свою очередь, распадаются на задачи колебаний и волновые задачи. По методам решения они делятся на связанные и несвязанные. В несвязанных задачах сначала решаются уравнения динамики жидкости, а затем волновое движение упругого тела, при этом приоритет отдается определению параметров жидкости – скорости и давления. Такой подход применяется при исследовании механики живых организмов, то есть биомеханики.

В другом подходе рассматривается движение жидкости, взаимодействующей с твердым телом. Определяют напряжение, действующее со стороны жидкости на твердое тело, трение и давление. Это значит, что предполагается отсутствие влияния деформации оболочки на поток жидкости [9, 10]. Затем они подставляются в уравнения динамики тела как упругого и находятся перемещения, продольные и нормальные, т.е. прогиб. Это позволяет определить напряженно деформированное состояние упругой конструкции, что является приоритетом в несвязанной задаче. Этот подход применим, например, при определении прочности крыльев и фюзеляжа самолета.

Для связанной задачи уравнения динамики упругого тела и жидкости решаются одновременно, с учетом соответствующих граничных условий на непроницаемых поверхностях. Этот подход применен, например, для исследования гидроупругих колебаний [11-13], а также в настоящем исследовании нелинейных волн деформации упругих оболочек, содержащих вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции ее движения.

В настоящей работе исследуется учет влияния вязкой несжимаемой жидкости, находящей внутри упругой оболочки, на распространение нелинейных волн деформации, что требует компьютерного моделирования. Известные методы качественного анализа математических моделей, не позволяют в полной мере исследовать модели волн деформаций в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью [14]. Гораздо более универсальным способом исследования моделей является переход к дискретным аналогам исходных моделей.

Для численного исследования модели волновых движений физически нелинейной упругой оболочки с конструкционным демпфированием (рассеянием энергии), взаимодействующей с окружающей ее упругой средой и жидкостью, используется разностная схема аналогичная схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности [15].

В работе исследуется влияние конструкционного демпфирования материала оболочки в продольном направлении, окружающей упругой среды и вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки на амплитуду и скорость волны. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития неразрушающих методов диагностики состояния тонкостенных элементов конструкций авиакосмической техники.

Постановка задачи и ее решение

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами [16]

$$q_n = P_{rr}\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{n}_r}\right) + P_{rx}\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{i}}\right), \quad q_x = -\left[P_{rx}\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{n}_r}\right) + P_{xx}\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{i}}\right)\right],$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}, P_{rx} = -\rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial r}\right), P_{xx} = -p + 2\rho\nu\frac{\partial V_x}{\partial x},$$

здесь q_x, q_n - напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кругового сечения; r, x - цилиндрические координаты; V_r , V_x - проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; W - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; p - давление в жидкости; ρ - плотность жидкости; ν - кинематический коэффициент вязкости; $\bar{n}$ - нормаль к срединной поверхности оболочки; $\bar{n}_r$, $\bar{i}$ – орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{n}_r}\right) = 1$, $\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{i}}\right) = 0$.

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения записываются в виде [16]

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+\frac{V_r}{r}+\frac{\partial V_x}{\partial x}=0.$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости в подходе Лагранжа.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=V_x+U\frac{\partial V_x}{\partial x}-W\frac{\partial V_x}{\partial r},\quad -\frac{\partial W}{\partial t}=V_r+U\frac{\partial V_r}{\partial x}-W\frac{\partial V_r}{\partial r}. \tag{2}$$

Деформационная теория пластичности А. А. Илюшина [17,18] связывает компоненты тензора напряжений σ_x, σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x, ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_u [19,20].

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu_0^2}\left(\varepsilon_x+\mu_0\varepsilon_\Theta\right)\left(1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right),\ \sigma_\Theta=\frac{E}{1-\mu_0^2}\left(\varepsilon_\Theta+\mu_0\varepsilon_x\right)\left(1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right), \tag{3}$$

$$\varepsilon_u^2=\frac{4}{3}\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_\Theta^2-\varepsilon_x\varepsilon_\Theta\right).$$

Здесь E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 - коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассматривается осесимметричный случай цилиндрической оболочки толщиной h_0 и упругими перемещениями – продольным U и прогибом W, направленным к центру кривизны. Связь компонент деформаций с упругими перемещениями записывается в виде [21]

