

629.7.012

## **Исследование динамических характеристик миниатюрных летательных аппаратов и влияния на них облика аппарата**

С.В.Серохвостов

### **Аннотация**

Проанализирована возможность применения методик определения динамических характеристик, разработанных для «большой авиации», к миниатюрным летательным аппаратам (МЛА) самолетного типа. Исследованы аналитические выражения динамических характеристик микроаппаратов. Рассмотрены условия устойчивости микроаппаратов и влияния на эти условия облика и конструкции МЛА. Получены условия статической и динамической устойчивости, характерные частоты и времена для наиболее продолжительного этапа полета (крейсерского режима); исследовано влияние параметров конструкции и аэродинамической компоновки на динамические характеристики. Проведено сравнение с летным экспериментом.

### **Ключевые слова:**

миниатюрный летательный аппарат; МЛА; устойчивость; возмущенное движение

### **Введение**

Миниатюрные летательные аппараты имеют характерные размеры 15-30 см и массу в несколько сотен граммов и отличаются от «больших» своими размерами, геометрическими формами, распределением массы по аппарату и пр. Это приводит к заключению о том, что динамические характеристики МЛА могут отличаться от соответствующих характеристик «больших» летательных аппаратов (ЛА).

В настоящее время вопросы устойчивости и управляемости для больших ЛА достаточно хорошо изучены, и разработан ряд методов определения динамических

характеристик (см., например, [1]). Однако даже по внешнему виду МЛА отличаются от больших аппаратов. Поэтому одной из целей исследования был анализ применимости разработанных ранее методов к микроаппаратам.

Главными вопросами являются исследование возможности разделения возмущенного движения на продольное и поперечное и возможности разделения продольного возмущенного движения на длиннопериодическое (фугоидное) и короткопериодическое движение (как известно, возможность разделения определяется характеристиками аппарата и параметрами полета).

Следующий блок вопросов соответствует применимости предложенных ранее (например, в [1]) соотношений, задающих динамические характеристики самолета, к МЛА.

Последняя часть вопросов связана с влиянием параметров МЛА на динамические характеристики и с формулированием рекомендаций по улучшению динамических характеристик МЛА через изменение форм аппарата.

Следующей целью исследования является получение аналитических зависимостей для условий устойчивости и управляемости МЛА как функций от параметров аппарата и получение необходимых числовых данных о характеристиках возмущенного движения микроаппарата.

Эти данные необходимы в том числе для проектирования аппарата и автопилота. Например, достаточно очевидно, что если период колебаний для какого-либо типа возмущенного движения меньше, чем характерное время реакции управляющей поверхности (или механики бортовой видеокамеры), то этот тип колебаний должен быть затухающим. Более того, маломаневренные МЛА следует делать аэродинамически устойчивыми.

Обычно МЛА выполнены по схемам типа «летающее крыло» или «бесхвостка» с малым удлинением крыла, поэтому большинство «продольных» аэродинамических характеристик определяются крылом аппарата. «Поперечные» характеристики определяются крылом, фюзеляжем, вертикальным оперением (если таковое есть), законцовками крыла (если они имеются) и другими вертикальными аэродинамическими поверхностями. Поэтому для решения вышеперечисленных задач в первую очередь требуется информация об аэродинамических характеристиках крыльев малого удлинения. В 70-90-е годы был проведен ряд экспериментов по определению статических и динамических характеристик таких крыльев [2,3], что дает возможность использования полученных данных при анализе МЛА. Однако стоит упомянуть, что, с одной стороны, эти результаты были получены для достаточно больших чисел Рейнольдса ( $Re \sim 10^6$ ), в то время как характерные числа Рейнольдса для МЛА составляют порядка  $Re \sim 10^5$ . С другой стороны, интересующие нас

характеристики определяются в большей степени коэффициентами подъемной силы аэродинамических поверхностей, которые в отсутствии отрыва потока не слишком сильно зависят от числа Рейнольдса. Поэтому результаты должны обеспечить приемлемую точность для использования в требуемом диапазоне  $Re$ .

### **Разделение продольного и поперечного возмущенного движения**

Как известно из [1], предпосылки для возможности разделения возмущенного движения на продольное и поперечное таковы:

1. возмущения достаточно малы,
2. аппарат летит по прямой без ускорения, без крена и скольжения,
3. плотность воздуха постоянна (изменение высоты полета достаточно мало),
4. аппарат симметричен относительно вертикальной плоскости.

Также из вышперечисленного следует, что аппарат должен летать на режимах, на которых не происходит отрыва потока (так как отрыв делает поток несимметричным).

Никаких других предположений о размерах и формах аппарата, числах Рейнольдса и Струхалия и других параметрах подобия не делается. Поэтому, как вывод, можно отдельно анализировать продольное и поперечное возмущенное движение МЛА по крайней мере на участке крейсерского полета по прямой при условии постоянства невозмущенной скорости и отсутствия отрывов потока.

