

УДК 621.396

Методика расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех

Звонарев В.В.*, Попов А.С., Худик М.Ю.*****

*Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского,
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198, Россия*

**e-mail: zvonarevvitalii@yandex.ru*

***e-mail: arahar@mail.ru*

****e-mail: mihail.hudik@yandex.ru*

Статья поступила 11.04.2019

Аннотация

Рассматривается методика расчета вероятности ошибки посимвольного оптимального когерентного приема двоичных фазоманипулированных противоположных сигналов (BPSK) при наличии гармонической синфазной помехи, не учитываемой коррелятором.

Ключевые слова: вероятность ошибки, фазоманипулированный сигнал (BPSK), корреляционный приемник, дискретные сообщения, помехи, когерентный прием сигналов.

Введение

Система передачи информации с воздушных и космических средств при малых углах места функционирует в некоторой среде, являющейся источником

помех. В реальном радиоканале связи передаваемый сигнал искажается, в результате чего сообщение воспроизводится с ошибкой. Причинами таких искажений являются [1, 2]:

- искажения, вносимые самим каналом (влияние окружающей среды);
- помехи, воздействующие на сигнал.

В связи с этим при оценке качества передаваемой информации с воздушных и космических средств при малых углах места необходим анализ влияния помех, наличие которых предвидеть не всегда возможно [3, 4]. Не все виды помех можно формализованно представить для количественного расчета их влияния, но можно выбрать из множества конструктивных моделей наиболее подходящую по некоторым параметрам. Поэтому разработка методик расчета влияния помех различных структур является актуальной и практически важной задачей.

В настоящей статье рассматривается методика расчета вероятности ошибки посимвольного оптимального приема двоичных фазоманипулированных сигналов при наличии неучтенной когерентной помехи. Оптимальный прием дискретных сигналов осуществляется с помощью корреляционного приемника или согласованного фильтра, настроенных на сигнал в отсутствии помехи, в присутствии только шумов приемника [5, 6].

Постановка задачи

1. Модель сигнала имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_c \cdot \cos \omega_0 t, \quad t \in [0, T]; \\ S_2 &= A_c \cdot \cos(\omega_0 t + \pi) = -A_c \cdot \cos \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{символ 1} \\ \text{символ 2,} \end{array}$$

где T – длительность информационного символа.

2. Модель помехи имеет вид:

$$\Pi = A_{\Pi} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{\Pi}).$$

Требуется получить аналитическое выражение для расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех, с учетом двумерной плотности вероятности случайных величин.

Методика расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех

Анализ математической модели радиоканала передачи информации на основе многомерной редуцированной вероятностной меры показал, что радиоканалы передачи информации подвержены воздействию помех [7, 8, 9]. В частности, эти помехи проявляются в изменении уровня сигнала (замираний) и называются мультипликативными помехами.

По мере увеличения дальности передачи информации в радиоканале появляются замирания сигнала, и нарастает их глубина. Радиоканал передачи информации становится сначала райсовским, а на пределе прямой видимости – релеевским [2, 10, 11].

Таким образом, при отсутствии помехи смесь сигнала с i -м символом (S_i) и собственным шумом (Π) может быть представлена в следующем виде [12]:

$$U^i = S_i + \text{Ш},$$

Тогда оператор коррелятора [13] может быть вычислен по формуле:

$$\zeta_i = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot S_i dt, \quad i = \{1, 2\}.$$

В корреляционном приемнике, схема которого представлена на рис. 2, осуществляется выбор оператора [13, 14, 15]. Из двух значений оператора ζ_1 и ζ_2 выбирается больший и принимает решение о символе. Если $\zeta_1 > \zeta_2$, то принимается решение, что был передан символ 1 и наоборот. Ошибкой является решение о принятии символа 2, если был передан символ 1 и наоборот.