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \varepsilon_\Theta=-\frac{W}{R}. \tag{4}$$

Здесь x – продольная координата вдоль срединной поверхности; z – нормальная координата в оболочке $\left(-\frac{h_0}{2} \le z \le \frac{h_0}{2}\right)$. Квадрат интенсивности деформаций записывается в виде

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]^2 + \frac{W^2}{R^2} + \frac{W}{R}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]\right\}. \qquad (5)$$

Представим (5) в виде многочлена по степеням z, получим

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{W}{R}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial R}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right] - \right. \qquad (6)$$

$$\left. - z\left[2\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{W}{R}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + z^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right\}.$$

Усилия в срединной поверхности оболочки и момент определим по формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz\,,\; N_\Theta = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_\Theta dz\,,\; M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz\,. \qquad (7)$$

При этом, учитывая (3), (4), (6), получим

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left[1 + \frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right] dz = h_0 \left\langle 1 + \frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{W}{R}\right)^2 + \frac{W}{R}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right\}\right\rangle,$$

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z\left[1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right]dz=\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{-\frac{h_0^3}{12}\left(2\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{W}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\}, \tag{8}$$

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z^2\left[1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right]dz=\frac{h_0^3}{12}\left\langle 1+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2+\left(\frac{W}{R}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{W}{R}\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]+3\frac{h_0^2}{20}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right\}\right\rangle.$$

Подставляя (8) в (7) находим

$$N_x=\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-\mu_0\frac{W}{R}+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^3+\right.\right. \tag{9}$$

$$+(1-\mu_0)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2\frac{W}{R}+(1-\mu_0)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{W}{R}\right)^2-\mu_0\left(\frac{W}{R}\right)^3+$$

$$\left.\left.+\frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\left[3\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+(1-\mu_0)\frac{W}{R}\right]\right\}\right\rangle,$$

$$N_\Theta=\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left\langle\mu_0\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{W}{R}+\right.$$

$$+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)-\frac{W}{R}\right]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\frac{W}{R}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)\frac{W}{R}\right]+\frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\left[3\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)-(1-\mu_0)\frac{W}{R}\right]\right\}\right\rangle,$$

$$M_x = -\frac{Eh_0^3}{12\left(1-\mu_0^2\right)}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left\langle 1+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[3\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left(1-\mu_0^2\right)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]\frac{W}{R}+\left(1-\mu_0\right)\left(\frac{W}{R}\right)^2+3\frac{h_0^2}{20}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right\}\right\rangle.$$

Уравнения динамики для оболочек с конструкционным демпфированием в продольном направлении и окруженной упругой средой Винклера такие же, как и в физически линейной теории

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l}\rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1-\mu_0^2)}}\frac{\partial U}{\partial t} - \left[q_x - W\frac{\partial q_x}{\partial r} + U\frac{\partial q_x}{\partial x}\right]_R,$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}N_x\right) + \frac{1}{R}N_\Theta = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \tag{10}$$

$$+k_1\frac{h_0}{R_3}\rho_0 h_0 \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}W - \left[q_n - W\frac{\partial q_n}{\partial r} + U\frac{\partial q_n}{\partial x}\right]_R.$$

Здесь t – время, ρ_0 - плотность материала оболочки, ε_1 - коэффициент демпфирования, k_1 – коэффициент постели окружающей среды. Подставляя (9) в (10) находим уравнения динамики в перемещениях

$$\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-\mu_0\frac{W}{R}+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^3+\left(1-\mu_0\right)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2\frac{W}{R}+\left(1-\mu_0\right)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{W}{R}\right)^2-\mu_0\left(\frac{W}{R}\right)^3+ \tag{11}$$

$$\left.\left.+\frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\left[3\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+\left(1-\mu_0\right)\frac{W}{R}\right]\right\}\right\rangle=$$