### **Продольное возмущенное движение**

Продольное возмущенное движение обычно анализируется в скоростной системе координат (ось  $OX$  направлена по вектору скорости, ось  $OY$  перпендикулярна к  $OX$ , лежит в плоскости симметрии аппарата и направлена вверх, ось  $OZ$  перпендикулярна к  $OX$  и  $OY$  и направлена по правому полукрылу).

Для анализа характеристик продольного возмущенного движения требуется [1] знать характерное время

$$\tau = \frac{2m}{\rho S V_0},$$

и относительную плотность аппарата

$$\mu = \frac{2m}{\rho S b},$$

где  $m$  – масса МЛА,  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь крыла,  $V_0$  – скорость невозмущенного движения,  $b$  – средняя аэродинамическая хорда крыла (САХ). Для МЛА характерные значения составляют  $\tau \sim 0.15 \div 0.6$  секунд,  $\mu \sim 5 \div 20$ .

Возмущенное продольное движение самолета приближенно описывается системой четырех безразмерных линеализированных дифференциальных уравнений первого порядка [1]. Решение этой системы ищется в виде  $A_i \exp(\lambda t / \tau)$ , где коэффициенты  $A_i$  определяются начальными условиями, а значение  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0.$$

В общем случае решения этого уравнения являются комплексными. Если действительная часть  $\lambda$  отрицательна, то возмущенное движение – затухающее. Данное условие требуется для динамической устойчивости аппарата.

Сделаем следующие допущения:

1. число Маха равно нулю, и все производные от аэродинамических характеристик по числу Маха равны нулю;
2. вектор тяги направлен вдоль оси  $OX$  и проходит через центр масс;
3. высота полета постоянна.

При этих допущениях коэффициенты характеристического уравнения могут быть найдены при помощи формул [1]:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= C_Y^\alpha + 3C_X - \frac{m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}}{r_z^2} - \frac{2T^V V_0}{\rho V_0^2 S}, \\ a_2 &= -\frac{\mu m_z^\alpha + C_Y^\alpha m_z^{\omega z}}{r_z^2} - \frac{m_z^{\omega z} + m_z^\alpha}{r_z^2} \left( 2C_X - \frac{2T^V V_0}{\rho V_0^2 S} \right) + 2 \left( C_Y^2 + (C_Y^\alpha + C_X) \left( C_X - \frac{T^V V_0}{\rho V_0^2 S} \right) - C_Y C_X^\alpha \right), \\ a_3 &= -2 \left( C_Y^2 + (C_Y^\alpha + C_X) \left( C_X - \frac{T^V V_0}{\rho V_0^2 S} \right) - C_Y C_X^\alpha \right) \frac{m_z^{\omega z}}{r_z^2} - 2C_Y^2 \frac{m_z^{\dot{\alpha}}}{r_z^2} - 2 \left( C_X - \frac{T^V V_0}{\rho V_0^2 S} \right) \frac{\mu m_z^\alpha}{r_z^2}, \\ a_4 &= -2C_X^2 \frac{\mu m_z^\alpha}{r_z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $r_z^2 = I_{ZZ} / (mb^2)$  – квадрат безразмерного радиуса инерции МЛА вдоль оси  $OZ$ ;  $I_{ZZ}$  – момент инерции вдоль оси  $OZ$ ;  $C_Y$  – коэффициент подъемной силы;  $C_X$  – коэффициент силы сопротивления;  $C_Y^\alpha$ ,  $C_X^\alpha$  – производные соответствующих коэффициентов по углу атаки  $\alpha$ ;  $m_z^\alpha$ ,  $m_z^{\dot{\alpha}}$ ,  $m_z^{\omega z}$  – производные коэффициента момента  $m_z$  по углу атаки  $\alpha$ , по производной по времени от угла атаки  $\dot{\alpha}$ , по безразмерной угловой скорости вращения  $\omega_z$  относительно оси  $OZ$ , соответственно;  $T^V$  – производная тяги по скорости  $V$ .

Критериями устойчивости движения являются [1]

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, R = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3^2 > 0.$$

Условие  $a_4 > 0$  подразумевает  $m_z^{\dot{\alpha}} < 0$  (известное условие статической устойчивости – центр масс (ЦМ) самолета должен располагаться перед фокусом). Этому условию можно удовлетворить через правильное положение центра масс (спереди от фокуса аппарата). В [4] исследовалось положение фокуса крыла малого удлинения при числах Рейнольдса  $Re \sim 10^5$ . В частности, было показано, что положение фокуса зависит не только от удлинения, но и от формы крыла и угла атаки. Однако для наших дальнейших исследований на основании результатов [2] можно положить, что фокус должен быть расположен ближе, чем 25% от величины САХ считая от передней кромки САХ.