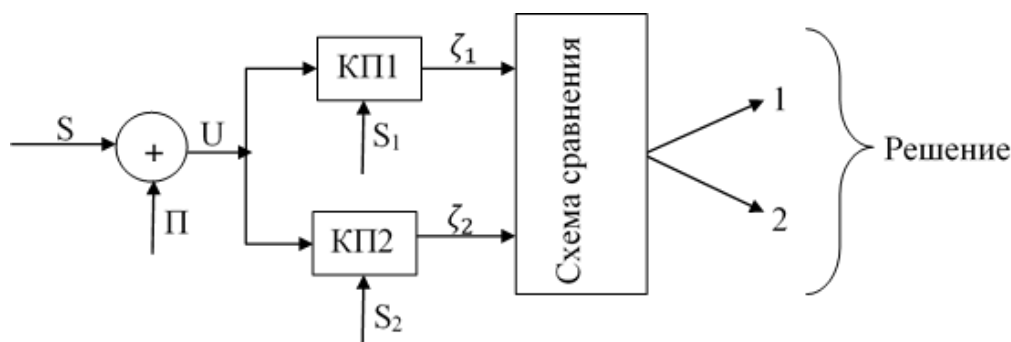


Рис. 2. Структура корреляционного приемника: S – сигнал; П – помеха;

$U = S + \text{П} + \text{Ш}$ – смесь сигнала, помехи и собственного шума Ш на входе приемного устройства; КП_1 и КП_2 – корреляционные приемники, настроенные на символы S_1 и S_2 сигнала, соответственно; ζ_1 и ζ_2 – напряжения с выходов КП_1 и КП_2 , соответственно; 1 и 2 – результат решения на схеме сравнения

Априорные вероятности передачи символов 1 и 2 обозначим P_1 и P_2 соответственно.

Тогда средняя вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ приема символов определяется по формуле полной вероятности:

$$P_{\text{ош}} = P_1 \cdot P_{\text{ош1}} + P_2 \cdot P_{\text{ош2}},$$

где $P_{\text{ош1}}$ и $P_{\text{ош2}}$ – вероятности ошибки приема символов 1 и 2, соответственно.

Если $\omega(\zeta_1, \zeta_2)$ представляет собой двумерную плотность вероятности случайных величин ζ_1 и ζ_2 , то можно написать формулу для вычисления вероятности ошибки приема символа 1:

$$P_{\text{ош1}} = P\{\zeta_1^1 < \zeta_2^1\},$$

где ζ_1^1 – величина выхода КП1 при передаче сигнала S_1 (или символа 1);

ζ_2^1 – величина выхода КП2 при передаче сигнала S_2 .

На рис. 3 показана заштрихованная область D , по которой производится интегрирование [16].

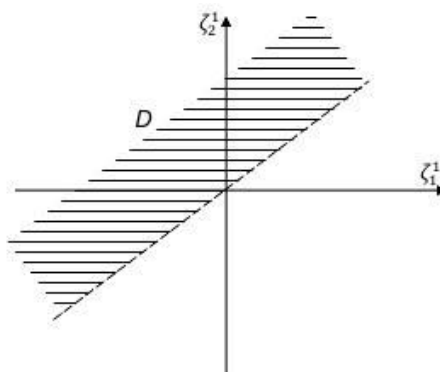


Рис. 3. Область интегрирования D

Следовательно, расчет вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех может осуществляться по формуле:

$$P_{\text{ош1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\zeta_2^1} \omega(\zeta_1^1, \zeta_2^1) d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Для противоположных сигналов с активной паузой и равной энергией символов 1 и 2 решающее правило можно упростить и принять в следующем виде:

$$\begin{cases} \xi = \zeta_1 - \zeta_2 > 0, \text{ при приеме символа 1} \\ \xi = \zeta_1 - \zeta_2 < 0, \text{ при приеме символа 2,} \end{cases}$$

Тогда ошибочное решение, например, для символа 1 будет иметь вид:

$$\xi^1 = \zeta_1^1 - \zeta_2^1 < 0.$$

Т.е. при передаче символа 1 (сигнала S_1) разность отклика корреляторов была меньше нуля.

Поскольку величины ζ_1 и ζ_2 случайные, то разность ξ также случайная величина, характеризующаяся плотностью вероятностью (ПВ), которую можно обозначить $\omega(\xi)$ [17].