$$
\begin{aligned}
&=\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\varepsilon_1 \frac{1}{l}\rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}\frac{\partial U}{\partial t}-\left[q_x - W\frac{\partial q_x}{\partial r}+U\frac{\partial q_x}{\partial x}\right]_R ,\\
&-\frac{Eh_0^3}{12\left(1-\mu_0^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left\{1+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left[3\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)^2+\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+2\left(1-\mu_0\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)\frac{W}{R}+\left(1-\mu_0\right)\left(\frac{W}{R}\right)^2+3\frac{h_0^2}{20}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right]\right\}\right\rangle+\\
&+\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial W}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-\mu_0\frac{W}{R}-\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^3+\right.\right.\right.\\
&+\left(1-\mu_0\right)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^2\frac{W}{R}+\left(1-\mu_0\right)\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{W}{R}\right)^2-\\
&\left.\left.\left.-\mu_0\left(\frac{W}{R}\right)^3+\frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\left[3\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+\left(1-\mu_0\right)\frac{W}{R}\right]\right\}\right]\right\rangle+\\
&+\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\frac{1}{R}\left\langle \mu_0\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{W}{R}+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)-\right.\right.\right.\\
&-\frac{W}{R}\left]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)^2+\left(\frac{W}{R}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)\frac{W}{R}\right]+\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{h_0^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\left[3\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)-\left(1-\mu_0\right)\frac{W}{R}\right]\right\}\right\rangle=\rho_0 h_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\\
&+k_1\frac{h_0}{R^3}\rho_0 h_0\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}W-\left[q_n - W\frac{\partial q_n}{\partial r}+U\frac{\partial q_n}{\partial x}\right]_R .
\end{aligned}
$$

Асимптотические оценки, проводимые в безразмерных переменных, характеризуют рассматриваемые задачи. Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и параметры. Принимаем за характерную длину l – длину волны, а u_m, w_m – характерные значения упругих перемещений

$$W = w_m u_3,\ U = u_m u_1,\ x^* = \frac{x}{l},\ t^* = \frac{c_0}{l}t,\ r^* = \frac{r}{R}, \tag{12}$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$ - скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon << 1,\ \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \tag{13}$$

$$\frac{w_m}{h_0} = O(1),\ \frac{u_m}{l}\frac{R}{h_0} = O(1),\ \frac{m\varepsilon}{E} = O(1),\ \frac{h_0^2}{l^2} = \frac{h_0^2}{R^2},\ \frac{R^2}{l^2} = \varepsilon^3,$$

где ε - малый параметр задачи. В переменных (12), (13) уравнения (11) принимают вид

$$c_0^2\rho_0 h_0 \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial x^*}\left\langle \frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2 - \mu_0\frac{w_m}{R}u_3 + \frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right]^3 + (1-\mu_0)\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right]\frac{w_m}{R}u_3\left[\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right) + \frac{w_m}{R}u_3\right] -$$

$$-\mu_0\left(\frac{w_m}{R}\right)^3 u_3^3+\frac{h_0^2}{12}\frac{R^2}{l^4}\frac{w_m^2}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}}\right)^2\left[3\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)+\left(1-\mu_0\right)\frac{w_m}{R}u_3\right]\right\}\right\rangle=\frac{c_0^2\rho_0 h_0}{l^2}u_m\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}+$$

$$+\varepsilon_1\frac{c_0^2\rho_0 h_0}{l^2}\frac{\partial u_1}{\partial t^*}-\left[q_x-\frac{w_m}{R}u_3\frac{\partial q_x}{\partial r^*}+\frac{u_m}{l}u_1\frac{\partial q_x}{\partial x^*}\right],$$

$$-c_0^2\rho_0\frac{h_0}{l}\frac{h_0^2}{12}\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\left\langle\frac{R}{l}\frac{w_m}{R}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}}\left\{1+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left[3\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)^2+\right.\right.\right.$$

$$+2\left(1-\mu_0\right)\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)\frac{w_m}{R}u_3+\left(1-\mu_0\right)\left(\frac{w_m}{R}\right)^2+$$

$$\left.\left.\left.+3\frac{h_0^2}{20}\frac{R^4}{l^4}\left(\frac{w_m}{R^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}}\right)^2\right]\right\}\right\rangle+c_0^2\rho_0 h_0\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial x^*}\left\langle\frac{R}{l}\frac{w_m}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2-\mu_0\frac{w_m}{R}u_3-\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right]^3+\right.$$

$$+\left(1-\mu_0\right)\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right]\frac{w_m}{R}u_3\left[\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{w_m}{R}u_3\right]-\mu_0\frac{w_m}{R}u_3^3+\frac{h_0^2}{12}\frac{R^2}{l^4}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}}\right)^2\left[3\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(1-\mu_0\right)\frac{w_m}{R}u_3\right]\right\}\right\rangle+c_0^2\rho_0 h_0\frac{1}{R}\left\langle\mu_0\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)-\frac{w_m}{R}u_3-\right.$$