Для электрических силовых установок  $2T^V/(\rho V_0 S)$  отрицательна и порядка  $(-C_x)$ . Таким образом, условие  $a_1 > 0$  точно будет выполнено, если  $m_z^{\dot{\alpha}} < 0$  (для подавляющего большинства случаев  $m_z^{\omega z} < 0$ ). Однако  $m_z^{\dot{\alpha}}$  может значительно изменяться с изменением угла атаки. В экспериментах [2] было получено, что для прямоугольных крыльев малого удлинения значение  $m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}$  изменяется в широком диапазоне при углах атаки  $\alpha = 10^0 - 40^0$ , а при углах атаки  $20^0 - 30^0$  даже меняет знак с отрицательного на положительный (так называемое антидемпфирование). Однако для треугольных крыльев выражение  $m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}$  всегда отрицательно и увеличивается по модулю с увеличением угла атаки [2] (см. рис. 1). Таким образом, для непрямоугольных (т.е. стреловидных) крыльев при не очень больших углах атаки (меньше  $20^0$ ) коэффициент  $a_1$  положителен.

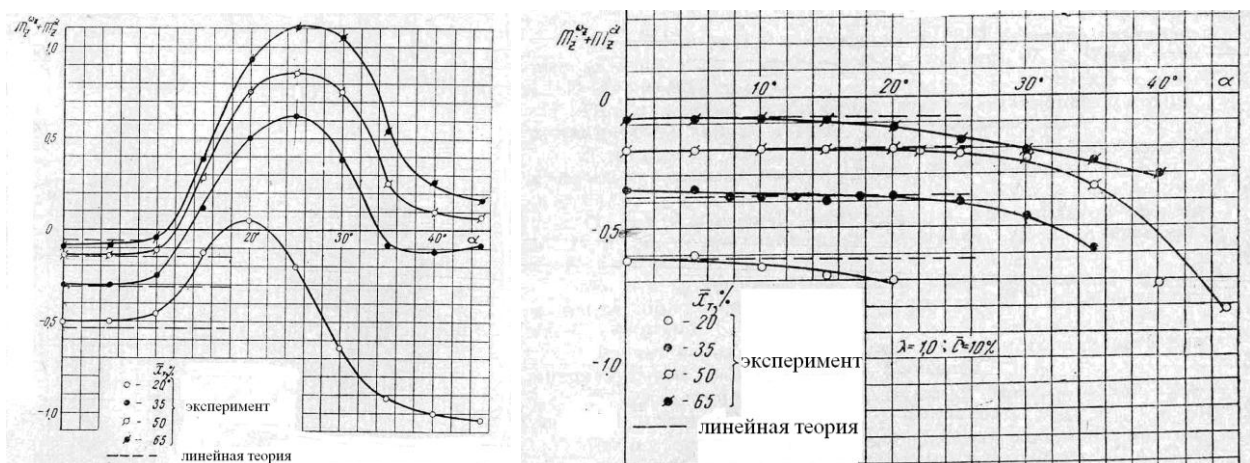


Рис.1. Коэффициенты моментов для прямоугольного (слева) и треугольного (справа) крыльев ( $\lambda=1$ , относительная толщина профиля равна 10%) [2].

Также эксперименты [2] показывают, что для углов атаки меньших  $10^0-15^0$  теоретические результаты «линейной теории» очень близки к экспериментальным точкам и не зависят от угла атаки (см. рис. 1). Поэтому для определения соответствующих производных для крыла малого удлинения можно использовать аналитические формулы линейной теории.

Известно [1], что коэффициент  $m_z^{\omega z}$  увеличивается по модулю в случае стреловидного крыла с ростом стреловидности, поэтому стреловидные крылья предпочтительнее для обеспечения продольной устойчивости МЛА.

Для оценки знака величин  $a_2$  и  $a_3$  требуется знание некоторых численных значений коэффициентов в выражениях (1). Положим  $C_Y \approx 0.3-0.5$ ,  $C_X < 0.15$ ,  $C_{X0} \approx 0.015-0.02$ ,  $m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}} \approx 0.5$  [2],  $C_Y^\alpha \approx 1.5-2$ ,  $4 < \mu < 20$ ,  $r_z < 1$ ,  $m_z^\alpha \approx -0.05$  (эти значения характерны для МЛА). Для таких значений коэффициенты  $a_2$  и  $a_3$  положительны. Также эти значения позволяют несколько упростить выражения для  $a_1, a_2, a_3$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &\approx C_Y^\alpha - \frac{m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}}{r_z^2} \\ a_2 &\approx -\frac{\mu m_z^\alpha + C_Y^\alpha m_z^{\omega z}}{r_z^2} \\ a_3 &= -2C_Y^2 \frac{m_z^{\dot{\alpha}}}{r_z^2} - 3C_X \frac{\mu m_z^\alpha}{r_z^2} \end{aligned} \right\} . \quad (2)$$

Тогда требование  $a_2 > 0$  переходит в известное для больших аппаратов соотношение

$$m_z^{C_Y} + \frac{m_z^{\omega z}}{\mu} > 0,$$

Однако для МЛА второе слагаемое не так мало, как для больших ЛА. Для  $\mu=10$  оно составляет примерно половину от первого слагаемого, что позволяет смещать центр масс МЛА несколько ближе к задней кромке, чем в «традиционных» случаях, без потери динамической устойчивости. На эту возможность указывалось, в частности, в [5].