Пример использования методики расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех

Помеха в виде когерентного колебания на несущей частоте сигнала ω_0 может быть вычислена по формуле:

$$\Pi = A_{\Pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_{\Pi}),$$

где A_{Π} и φ_{Π} – амплитуда и фаза помехи.

Если сигналы символов 1 и 2 равны, то, соответственно, можно записать:

$$S_1 = A_c \cdot \cos \omega_0 t; S_2 = -S_1.$$

Тогда при передаче S_1 (символа 1) имеем:

$$\begin{aligned} \zeta_1^1 &= \frac{1}{T} \int_0^T U^1 S_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (S_1 + \Pi + \text{Ш}) S_1 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T S_1^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \Pi \cdot S_1 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \text{Ш} \cdot S_1 dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Расчет значения величины ζ_1^1 , выхода коррелятора КП1 при передаче сигнала S_1 (или символа 1), осуществляется в следующей последовательности:

1. Вычисляется мощность сигнала S_1 (символа 1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T S_1^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (A_c \cos \omega_0 t)^2 dt = \frac{A_c^2}{T} \int_0^T (\cos \omega_0 t)^2 dt = \\ &= \frac{A_c^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} dt = \frac{A_c^2}{2T} T = \frac{A_c^2}{2} = P_c. \end{aligned}$$

2. Вычисляется второе слагаемое выражения (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T A_{\Pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_{\Pi}) \cdot A_c \cos \omega_0 t dt &= \frac{A_c \cdot A_{\Pi}}{T} \int_0^T \frac{\cos \varphi_{\Pi} + \cos(2\omega_0 t + \varphi_{\Pi})}{2} dt = \\ &= \frac{A_c \cdot A_{\Pi}}{T} T \cos \varphi_{\Pi} = \sqrt{P_c \cdot P_{\Pi}} \cdot \cos \varphi_{\Pi}, \end{aligned}$$

где P_{Π} – мощность помехи.

3. Вычисляется случайная составляющая величины ζ_1^1 :

$$\frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cdot A_c \cos \omega_0 t dt = \frac{A_c}{T} \int_0^T n(t) \cdot \cos \omega_0 t dt.$$

Таким образом, расчет значения величины ζ_1^1 производится по формуле:

$$\zeta_1^1 = P_c + \sqrt{P_c \cdot P_n} \cdot \cos \varphi_n + \frac{A_c}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 t dt.$$

Значение величины ζ_2^1 рассчитывается по формуле:

$$\zeta_2^1 = \frac{1}{T} \int_0^T U^1 \zeta_2 dt = -\frac{1}{T} \int_0^T U^1 \zeta_1 dt.$$

Следовательно, разность величин ζ_1^1 и ζ_2^1 может быть представлена в следующем виде:

$$\xi^1 = \zeta_1^1 - \zeta_2^1 = 2P_c + 2\sqrt{P_c P_n} \cos \varphi_n + 2\frac{A_c}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 t dt. \quad (2)$$

Из (2) видно, что расчет математического ожидания (МО) величины ξ^1 производится по формуле:

$$\langle \xi^1 \rangle = 2P_c + 2\sqrt{P_c P_n} \cos \varphi_n + 2\frac{A_c}{T} \int_0^T \langle n(t) \rangle \cos \omega_0 t dt.$$

Поскольку из случайных величин (СВ) в формуле только $n(t)$ с нулевым МО, то получается:

$$\langle \xi^1 \rangle = 2P_c + 2\sqrt{P_c P_n} \cos \varphi_n.$$

Оператор интегрирования линеен, а значит, если он воздействует на гауссовскую случайную величину $n(t)$, то и итоговая величина ξ^1 тоже гауссовская [18].

В данном случае ξ^1 еще и одномерная СВ.