$$-\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left\{\left[\mu_0\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)-\frac{w_m}{R}u_3\right]\left[\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)^2+\left(\frac{w}{R}\right)^2u_3^2+\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)\frac{w_m}{R}u_3\right]+$$

$$\left.+\frac{h_0^2}{12}\frac{R^2}{l^4}\frac{w_m^2}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}}\right)^2\left[3\mu_0\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{w_m}{R}\right)^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^*}\right)^2\right)-(1-\mu_0)\frac{w_m}{R}u_3\right]\right\}\Bigg\rangle=$$

$$=\rho_0 h_0\frac{c_0^2}{l^2}w_m\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}}+k_1\rho_0 h_0\frac{c_0^2}{R^2}w_m u_3-\left[q_n-\frac{w_m}{R}u_3\frac{\partial q_n}{\partial r^*}+\frac{u_m}{l}u_1\frac{\partial q_n}{\partial x^*}\right].$$

Введем независимые переменные в виде

$$\xi=x^*-ct^*,\ \tau=\varepsilon t^* \tag{15}$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны; τ - быстрое время. В этих переменных, оставляя в уравнениях (14) члены порядка ε и ε^2 и отбрасывая члены с более высокими степенями, получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Bigg\langle\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\mu_0\frac{w_m}{R}u_3+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left[\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)^3+(1-\mu_0)\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\frac{w_m}{R}u_3\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{w_m}{R}u_3\right)-\right. \tag{16}$$

$$\left.-\mu_0\left(\frac{w_m}{R}\right)^3u_3^3\right]\Bigg\rangle=\frac{u_m}{l}\left[c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2}-2\varepsilon c\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\tau}\right]-\frac{u_m}{l}\varepsilon_1 c\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}q_x,$$

$$\mu_0\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{w_m}{R}u_3+\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left(\mu_0\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{w_m}{R}u_3\right)\left[\left(\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{w_m}{R}\right)^2u_3^2+\right.$$

$$\left.+\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\frac{w_m}{R}u_3\right]=\frac{R^2}{l^2}\frac{w_m}{R}\left[c^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial\xi^2}-2\varepsilon c\frac{\partial^2 u_3}{\partial\xi\partial\tau}\right]+$$

$$+\frac{w_m}{R}\frac{h_0}{R}k_1u_3-\frac{Rl}{\varepsilon u_m\rho_0h_0c_0^2}q_n\,.$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1=u_{10}+\varepsilon u_{11}+\ldots,\; u_3=u_{30}+\varepsilon u_{31}+\ldots \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16) и оставляя члены порядка ε получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\mu_0\frac{w_ml}{u_mR}u_{30}\right\rangle=c^2\frac{\partial^2u_{10}}{\partial\xi^2}, \tag{18}$$

$$\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{w_ml}{u_mR}u_{30}=0\,.$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_ml}{u_mR}u_{30}=\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi},\; c^2=1-\mu_0^2, \tag{19}$$

Следовательно, u_{10} – остается произвольной функцией, а безразмерная скорость волны $c=(1-\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ и, следовательно, скорость волны равна $\sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}$ – скорости волны в стержне. Здесь $\xi=\dfrac{1}{l}\left(x-\sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}t\right)$, так как оболочка имеет бесконечную длину.

В следующем приближении ε^2 получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi}-\mu_0\frac{w_ml}{u_mR}u_{31}+\frac{4}{3}\frac{m}{E\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^3+(1-\mu_0)\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{w_ml}{u_mR}u_{30}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}+\frac{w_ml}{u_mR}u_{30}\right)-\right.\right.$$

$$-\mu_0\left(\frac{w_m l}{u_m R}\right)^3 u_{30}^3\Bigg]\Bigg\rangle=-2c\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+c^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\xi^2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}c\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}q_x, \tag{20}$$

$$\mu_0\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi}-\frac{w_m l}{u_m R}u_{31}+\frac{4}{3}\frac{m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{w_m l}{u_m R}u_{30}\right)\left[\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{w_m l}{u_m R}\right)^2 u_{30}^2+\right.$$

$$\left.+\frac{w_m l}{u_m R}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}u_{30}\right]=\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{w_m l}{u_m R}c^2\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial\xi^2}+$$

$$+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\frac{w_m l}{u_m R}u_{30}-\frac{Rl}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}q_n,$$