В выражении  $R = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3^2$  для нашего случая последнее слагаемое меньше остальных, поэтому для первого приближения из этого выражения можно получить условие

$$a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0.$$

Для приведенных выше значений параметров данное неравенство, равно как и более точное, выполняется.

Следующим вопросом является возможность разделения возмущенного движения на коротко- и длиннопериодическое. Один из методов, описанный в [1], основан на предположении о том, что решениями характеристического уравнения являются две пары

комплексно сопряженных корней, причем одна пара значительно больше другой как по модулю, так и по модулю мнимых частей (характеристическим частотам). Поэтому можно получить бóльшие корни из уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

а меньшие корни – из уравнения

$$a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Если эти пары корней действительно существенно отличаются по модулю, то можно анализировать коротко- и длиннопериодическое движения отдельно. Выражения для соответствующих корней таковы

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}, \lambda_{3,4} = \frac{-a_3 \pm i\sqrt{4a_2a_4 - a_3^2}}{2a_2}, \quad (3)$$

и можно получить требования для возможности разделения:

$$a_1 > \frac{a_3}{a_2},$$

$$4a_2 - a_1^2 > \frac{4a_2a_4 - a_3^2}{a_2^2}.$$

Для приведенных выше значений коэффициентов расчеты говорят о возможности разделения коротко- и длиннопериодического движений в случае МЛА. Однако всегда желательно иметь хотя бы качественное экспериментальное подтверждение теоретических предположений. В открытой печати можно найти публикации результатов ряда летных экспериментов с необходимыми нам данными. Например, в [5] (см. рис. 2) приводится запись летного эксперимента для одного из МЛА с  $\mu \sim 17$ ,  $\tau \sim 0.2$  секунды, размахом 0,64 м и хордой 0,18 м (рис. 2).

Из записи видно, что коротко- и длиннопериодические составляющие движения этого аппарата легко различимы, периоды составляют порядка 1 секунды и 8 секунд, соответственно. Для проверки сделанных выше теоретических предположений и выкладок следует сравнить расчеты по полученным формулам с этими экспериментальными данными. С точностью, определяемой наличием и точностью исходных данных об экспериментальном МЛА, расчеты характерных периодов и времен затухания совпадают с экспериментальными данными. При этом упрощение формул (1) к виду (2) и замена точных решений характеристического уравнения четвертого порядка на выражения (3) не дают существенного изменения результата.

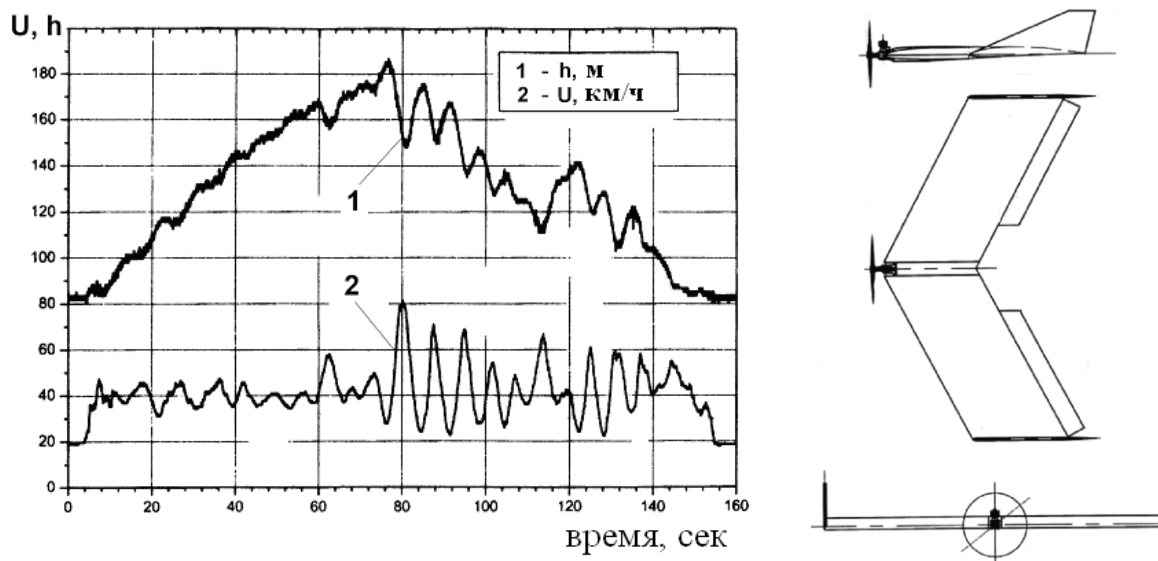


Рис. 2. Зависимость высоты полета ( $h$ ) и скорости ( $U$ ) от времени и внешний вид исследованного МЛА [5].

В связи с этим, можно сделать вывод о том, что даже для относительно малых чисел Рейнольдса и малых относительных плотностей аппарата возможно выделение продольного возмущенного движения из общего движения и разделение его на коротко- и длиннопериодическое, а также возможно применение полученных ранее результатов для вычисления характеристик этого движения.