Найдем дисперсию СВ ξ^1 , а именно $\sigma_{\xi^1}^2$ [13, 16]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi^1}^2 &= \langle (\xi^1 - \langle \xi^1 \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left[2 \frac{A_c}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 t dt \right]^2 \right\rangle = \\ &= \frac{4A_c^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \cos \omega_0 t_1 \cdot \cos \omega_0 t_2 \cdot \langle n(t_1)n(t_2) \rangle dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Известно, что белый гауссовский шум (БГШ) имеет автокорреляционную функцию вида [18]:

$$\langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1),$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность БГШ;

$\delta(t_2 - t_1)$ – дельта функция Дирака.

Тогда расчет дисперсии СВ ξ^1 производится по формуле [18]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi^1}^2 &= \frac{4A_c^2}{T^2} \int_0^T \cos \omega_0 t_1 \left[\int_0^T \cos \omega_0 t_2 \cdot \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1) \right] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{4A_c^2}{T^2} \int_0^T \cos \omega_0 t_1 \cdot \cos \omega_0 t_1 \frac{N_0}{2} dt_1 = \frac{4A_c^2 N_0}{T^2} \int_0^T \cos^2 \omega_0 t_1 dt_1 =\end{aligned}$$

$$= \frac{4A_c^2 N_0}{2T^2} \frac{T}{2} = \frac{A_c^2}{2} 2 \frac{N_0}{T} = 2P_c \frac{N_0}{T}$$

$$\sigma_{\xi^1}^2 = \frac{2P_c N_0}{T}.$$

Расчет ПВ СВ ξ^1 производится по формуле:

$$\omega(\xi^1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi^1}} e^{-\frac{1(\xi^1 - \langle \xi^1 \rangle)^2}{2\sigma_{\xi^1}^2}},$$

где:

$$\langle \xi^1 \rangle = 2P_c + 2\sqrt{P_c P_{\Pi}} \cos \varphi_{\Pi};$$

$$\sigma_{\xi^1}^2 = \frac{2P_c N_0}{T}.$$

Вероятность $P_{\text{ош1}}$ определяется из выражения:

$$P\{\xi^1 < 0\} = P_{\text{ош1}} = \int_{-\infty}^0 \omega(\xi^1) d\xi^1.$$

Заштрихованная площадь на рис. 4 равна вероятности $P_{\text{ош1}}$.

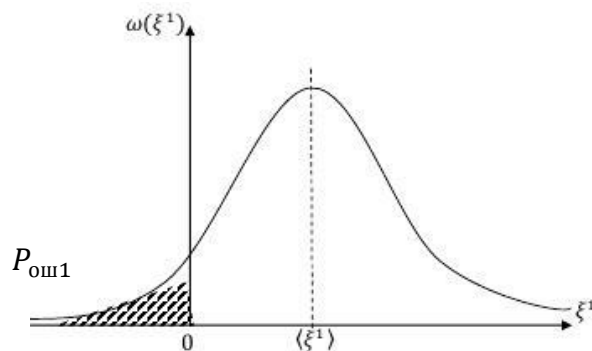


Рис. 4. Область вероятности $P_{\text{ош1}}$

Проведем замену переменных:

$$\eta^1 = \frac{\xi^1 - \langle \xi^1 \rangle}{\sigma_{\xi^1}}.$$

Верхний предел интегрирования $\xi_B^1 = 0$. Отсюда находим верхний предел интегрирования для новой переменной η_B^1 , приравняв в формуле $\xi_B^1 = 0$.

Тогда имеем:

$$\eta_B^1 = \frac{\xi_B^1 - \langle \xi^1 \rangle}{\sigma_{\xi^1}};$$

$$\eta_B^1 = -\frac{\langle \xi^1 \rangle}{\sigma_{\xi^1}} = -\frac{2P_c + 2\sqrt{P_c P_{\Pi}} \cos \varphi_{\Pi}}{\sqrt{\frac{2P_c N_0}{T}}}.$$

Упростив последнее выражение, получим:

$$\eta_B^1 = \sqrt{2}(h_c + h_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi}),$$

где:

$$h_c^2 = \frac{P_c T}{N_0} = \frac{E_c}{N_0}; \quad h_{\Pi}^2 = \frac{P_{\Pi} T}{N_0} = \frac{E_{\Pi}}{N_0}.$$

E_c и E_{Π} – энергии сигнала и помехи на длительности информационного символа T ;

h_{Π}^2 – соотношение помеха/шум.