Подставим соотношение (19) в уравнения (20) и получим систему

$$\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\xi^2}-\mu_0\frac{w_m l}{u_m R}\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi}=-\frac{4}{3}\frac{m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(1-\mu_0^2\right)\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)3\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}-$$

$$-2\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}q_x, \tag{21}$$

$$\mu_0\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi}-\frac{w_m l}{u_m R}u_{31}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\left(1-\mu_0^2\right)\mu_0\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial\xi^3}+$$

$$+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{Rl}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}q_n.$$

Умножим обе части второго уравнения на μ_0 и продифференцируем по ξ. Оно примет вид

$$\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\xi^2}-\mu_0\frac{w_m l}{u_m R}\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\mu_0^2\left(1-\mu_0^2\right)\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+ \tag{22}$$

$$+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}-\mu_0\frac{Rl}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}.$$

Левые части уравнения (21) и уравнения (22) совпали. Вычтем, почленно, из уравнения (22) первое уравнение системы (21) и получим разрешающее уравнение

$$
\begin{gathered}
2\sqrt{1-\mu_0^2}\,\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+4\frac{m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(1-\mu_0^2\right)\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\\
+\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\mu_0^2\left(1-\mu_0^2\right)\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\\
+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\,\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=-\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}\left[q_x-\mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right].
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Разделим обе части полученного уравнения (23) на $2\sqrt{1-\mu_0^2}$ и получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+2\frac{m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\\
+\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}\,\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\\
+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=-\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}\left[q_x-\mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right].
\end{gathered}
\tag{24}
$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения равна нулю и получается модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (МКдВ). Надо определить правую часть, решая уравнения гидродинамики.

Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры $V_r=w_m\frac{c_0}{l}v_r$, $V_x=w_m\frac{c_0}{R_1}v_x$, $r^*=\frac{r}{R_1}$, $t^*=\frac{c_0}{l}t$, $x^*=\frac{1}{l}x$, $p=\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{R_1^3}P+p_0$, $\frac{R_1}{l}=\psi=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$, $\lambda=\frac{w_m}{R_1}=O(\varepsilon)$. Подставляя их в уравнение (1) и граничное условие

(2) получаем уравнения и граничные условия для безразмерных компонент скорости жидкости и давления. Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \ldots,\ v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \ldots,\ v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \ldots$$

для первых членов разложений получим уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0,\ \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right),\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* v_r^0 \right) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \qquad (25)$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = \frac{\partial u_3}{\partial t^*},\ v_x^0 = \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1,\ \ r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0,\ r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0.$$

Определим теперь в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до λ, ψ имеем

$$q_x = -\lambda \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1},\ q_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P. \qquad (26)$$

Решение проведем методом итерации. На первом шаге итерации, учитывая что $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} << 1$ опустим первое слагаемое в правой части второго уравнения (25). На втором шаге итерации, подставляя полученное решение в первое слагаемое второго уравнения (25) находим, что

$$P = \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[16 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \frac{2}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - 4 \int u_3 dx^* \right) \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{\partial}{\partial t^*} \left[8 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \frac{1}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) \right].$$

Учитывая, введенные переменные (15), найдем с точностью до ε и учетом связи $c=\sqrt{1-\mu_0^2}$, что

$$P=\sqrt{1-\mu_0^2}\left\{8\left(2\int u_{30}d\xi-\frac{u_m R_1}{w_m l}u_{10}\right)-\frac{1}{3}\psi\frac{R_1 c_0}{\nu}\left(8u_{30}-\frac{u_m R_1}{w_m l}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)\sqrt{1-\mu_0^2}\right\}.$$

При этом

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial r^*}\right|_{r^*=1}=\sqrt{1-\mu_0^2}\left\{4\left(2u_{30}-\frac{u_m R_1}{w_m l}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{6}\psi\frac{R_1 c_0}{\nu}\left(2\frac{\partial u_{30}}{\partial\xi}-\frac{u_m R_1}{w_m l}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}\right)\sqrt{1-\mu_0^2}\right\}.$$

