УДК 624.041.2

ВЫБОР УДАЧНОГО НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СИЛ

В.Е.Кичеев

Рассматривается задача решения системы линейных алгебраических уравнений частного вида.

Получена функция, максимуму которой соответствует удачное начальное приближение.

Данная статья является продолжением и развитием работ [1] - [3], в которых затронуты вопросы решения канонических уравнений метода сил.

Расчет на прочность статически неопределимых авиационных конструкций включает в себя задачу нахождения внутренних силовых факторов в элементах этих конструкций. Для решения этой задачи в строительной механике получены канонические уравнения метода сил, которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

Эта система обладает следующим свойством: матрица коэффициентов симметрична относительно главной диагонали

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{2}$$

При увеличении числа неизвестных, что характерно для метода конечных элементов, существенно возрастает трудоемкость решения системы (1).

С целью сокращения объема вычислений при использовании итерационных методов решения системы (1), ставится задача нахождения удачного начального приближения вектора x. Попытка решения этой задачи предпринята в [2]. Здесь изложена модификация способа, предложенного в [2].

При решении поставленной задачи будут использованы следующие уравнения, которые получены в [1] путем элементарных преобразований системы (1).

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(b)} x_j = B^{(b)} \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(d)} x_j = B^{(d)} \qquad (4)$$

где

$$A_j^{(b)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i \qquad (5)$$

$$A_j^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \qquad (6)$$

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(b)} \qquad (7)$$

$$B^{(b)} = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \qquad (8)$$

$$B^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \qquad (9)$$

За направление вектора удачного начального приближения принимаем направление вектора градиента гиперплоскости (3). Начальное приближение ищем в следующем виде

$$x_j^{(0)} = \mu A_j^{(b)} \qquad (10)$$

Здесь индекс 0 означает начальное приближение. Поставленная задача сведена к нахождению коэффициента μ.

Выполняем перенос начала координат в точку начального приближения (10). Делаем замену переменных. Новые переменные обозначим буквой z. Между старыми переменными x и новыми переменными z существует связь

$$x_j = z_j + x_j^{(0)} \qquad (11)$$

С учетом (10) имеем

$$x_j = z_j + \mu A_j^{(b)} \qquad (12)$$

Подставим (12) в (1), получим преобразованную систему, которая отличается от исходной только столбцом свободных членов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \delta_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{13}$$

где

$$\delta_i = b_i - \mu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(b)} \tag{14}$$

С учетом (7) формула (14) принимает вид

$$\delta_i = b_i - \mu d_i \tag{15}$$

Для системы (13) аналогично [1] формируем уравнение первой гиперплоскости. За вектор λ принимаем вектор – столбец свободных членов δ. В результате имеем следующее уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(\delta)} z_j = B^{(\delta)}, \tag{16}$$

где

$$A_j^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \delta_i; \tag{17}$$

$$B^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \tag{18}$$

Подставим (15) в (17)

$$A_j^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i - \mu \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \tag{19}$$

С учетом обозначений (5) и (6) имеем

$$A_j^{(\delta)} = A_j^{(b)} - \mu A_j^{(d)} \tag{20}$$

Аналогично тому, как в [1] формируется вектор d, из системы (13) формируем вектор D.

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(\delta)} \tag{21}$$

С учетом (20) имеем

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(b)} - \mu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(d)} \tag{22}$$

Введем обозначение

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(d)} \tag{23}$$

Подставим (7) и (23) в (22)

$$D_i = d_i - \mu h_i \tag{24}$$

Применительно к системе (13) рассмотрим функцию F , которая используется в методе наискорейшего спуска

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_i^2, \tag{25}$$

где

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - \delta_i \tag{26}$$

Нетрудно убедиться в том, что вектор градиента функции F прямо противоположен вектору градиента гиперплоскости (16).

Аналогично методу наискорейшего спуска, выполняем спуск по градиенту гиперплоскости

(16)

$$z_j = \nu A_j^{(\delta)} \tag{27}$$

Коэффициент ν произвольный.

По нашему мнению, поставленную задачу удобно решать в сферических координатах. Переходим от декартовых координат к сферическим

$$z_j = R\varphi_j, \tag{28}$$

где

$$\varphi_j = \frac{z_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_j^2}} \tag{29}$$

Подставим (27) в (29)

$$\varphi_j = \frac{A_j^{(\delta)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}[A_j^{(\delta)}]^2}} \tag{30}$$

Для упрощения записи последующих формул введем обозначение

$$r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}[A_j^{(\delta)}]^2} \tag{31}$$

С учетом (30) и (31) формула (28) принимает вид

$$z_j = \frac{R}{r} A_j^{(\delta)} \tag{32}$$

Получим выражение функции F в сферических координатах. Подставим (32) в (26).

$$f_i = \frac{R}{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(\delta)} - \delta_i \tag{33}$$

Учитывая (21), имеем

$$f_i = \frac{R}{r} D_i - \delta_i \tag{34}$$

Для этой функции производная по R равна

$$\frac{df_i}{dR} = \frac{D_i}{r} \tag{35}$$

Рассмотрим вторую производную по R функции F, которую обозначим буквой W. Принимая во внимание (25) и учитывая (34), получаем

$$W = \frac{d^2F}{dR^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df_i}{dR}\right)^2 \tag{36}$$

Подставим (35) и учитывая (31), имеем следующее выражение второй производной

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{\sum_{j=1}^{n}\left[A_j^{(\delta)}\right]^2} \tag{36a}$$