При замене переменной ξ^1 на η^1 , параметры новой нормированной η^1 , как очевидно есть:

$$\langle \eta^1 \rangle = 0; \sigma_{\eta^1}^2 = 1.$$

ПВ новой переменной имеет вид:

$$\omega(\eta^1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta^1)^2}{2}}.$$

Вероятность ошибки приема символа при когерентном приеме определяется выражением:

$$P_{\text{ош1}} = \int_{-\infty}^{\eta_B^1} \omega(\eta^1) d\eta^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2}(h_c + h_n \cos \varphi_n)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Последнее выражение может быть представлено функцией Крампа [13]:

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Тогда имеем:

$$P_{\text{ош1}} = \frac{1}{2} \{1 - \Phi[\sqrt{2}(h_c + h_n \cos \varphi_n)]\}. \quad (3)$$

По представленной выше методике вычисляется значение вероятности ошибки для второго символа – $P_{\text{ош2}}$:

$$P_{\text{ош2}} = \frac{1}{2} \{1 - \Phi[\sqrt{2}(h_c - h_n \cos \varphi_n)]\}. \quad (4)$$

При условии равновероятности символов средняя вероятность ошибки приема будет равна:

$$P_{\text{ош}} = \frac{P_{\text{ош1}} + P_{\text{ош2}}}{2} \quad (5)$$

Графики зависимостей вероятности ошибки приема символа от отношения сигнал/шум показаны на рисунках 5а и 5б.

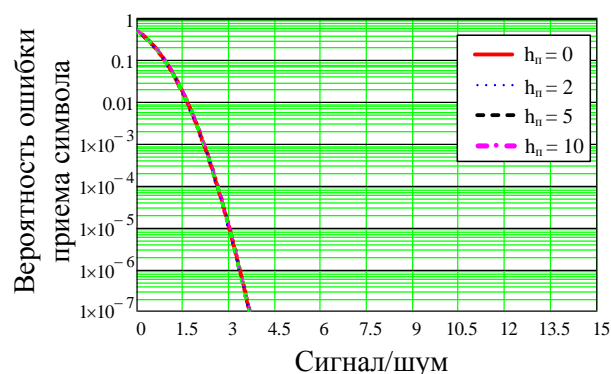
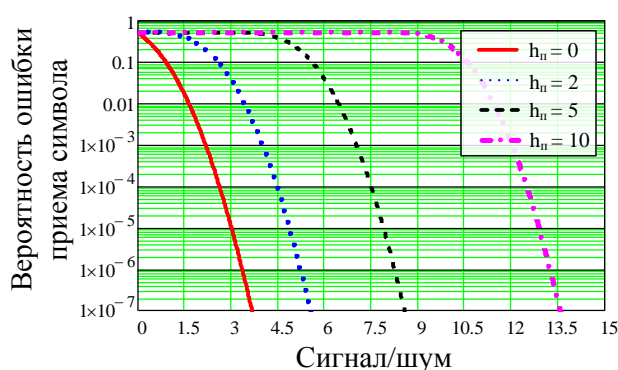


Рис. 5а. Зависимость вероятности ошибки приема символа от отношения

Рис. 5б. Зависимость вероятности ошибки приема символа от отношения

сигнал/шум при фазах помехи $\varphi=0^\circ$ и 180°

сигнал/шум при фазе помехи $\varphi=90^\circ$

Проведенный анализ работ [19, 20] и полученных результатов расчета по формуле (5), с учетом формул (3) и (4), показал, что при увеличении мощности помехи вероятность ошибки увеличивается. При фазе помехи $\varphi_{\text{п}} = 0^\circ$ и $\varphi_{\text{п}} = 180^\circ$ характер кривых не изменяется. При фазе помехи $\varphi_{\text{п}} = 90^\circ$ ее влияние отсутствует. При других значениях фазы помехи ее влияние оказывается промежуточным, от максимального до нулевого.