Однако следует заметить, что рассматриваемый в [5] МЛА имел достаточно большое удлинение ( $\lambda=3.5$ ), а полет проходил не в горизонтальной плоскости. Кроме этого, в расчетах не учитывались механические моменты, создаваемые воздушным винтом при косом обтекании и гироскопические моменты от вращающихся частей аппарата (ротора двигателя и пропеллера).

С помощью формул (2) и (3) можно проанализировать влияние параметров аппарата на его динамические характеристики. Во-первых, демпфирование короткопериодического движения изменяется через варьирование величины  $r_z^2$ . Это можно сделать путем изменения положения тяжелых частей относительно центра масс без изменения положения самого центра масс (для увеличения демпфирования следует располагать тяжелые части ближе к центру масс). Так как положение центра масс не может быть изменено в широких пределах (ЦМ не следует располагать дальше 25% величины САХ от носка САХ, а существенно сдвинуть вперед не получается по конструктивным причинам), невозможно значительно менять величину  $m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}$ , но ее можно варьировать в узких пределах в случае



необходимости (сдвиг ЦМ вперед увеличивает демпфирование). Также можно увеличить эту сумму при помощи увеличения стреловидности.

Наоборот, коэффициенты затухания и частоты колебаний фугоидного движения не зависят от  $r_z^2$ . Затухание зависит от величины  $C_Y^2$ , поэтому для меньших скоростей затухание выше (но в силу малости абсолютной величины коэффициента затухания это эффект не такой сильный).

Влияние остальных параметров на частоту и затухание фугоидного движения не так очевидно. Однако опыт показывает, что достаточно, чтобы частоты были сравнительно малы, чтобы у автопилота или оператора было время на компенсирование возмущения. Также рекомендуется, чтобы действительная часть фугоидных корней была отрицательной (пусть даже и малой по модулю), хотя допустимы и небольшие по модулю положительные значения.

Стоит напомнить, что большое значение устойчивости предполагает плохую управляемость. Также, как можно видеть из рис.1, коэффициенты моментов меняются с изменением угла атаки, поэтому характеристики управляемости также меняются при больших  $\alpha$ . Об этом следует помнить при проектировании автопилотов для МЛА.

### Поперечное возмущенное движение

Обычно [1] поперечное возмущенное движение анализируется в связанной координатной системе, где ось  $OX$  направлена вдоль хорды крыла, ось  $OY$  направлена вверх перпендикулярно  $OX$  и лежит в плоскости симметрии самолета, а  $OZ$  перпендикулярна  $OX$  и  $OY$  (и ориентирована вдоль крыла).

Для дальнейшего исследования требуется ввести характерное время для поперечного движения

$$\tau_{\perp} = \frac{m}{\rho S V_0},$$

безразмерную плотность  $\mu_{\perp}$

$$\mu_{\perp} = \frac{2m}{\rho S L}$$

и безразмерные радиусы инерции

$$r_{XX}^2 = \frac{4I_{XX}}{mL^2}, \quad r_{YY}^2 = \frac{4I_{YY}}{mL^2},$$

где  $L$  – размах крыла,  $I_{XX}$  и  $I_{YY}$  – моменты инерции самолета относительно осей  $OX$  и  $OY$ . Считаем, что  $I_{XY}=0$ .

Все упоминающиеся ниже коэффициенты моментов нормализованы (отнесены к квадратам соответствующих радиусов инерции):

$$\bar{m}_i^q = \frac{m_i^q}{r_{ii}^2}.$$

Временные характеристики поперечного возмущенного движения могут быть приближенно найдены из решения характеристического уравнения четвертой степени [1]

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где [1]

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -(0.5C_Z^\beta + \bar{m}_x^{\omega x} + \bar{m}_y^{\omega y}), \\ a_2 &= 0.5C_Z^\beta (\bar{m}_x^{\omega x} + \bar{m}_y^{\omega y}) + (\bar{m}_x^{\omega x} \bar{m}_y^{\omega y} - \bar{m}_x^{\omega y} \bar{m}_y^{\omega x}) - \mu (\bar{m}_y^\beta + \bar{m}_x^\beta), \\ a_3 &= - \left\{ \begin{aligned} &0.5C_Z^\beta (\bar{m}_x^{\omega x} \bar{m}_y^{\omega y} - \bar{m}_x^{\omega y} \bar{m}_y^{\omega x}) + \mu (\bar{m}_x^\beta \bar{m}_y^{\omega x} - \bar{m}_y^\beta \bar{m}_x^{\omega x}) - \\ &-\mu\alpha (\bar{m}_x^\beta \bar{m}_y^{\omega y} - \bar{m}_y^\beta \bar{m}_x^{\omega y}) + 0.5\mu C_Y \bar{m}_x^\beta \end{aligned} \right\}, \\ a_4 &= 0.5\mu C_Y (\bar{m}_x^\beta \bar{m}_y^{\omega y} - \bar{m}_y^\beta \bar{m}_x^{\omega y}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Нижний индекс производных коэффициентов моментов и сил обозначает ось, относительно которой определяется момент, верхний индекс указывает переменную, по которой бралась производная.