Подставим (20) и (24)

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[d_i - \mu h_i\right]^2}{\sum_{j=1}^{n}\left[A_j^{(b)} - \mu A_j^{(d)}\right]^2} \qquad (37)$$

Преобразуем к виду

$$W = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{A\mu^2 - 2B\mu + C}, \qquad (38)$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \qquad\qquad A = \sum_{j=1}^{n}\left[A_j^{(d)}\right]^2$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i h_i \qquad (39); \qquad B = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(b)} A_j^{(d)} \qquad (40)$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \qquad\qquad C = \sum_{j=1}^{n}\left[A_j^{(b)}\right]^2$$

Имеем функцию одной переменной

$$W = W(\mu) \qquad (41)$$

Начальное приближение (10) считаем удачным при коэффициенте μ, обеспечивающем экстремальное значение функции W. Необходимое условие экстремума

$$\frac{dW}{d\mu} = 0 \qquad (42)$$

с учетом (38) после простых преобразований принимает вид

$$(Ab - aB)\mu^2 + (aC - Ac)\mu + Bc - bC = 0 \qquad (43)$$

Вопрос выбора корня этого квадратного уравнения требует самостоятельного исследования и здесь не рассматривается. По нашему мнению, предпочтение следует отдать наибольшему корню, который обеспечивает максимальное значение модуля вектора начального приближения, а также максимум функции W.

Предлагается второй вариант решения поставленной задачи, который может быть предпочтительнее.

Повторяем все выкладки до формулы (20) включительно. Удачным начальным приближением считаем то, при котором обеспечивается максимальный шаг при спуске по гиперплоскости (16) в направлении градиента до точки, в которой уравнение (16) обращается в тождество.

Принимаем

$$z_j = \chi A_j^{(\delta)} \tag{44}$$

Коэффициент χ находим из (16) при подстановке (44)

$$\chi = \frac{B^{(\delta)}}{\sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(\delta)} \right]^2} \tag{45}$$

Формула (44) с учетом (45) принимает вид

$$z_j = \frac{A_j^{(\delta)} B^{(\delta)}}{\sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(\delta)} \right]^2} \tag{46}$$

Формируем функцию Ф, которая представляет собой квадрат модуля вектора z. С учетом

(46) имеем

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 = \frac{\left[B^{(\delta)} \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(\delta)} \right]^2} \tag{47}$$

Подставим (18), (20) и, учитывая (15), получаем

$$\Phi = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \mu d_i \right)^2 \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(b)} - \mu A_j^{(d)} \right]^2} \tag{48}$$

Преобразуем к виду

$$\Phi = \frac{\left[\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma \right]^2}{A\mu^2 - 2B\mu + C}, \tag{49}$$

где

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \qquad (50)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Коэффициенты A,B,C вычисляем по формулам (40).

Имеем функцию одной переменной

$$\varPhi = \varPhi(\mu) \qquad (51)$$

Начальное приближение (10) считаем удачным при коэффициенте μ, обеспечивающем максимум функции Ф. Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\varPhi}{d\mu} = 0 \qquad (52)$$

с учетом (49) после простых преобразований принимает вид

$$\alpha A\mu^3 - 3\alpha B\mu^2 + \left[2\left(\alpha C + \beta B\right) - \gamma A\right]\mu + \gamma B - 2\beta C = 0 \qquad (53)$$

Вычислив коэффициенты и решив это кубическое уравнение, выбираем корень, обеспечивающий максимум функции Ф.

Сравним трудоемкость двух вариантов решения поставленной задачи.

В случае, когда задача решается путем нахождения экстремумов функции W, объем вычислений будет больше, так как нужно находить вектор h. В случае, когда задача решается путем определения максимума функции Ф, объем вычислений будет меньше, так как не требуется находить вектор h.

По нашему мнению, оба варианта могут быть использованы при разработке эффективного метода нахождения удачного начального приближения. Так, например, для системы (1) с плохо обусловленной матрицей можно предложить следующую процедуру решения поставленной задачи в два этапа.

Первый этап. Решаем задачу нахождения максимума функции W. Вопрос оптимального числа шагов требует специального исследования и здесь не рассматривается.

Второй этап. Используя последнее начальное приближение, которое получено на первом этапе, решаем задачу нахождения максимума функции Ф аналогично (44) – (53). По нашему мнению, можно ограничиться одним приближением. С целью уменьшения объема вычислений задачу нахождения максимума функции Ф, по-видимому, можно заменить задачей минимизации функции F с использованием классического метода наискорейшего спуска. При этом делаем только одно приближение.

Решив задачу нахождения удачного начального приближения, переходим к решению преобразованной системы уравнений, которая получена из (1) путем переноса начала координат в точку удачного начального приближения. Эту задачу можно решать любым известным итерационным методом. По нашему мнению, неплохие результаты могут быть получены при использовании способа, который предложен в [3]

Список литературы

1. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых стержней силовых авиационных конструкций с использованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 14 – http//www.mai.ru (26.12.2003г.)
2. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с использованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып.27 – http//www.mai.ru (2007г.)
3. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых подкрепленных оболочек частного вида с использованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып.27 – http//www.mai.ru (2007г.)

Сведения об авторе

Кичеев Валентин Ефимович – старший научный сотрудник ОСКБЭС Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н..

Телефон: (495) 158-44-68, 158-49-09.