Тогда учитывая, что $\frac{u_m l}{w_m R}u_{30}=\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}$ получаем

$$q_x-\mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}=\frac{\nu}{R_1 c_0}\rho c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{u_m}{l}\left[1-2\mu_0\frac{R}{R_1}\right]^2\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-$$

$$-\frac{R_1}{l}\rho c_0^2\frac{1}{6}\left(1-\mu_0^2\right)\frac{u_m}{l}\left[\left(1-2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2+3\left(2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+$$

$$+\frac{2m}{E\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+$$

$$+k_1\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}= \tag{27}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon\rho_0 h_0}\left\{\frac{\nu}{R_1 c_0}\rho 4\left[1-2\mu_0\frac{R}{R_1}\right]^2\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{R_1}{l}\rho\frac{1}{6}\sqrt{1-\mu_0^2}\left[\left(1-2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2+3\left(2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}\right\}.$$

Полученное уравнение есть модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКдВ) для $\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}$. С принятой точностью в (27) можно положить $R_1=R$. Введем обозначения $\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=c_3\varphi$, $\eta=c_1\xi$, $t=c_2\tau$ и получим уравнение МКдВ в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\sigma_2-\sigma_5+6\sigma_1\varphi^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}+\left(\sigma_4+\sigma_0\right)\varphi=0, \tag{28}$$

где $c_1=\left[c_2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\right\}^{-1}\right]^{\frac{1}{3}}$, $c_2=2\frac{\rho l}{\varepsilon\rho_0 h_0}\frac{\nu}{R_1 c_0}$,

$$c_3=\left\{6\frac{c_2}{c_1}\left[\frac{2m}{E\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

и введено $\sigma_0=\left(1-2\mu_0\right)^2$, $6\sigma_1=\frac{c_3^2 c_1}{c_2}\frac{2m}{E\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1+\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{u_m}{l}\right)^2$. При указанном ранее c_3 можно положить $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\frac{c_1}{c_2}\frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{k_1}{2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_0}{R}$, $\sigma_4=\frac{1}{2c_2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$,

$$\sigma_5=\frac{1}{12}\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{\rho l}{2\rho_0 h_0 c_0^2}\frac{R_1}{l}\frac{c_1}{c_2}\left[\left(1-2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2+3\left(2\mu_0\frac{R}{R_1}\right)^2\right].$$

При условии $(\sigma_4+\sigma_0)=0$, то есть при отсутствии продольного конструкционного демпфирования ($\sigma_4=0$) и $\mu_0=\frac{1}{2}$ – несжимаемый материал ($\sigma_0=0$) уравнение МКдВ принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+6\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}+(\sigma_2-\sigma_5)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0, \tag{29}$$

и имеет точное решение в виде солитона

$$\varphi=\pm\frac{k}{ch(k[\eta-(k^2+\sigma_2-\sigma_5)t\,])}. \tag{30}$$

Волновое число k – произвольная величина, $l=\lambda=1/k$ - длина волны. Фазовая скорость $\omega/k=k^2+\sigma_2-\sigma_5$ положительная при $\sigma_5<\sigma_2+k^2$ и отрицательная при $\sigma_5>\sigma_2+k^2$. Скорость волны $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}\left(1+3\varepsilon\frac{k^2+\sigma_2-\sigma_5}{(1-\mu_0^2)(1+\mu_0+\mu_0^2)}\right)}$ сверхзвуковая при $\sigma_5<\sigma_2+k^2$ и дозвуковая при $\sigma_5>\sigma_2+k^2$. Следовательно, инерция движения жидкости (σ_5) оказывает влияние на скорость движения волны.

Конструкционное демпфирование в продольном направлении σ_4 и влияние жидкости σ_0 оказывает влияние на амплитуду волны. Это влияние исследуется с помощью численного решения уравнения МКдВ при $\sigma_4+\sigma_0\neq 0$.

Для численного исследования полученного уравнения (28), описывающего нелинейные волновые движения в физически нелинейной оболочки с конструкционным демпфированием, заполненной вязкой жидкостью и окруженной упругой средой Винклера будем использовать представленную ниже разностную схему, аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности [15]:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+(\sigma_2-\sigma_5)\frac{\left(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}\right)}{4h}+$$

$$+2\frac{\left(u^3{}_{j+1}^{n+1}-u^3{}_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u^3{}_{j+1}^{n}-u^3{}_{j-1}^{n}\right)}{4h}+$$

$$+\frac{\left(u_{j+2}^{n+1}-2u_{j+1}^{n+1}+2u_{j-1}^{n+1}-u_{j-2}^{n+1}\right)+\left(u_{j+2}^{n}-2u_{j+1}^{n}+2u_{j-1}^{n}-u_{j-2}^{n}\right)}{4h^3}+$$

$$+(\sigma_4+\sigma_0)\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}=0.$$

Далее приведены результаты численного решения МКдВ для различных случаев. При расчетах начальное условие задавалось в виде точного решения (30) при t = 0.