Для большинства случаев два корня характеристического уравнения – действительные, а два других – комплексно сопряженные (эти корни соответствуют так называемому «голландскому шагу»).

Для устойчивости, как и в случае продольного движения, требуется выполнение условий

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, R = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3^2 > 0.$$

Если  $a_4 < 0$ , то движение спирально неустойчиво, если  $R < 0$ , то движение колебательно неустойчиво [1].

Из (4) видно, что  $a_1$  всегда больше нуля. Для проверки выполнимости остальных критериев устойчивости движения МЛА требуются численные значения или аналитические выражения для членов уравнений (3). Основные зависимости приведены в [1], они представлены ниже, индексом « $W$ » обозначаются характеристики крыла, индексом « $T$ » обозначаются характеристики вертикального оперения.

Если  $\beta$  – угол скольжения, то моментные характеристики крыла определяются следующим образом [1]

$$\left. \begin{aligned} m_{x_w}^\beta &\approx -0.5C_Y^\alpha \bar{z} \cos^2(\chi)\psi - 0.5\bar{z} \sin(\chi)C_Y, \\ m_{y_w}^\beta &= -0.06C_Y^2 \operatorname{tg}(\chi) - \alpha m_{x_w}^\beta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\bar{z}$  – расстояние от оси  $OX$  до «центра тяжести полукрыла», отнесенное к полуразмаху,  $0.33 < \bar{z} < 0.5$ ,  $\chi$  – угол стреловидности,  $\psi$  – угол «поперечного V крыла».

Моментные вращательные коэффициенты крыла [1]

$$\left. \begin{aligned} m_{x_w}^{\omega x} &= -\frac{\xi}{2}(2C_Y^\alpha + k_i C_Y^\alpha), \quad m_{x_w}^{\omega y} = -\frac{\xi}{2}(2 - k_i)C_Y, \\ m_{y_w}^{\omega x} &= -\xi \left( (C_X - C_Y^\alpha)\alpha + C_Y \left( \frac{C_Y^\alpha}{\pi\lambda} - 1 \right) k_i \right), \\ m_{y_w}^{\omega y} &= -\xi \left( (C_X - C_Y^\alpha) - C_Y \left( \frac{C_Y^\alpha}{\pi\lambda} - 1 \right) \alpha k_i \right), \\ k_i &= 0.45 + 0.03\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $\xi$  – квадрат радиуса инерции полукрыла относительно оси симметрии, отнесенный к квадрату полуразмаха,  $0.33 < \xi < 0.5$ ;

Для крыльев малого удлинения [6]

$$C_Y^\alpha = \frac{\pi\lambda}{2}, \quad C_X = C_{X0} + \frac{2C_L^2}{\pi\lambda}. \quad (7)$$

Отсюда, формулы (6) могут быть приближенно записаны в виде

$$\begin{aligned} m_{x_w}^{\omega x} &\approx -\frac{\xi}{2} k_i C_Y^\alpha, \quad m_{x_w}^{\omega y} \approx -\frac{\xi}{2} C_Y, \\ m_{y_w}^{\omega x} &= -\xi (C_{X0}\alpha - 0.5C_Y k_i) \approx \frac{\xi}{2} C_Y k_i, \\ m_{y_w}^{\omega y} &= -\xi (C_{X0} + 0.5C_Y \alpha k_i) = -\xi \left( C_{X0} + \frac{C_Y^2}{\pi\lambda} k_i \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что все приведенные выше моментные коэффициенты крыла не зависят от положения начальной точки  $O$  на оси  $OX$  системы координат  $OXYZ$ .

Для вертикального оперения [1]

$$\left. \begin{aligned} m_{x_T}^\beta &= k \frac{S_T y_T}{SL} C_{z_T}^\beta, \quad m_{y_T}^\beta = k \frac{S_T L_T}{SL} C_{z_T}^\beta, \\ m_{x_T}^{\omega x} &= 2k \frac{S_T}{S} \left( \frac{y_T}{L} \right)^2 C_{z_T}^\beta, \quad m_{y_T}^{\omega x} = 2k \frac{S_T}{S} \frac{y_T}{L} \frac{L_T}{L} C_{z_T}^\beta, \\ m_{x_T}^{\omega y} &= 2k \frac{S_T}{S} \frac{y_T}{L} \frac{L_T}{L} C_{z_T}^\beta, \quad m_{y_T}^{\omega y} = 2k \frac{S_T}{S} \left( \frac{L_T}{L} \right)^2 C_{z_T}^\beta, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $S_T$  – площадь вертикального оперения,  $y_T$  – положение фокуса вертикального оперения вдоль оси  $OY$ ,  $L_T$  – положение фокуса вертикального оперения относительно центра масс вдоль оси  $OX$ ,  $k$  – коэффициент торможения потока перед вертикальным оперением. (Отметим, что  $C_z^\beta < 0$ .)