Заключение

В статье приведен общий подход и методика расчета средней вероятности ошибки посимвольного приема дискретных двоичных сообщений. Представлен пример использования методики расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех в виде когерентного колебания на несущей частоте сигнала.

Помеха представляет собой гармонические колебания, совпадающая по частоте с несущим колебанием сигнала, когда оптимальный прием сигнала не предусматривает наличия помехи. Подход и методика применимы к любым видам сообщений и к любым видам помех, модели которых могут быть представлены в аналитическом виде.

Библиографический список

1. Палий А.И. Радиоэлектронная борьба: Средства и способы подавления и защиты радиоэлектронных систем. – М.: Воениздат, 1981. – 320 с.
2. Буга Н.Н. Казаков А.А. Статистическая теория связи. – Л.: ВИКИ имени А.Ф. Можайского, 1979. – 342 с.
3. Макаренко С.И. Робототехнические комплексы военного назначения – современное состояние и перспективы развития // Системы управления, связи и безопасности. 2016. № 2. С. 73 - 132.
4. Морозов Д.В., Чермошенцев С.Ф. Модель локализации отказов в аппаратуре системы управления беспилотного летательного аппарата при использовании

гибкого алгоритма функционирования в полете // Труды МАИ. 2018. № 99. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=91997>

5. Борисов В.И., Зинчук В.М. Помехозащищенность систем радиосвязи. Вероятностно-временной подход. – М.: РадиоСофт, 2008. – 260 с.
6. Vu T.B. Simultaneous nulling in sum and difference patterns by amplitude control // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, vol. 34, no. 2, pp. 214 - 218.
7. Звонарев В.В., Попов А.С. Вероятность безобрывной связи, как показатель эффективности канала с замираниями // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Системы отображения информации и управления спецтехникой. 2014. № 1. С. 103 - 106.
8. Агеев Ф.И., Ворона М.С., Звонарев В.В., Попов А.С. Методика расчета помехоустойчивости системы радиосвязи с учетом динамических характеристик случайных замираний сигнала // Радиотехника. 2018. № 5. С. 92 - 99.
9. Лихачев В.П., Сидоренко С.В. Помехоустойчивость алгоритма автофокусировки изображений по минимуму энтропии при сложной фоновой обстановке // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90171>
10. Звонарев В.В., Попов А.С., Пряхин В.А. Методика расчета коэффициента запаса по мощности для обеспечения заданной вероятности непрерывания передачи информации в канале с замираниями сигнала // Вестник воздушно-космической обороны. 2015. № 4 (8). С. 47 - 51.
11. Звонарев В.В., Попов А.С. Влияние шумовой помехи на вероятность безобрывной связи в канале с релеевскими замираниями // Вопросы

радиоэлектроники. Серия: Системы отображения информации и управления спецтехникой. 2014. № 1. С. 106 - 111.

12. Звонарев В.В., Карабельников И.А., Парамонов И.Ю., Попов А.С. Вероятностная модель спутникового радиоканала связи при малых углах места // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2017. Т. 4. № 2. С. 38 - 42.

13. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. - М.: Советское радио, 1970. – 728 с.

14. Applebaum S.P., Chapman D.J. Adaptive arrays with main beam constraints / S. P. Applebaum // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1976, vol. 24, no. 5, pp. 650 - 662.

15. Applebaum S.P. Adaptive arrays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 24, 1976, no. 5, pp. 585 - 598.

16. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения (физико-математическая библиотека инженера). – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 480 с.

17. Звонарев В.В., Попов А.С., Пряхин В.А., Шаймарданов А.М. Развитие теории передачи дискретных сообщений в канале с замираниями сигналов на основе многомерной редуцированной вероятностной меры и ее применение // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2016. Вып № 657. С. 57 - 63.

18. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
19. Шелудяк Т.Б. Модель системы приёма цифровой телевизионной информации в наземном комплексе управления космическими аппаратами // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100816>
20. Surendra P. Linear antenna arrays with broad nulls with applications to adaptive arrays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1979, vol. AP-27, no. 2, pp. 185 - 190.