При отсутствии влияния окружающей среды, конструкционного демпфирования в продольном направлении и без учета влияния жидкости, скорость и амплитуда волны не меняется (см. рис. 1). Это означает что скорость движения сверхзвуковая.

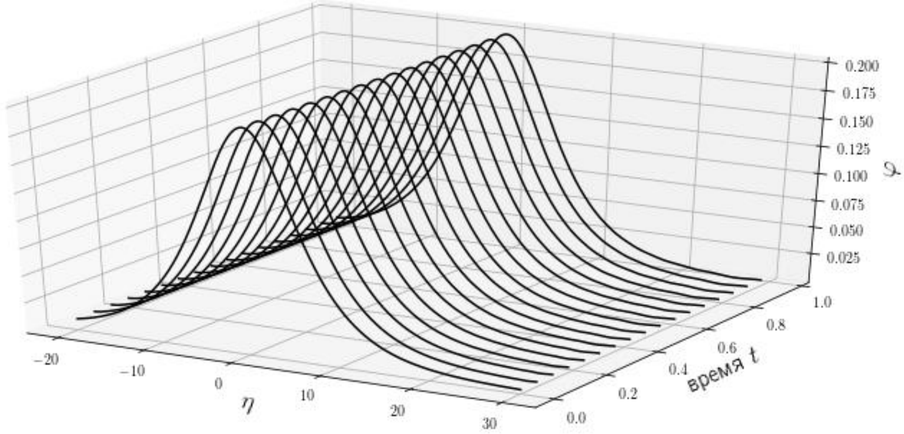

Рис. 1. Отсутствие влияния окружающей среды (σ_2 =*0*), конструкционного демпфирования в продольном (σ_4 =*0*) и жидкости ($\sigma_5 = \sigma_0$=*0*)

При $\sigma_2 - \sigma_5 < 0$; $\sigma_4 + \sigma_0 = 0$ фазовая скорость уменьшается. Амплитуда волны не меняется (см. рис. 2).

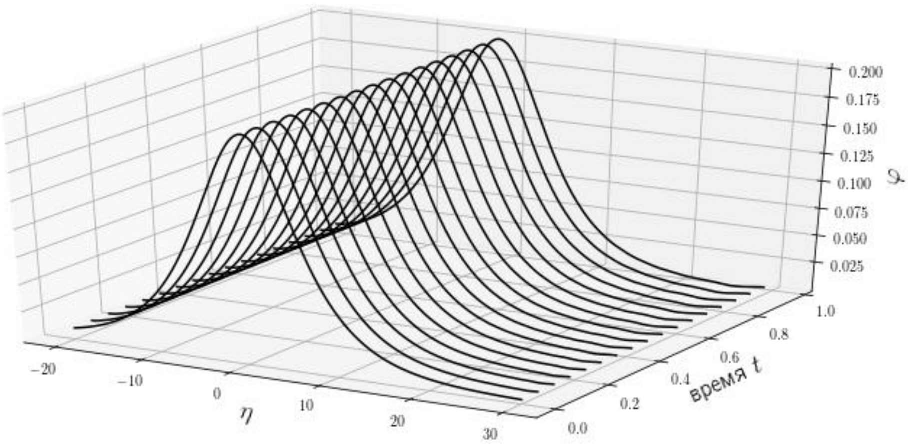

Рис. 2. Случай $\sigma_2 - \sigma_5 < 0$ и $\sigma_4 + \sigma_0 = 0$

При $\sigma_2 - \sigma_5 > 0$; $\sigma_4 + \sigma_0 = 0$ фазовая скорость увеличивается. Амплитуда волны не меняется (см. рис. 3).