Приведенные формулы не дают очень высокой точности и были получены для крыльев не очень малого удлинения и для вертикальных оперений «классической» компоновки (с вертикальным оперением позади крыла). Поэтому требуется верификация данных формул применительно к МЛА на основе результатов экспериментов.

В серии экспериментов Г.И.Лукова и В.С. Маркиной (см., например, [3]) с крылом малого удлинения с вертикальным оперением (оперениями), расположенными в различных местах крыла, были получены данные о моментных характеристиках, которые позволяют сделать следующие выводы о статических моментах крыла.

1. Абсолютное значение  $m_{yW}^\beta$  достаточно мало по сравнению с  $m_{yT}^\beta$ .
2. Вплоть до углов атаки в  $20^\circ$  значение  $C_z^\beta$  можно считать постоянным.
3. Соотношение (8) для  $m_{yT}^\beta$  с хорошей точностью совпадает с экспериментом.
4.  $m_x^\beta$  можно считать линейной функцией по  $C_Y$  как в (4).

Для изолированного оперения значение  $C_z^\beta$  совпадает с теоретической формулой, аналогичной (7), с хорошей точностью. Однако для вертикального оперения на крыле экспериментальное значение  $C_z^\beta$  выше, чем для изолированного. Это можно объяснить «экраным» (или «зеркальным») эффектом («экраном» является крыло). Если оперение расположено на оси  $OX$ , то значение  $C_z^\beta$  следует увеличить в 1.5 раза, если оперение расположено на конце крыла, то множитель составляет примерно 1.3.

Используя приведенные выражения для коэффициентов и экспериментальные данные, для крыла с  $\psi=0$  вид выражения  $a_4$  будет следующим:

$$a_4 \approx \frac{\mu C_Y^2 |C_z^\beta| L_T S_T}{2 r_{XX}^2 r_{YY}^2 L S} \left( \bar{z} \sin(\chi) \frac{L_T}{L} - 0.5 k \xi (2 - k_i) \right).$$

Очевидно, что знак  $a_4$  определяется выражением в скобках.

Из (6), для  $\lambda=1$  имеем  $k_i \approx 0.5$ . Предполагая  $\chi=30^\circ$ ,  $L_T/L=0.5$ , можно получить, что значение в скобках около  $-0.1$  (т.е.  $a_4 < 0$ ), хотя первое слагаемое равно примерно  $+0.1$ . Таким образом, достаточно сложно получить  $a_4 > 0$  для крыла с  $\psi=0$ .

Положительное значение  $\psi$  крыла может исправить ситуацию. Так как часть выражения  $m_{xW}^\beta$ , в которую входит  $\psi$ , не зависит от  $C_Y$ , то для малых  $C_Y$  коэффициент  $a_4$

может стать положительным (но на больших  $C_Y$  значение  $a_4$  уменьшается и может стать отрицательным).

Однако следует иметь в виду, что даже для отрицательных  $a_4$  его абсолютное значение достаточно мало в случае МЛА, поэтому характерное время соответствующего движения достаточно велико (порядка 3-10 секунд), и пилот или автопилот имеют возможность для исправления ситуации.

Для оценки остальных характеристик поперечного движения можно упростить коэффициенты характеристического уравнения на основе экспериментальных данных [3]:

$$\begin{aligned} a_1 &\approx -\bar{m}_x^{\text{ox}} - \bar{m}_y^{\text{oy}}, \\ a_2 &\approx -\mu\bar{m}_x^\beta - \mu\bar{m}_y^\beta, \\ a_3 &\approx -\mu\left(-\bar{m}_y^\beta\bar{m}_x^{\text{ox}} + \frac{C_Y}{2}\bar{m}_x^\beta\right). \end{aligned}$$

Предварительные исследования показывают, что комплексные корни характеристического уравнения достаточно велики по модулю по сравнению с двумя другими. Поэтому, как и в случае продольного движения, можно найти приближенные значения корней характеристического уравнения из уравнений

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}}{2a_2}.$$

Выше было показано, что абсолютное значение одного из действительных корней достаточно мало (т.е.  $4a_2a_4 \ll a_3^2$ ). Поэтому этот корень будет примерно равен  $(-a_4/a_3)$ , второй действительный корень будет равен примерно  $(-a_3/a_2)$ .

Отметим, что коэффициент затухания для  $\lambda_{1,2}$  увеличивается по абсолютной величине с уменьшением радиусов инерции.

### Летный эксперимент

Для подтверждения полученных аналитических результатов требуется провести сравнение с экспериментом. К сожалению, в настоящее время в открытой печати не было опубликовано практически никаких результатов летных испытаний МЛА, позволяющих оценить «поперечные» динамические характеристики аппарата. Поэтому автором был спроектирован и изготовлен экспериментальный МЛА (см. рис. 3), и была проведена серия летных испытаний.

Характеристики аппарата следующие:  $L=0.29$  м,  $S=0.0644$  м<sup>2</sup>,  $V_0=7$  м/с,  $m=0.08$  кг. Отсюда,  $\tau=0.3$  с,  $\mu\approx 8$ .