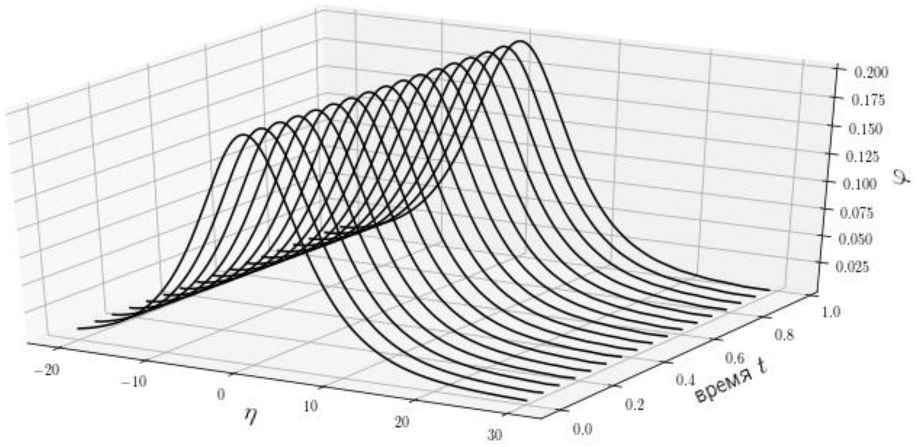

Рис. 3. Случай $\sigma_2 - \sigma_5 > 0$ и $\sigma_4 + \sigma_0 = 0$.

При $\sigma_2 - \sigma_5 < 0$; $\sigma_4 + \sigma_0 \neq 0$ фазовая скорость уменьшается. Амплитуда волны падает (см. рис. 4).

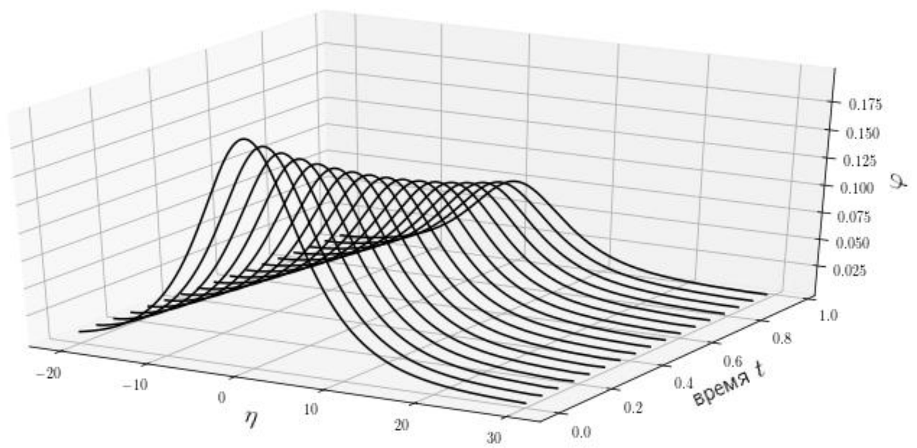

Рис. 4. Случай $\sigma_2 - \sigma_5 < 0$; $\sigma_4 + \sigma_0 \neq 0$

Заключение

При учете влияния конструкционного демпфирования в продольном направлении и окружающей упругой среды, амплитуда волны падает, а скорость движения увеличивается. Наличие жидкости внутри оболочки приводит к еще большему падению амплитуды волны, а также уменьшению скорости распространения волны вплоть до дозвуковой из-за учета инерции движения жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 19-01-00014а

и проект № 18-01- 00127а.

Библиографический список

1. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 1. С. 52 - 58.

2. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 6. С. 725 - 740.

3. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a rod // Journal of Sound and Vibration, 2018, vol. 419, pp. 173 - 182.

4. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 116 - 117.

5. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 2. С. 24 - 33.

6. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 233 - 243.

7. Бочкарев С.А., Матвеенко В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 1. С. 94 - 102.

8. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. - М.: Физматлит, 2000. -591 с.

9. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

10. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмо-передающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98252

11. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53453

12. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64 - 72.

13. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53466

14. Самарский А.А. Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.

15. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2, pp. 26. URL: http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html.

16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

17. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.

18. Овчаров А.А, Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом

нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. №3. URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=13235.

19. Каудерер Г. Нелинейная механика. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - 778 с.

20. Фельдштейн В.А. Упругопластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе // Волны в неупругих средах. Сборник статей. - Кишинев: Изд-во АН МолССР, 1970. С. 199 - 204.

21. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.- М.: Изд-во Юрайт, 2018. - 439 с.