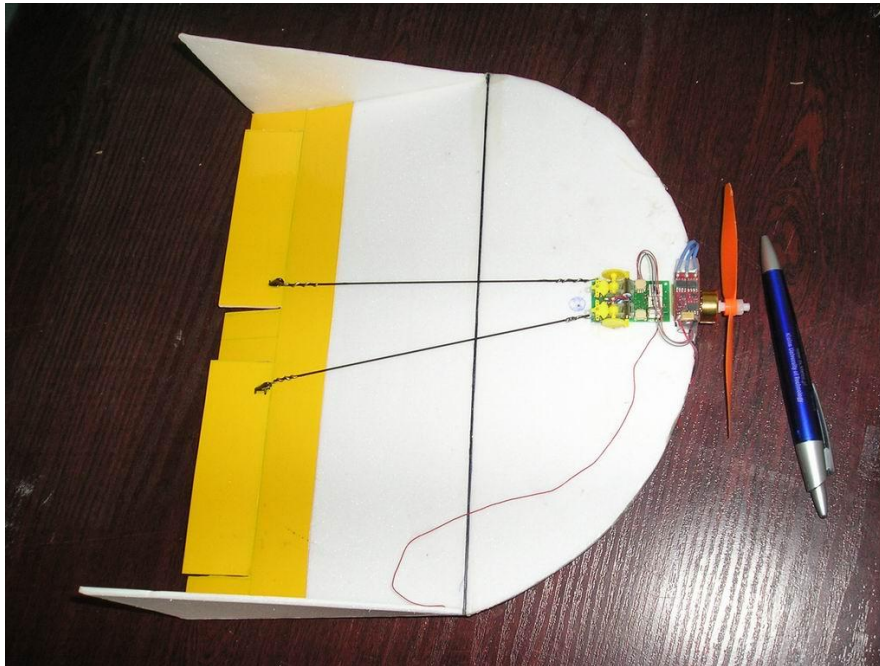


Рис.3. Экспериментальный аппарат

Положение центра масс было выбрано таким, чтобы аппарат был устойчив в продольном движении. Колебательная мода поперечного движения также получилась устойчивой, период колебаний составил около 0.4 с, что совпадает с теоретическим результатом с достаточной точностью. Это подтверждает возможность применения полученных выше формул и методов и в случае МЛА.

Что касается спиральной моды поперечного движения, пилот не смог определить точно, устойчива эта мода или нет. Это может быть объяснено большим характеристическим временем процесса и атмосферными возмущениями. Расчет же показывает околонулевые значения затухания и достаточно большую погрешность в определении декремента затухания вследствие неточности определения характеристик аппарата.

### **Выводы**

1. Анализ показывает, что уравнения возмущенного движения МЛА могут быть разделены на продольное и поперечное для случая полета на постоянной высоте с постоянной скоростью.
2. Продольное возмущенное движение МЛА может быть разделено на короткопериодическое и длиннопериодическое (фугоидное) движение.

3. Получены приближенные выражения для характеристик возмущенного движения.
4. Результаты летного эксперимента совпадают с теоретическими с достаточной точностью. Поэтому можно использовать полученные аналитические выражения для оценки динамических характеристик МЛА.
5. Стреловидное крыло для МЛА предпочтительнее прямого с точки зрения статической поперечной и динамической продольной устойчивости. Также для поперечной устойчивости рекомендуется крыло с поперечным «V».
6. Уменьшение радиусов инерции аппарата может быть рекомендовано для увеличения устойчивости МЛА в продольном короткопериодическом и поперечном колебательном движениях.

### **Библиографический список**

1. Остославский И.В. Аэродинамика самолета. М.: Оборонгиз, 1957. - 560 с.
2. Табачников В.Г. Продольное демпфирование крыльев малого удлинения при больших углах атаки. // Труды ЦАГИ, №1705. 1975. с 142-154
3. Луков Г.И., Калинин А.И., Маркина В.С. Исследование аэродинамических характеристик оперений при малых скоростях. Вертикальное оперение. // Труды ЦАГИ, №2542. 1994. с. 17-43
4. Muller T.J., Torres G.E. Aerodynamics of low aspect ratio wings at low Reynolds numbers with application to Micro Air Vehicles Design and optimization. // Final Report UNDAS-FR-2025, 2001
5. Брусов В., Кузнецов А., Петручик В. Экспериментальные и теоретические исследования аэродинамических характеристик малоразмерного ДПЛА (часть 1 и часть2). // «Budowa i eksploatacja maszyn», №1. Kielce (Польша): Wydawnictwo Politechniki Swietokrzyskiej. 2006. с. 43-55
6. Корнушенко А.В., Серохвостов С.В. Экспериментальное исследование аэродинамики МЛА. // Техника воздушного флота, №2. 2008. с. 3-8

### **Сведения об авторе**

Серохвостов Сергей Владимирович, доцент Московского физико-технического института (государственного университета), к.т.н.

ФАЛТ МФТИ, ул. Гагарина, д.16, г.Жуковский, Московская область, 140180

e-mail: [serokhvostov@mail.ru](mailto:serokhvostov@mail.ru)