

Источники силы и скорости, резонансы и антирезонансы

Попов И.П.

Курганский государственный университет, ул. Советская, 63/4,

Курган, 640020, Россия

e-mail: ip.popov@yandex.ru

Статья поступила 24.02.2021

Аннотация

Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника силы, либо последовательного соединения и источника скорости. Антирезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения и источника скорости, либо последовательного соединения и источника силы. Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями.

Ключевые слова: источник силы, источник скорости, последовательное соединение, параллельное соединение, резонанс, антирезонанс.

Введение

В установившемся режиме при гармонических воздействиях удобно использовать комплексное представление величин [1]. При этом символический (комплексный) метод существенно упрощает исследование резонансных и околорезонансных явлений [2, 3]. В отличие от классического метода здесь не возникает необходимость в составлении и решении дифференциальных уравнений [4].

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [5–14]. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли [15, 16]. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями [17–19].

В основе исследования механических систем лежит дуально-инверсный аналог закона Ома для участка электрической цепи

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \dot{F} \underline{y}, \quad (1)$$

где \dot{V} и \dot{F} – комплексные амплитуды скорости и силы, \underline{z} и \underline{y} – механические импеданс (impedance) и адмитанс (admittance) в комплексном представлении [1].

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Далее рассматриваются параллельное и последовательное соединения элементов механической системы [1].

Аналитические описания резонанса в курсах теоретической механики соответствуют параллельному соединению.

Источниками внешнего механического гармонического воздействия на систему выступают либо источник силы, либо источник скорости [3].

Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания.

Источник силы характеризуется комплексной амплитудой силы

$$\dot{F} = Fe^{i0}. \quad (2)$$

Источник скорости характеризуется комплексной амплитудой скорости

$$\dot{V} = Ve^{i0}. \quad (3)$$

Механические гармонические воздействия, описываемые в курсах теоретической механики, соответствуют источнику силы.

Параллельное соединение характеризуется следующими величинами [1].

Инертный реактанс (reactance) –

$$\underline{x}_m = \omega t e^{i\pi/2} = x_m e^{i\pi/2}, \quad (4)$$

где t – масса.

Упругий реактанс –
$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\pi/2} = x_k e^{-i\pi/2}, \quad (5)$$

где k – коэффициент упругости.

Механический резистанс (resistance) –

$$\underline{r} = r e^{i0} = r,$$

где r – коэффициент вязкого сопротивления.

Механический импеданс –

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi}, \text{ где } Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}, \varphi = \arctg \frac{x_m - x_k}{r}. \quad (6)$$

Последовательное соединение характеризуется следующими величинами [1].

Инертный сассептанс (susceptance) –

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega t} e^{-i\pi/2} = b_m e^{-i\pi/2}. \quad (7)$$

Упругий сассептанс –
$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\pi/2} = b_k e^{i\pi/2}. \quad (8)$$

Механический кондактанс (conductance) –

$$\underline{g} = g e^{i0} = g.$$

Для элемента (инертного, упругого, резистивного), рассматриваемого вне связи с другими механическими элементами, $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$, $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$, $\underline{g} = 1/\underline{r}$. В системе, включающей несколько элементов, соотношения иные.

Механический адмитанс –

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi}, \text{ где } Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}, \varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g}. \quad (9)$$

Параллельное соединение и источник силы. Резонанс сил

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) –

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{\underline{F}}}{\underline{z}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi} = Ve^{-i\varphi}. \quad (10)$$

Комплексная амплитуда инертной силы –

$$\dot{\underline{F}}_m = \underline{x}_m \dot{\underline{V}} = x_m Ve^{i(\pi/2-\varphi)} = F_m e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (11)$$

Комплексная амплитуда упругой силы –

$$\dot{\underline{F}}_k = \underline{x}_k \dot{\underline{V}} = x_k Ve^{-i(\pi/2+\varphi)} = F_k e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (12)$$

Комплексная амплитуда резистивной силы –

$$\dot{\underline{F}}_r = \underline{r} \dot{\underline{V}} = rVe^{-i\varphi} = F_r e^{-i\varphi}. \quad (13)$$

Разумеется,

$$\dot{\underline{F}}_m + \dot{\underline{F}}_k + \dot{\underline{F}}_r = \dot{\underline{F}}. \quad (14)$$

Из закона Гука, (12) и (5) следует выражение для комплексной амплитуды

отклонения –
$$\dot{\underline{X}} = \frac{\dot{\underline{F}}_k}{k} = \frac{x_k Ve^{-i(\pi/2+\varphi)}}{k} = \frac{kVe^{-i(\pi/2+\varphi)}}{\omega k} = \frac{V}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = Xe^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (15)$$

Из второго закона Ньютона, (11) и (4) следует выражение для комплексной амплитуды ускорения –

$$\dot{A} = \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \frac{\omega m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \omega V e^{i(\pi/2-\varphi)} = A e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (16)$$

Разумеется, $A = \omega V = \omega^2 X$.

Из (10)–(16) и (4)–(6) следуют амплитудно-частотные характеристики

$$F_k(\omega) = \frac{kF}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad X(\omega) = \frac{F}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}},$$

$$F_r(\omega) = \frac{rF}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad V(\omega) = \frac{F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad (17)$$

$$F_m(\omega) = \frac{\omega m F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad A(\omega) = \frac{\omega F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}. \quad (18)$$

Разумеется,
$$F = \sqrt{F_r^2 + (F_k - F_m)^2} \quad (19)$$

Графики функций $X(\omega)$, $V(\omega)$, $A(\omega)$ ведут себя качественно также как, соответственно, $F_k(\omega)$, $F_r(\omega)$, $F_m(\omega)$.

Частота ω_k , на которой функции $X(\omega)$ и $F_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия $\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0$.

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - r^2 / (2km)} = \omega_0 \sqrt{1 - r^2 / (2x_w^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2 / 2},$$

где $x_w = \sqrt{kt}$ – волновое сопротивление (системы), $d = r/x_w$ – затухание (системы) (по аналогии с электротехникой).

$$F_{k \max} = F_k(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad X_{\max} = X(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} \frac{F}{k} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} X_0,$$

где $Q = 1/d$ – добротность (системы) (по аналогии с электротехникой), $X_0 = X(0) = F/k$ – статическое отклонение.

Частота ω_r , на которой функции $V(\omega)$ и $F_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна $\omega_r = \sqrt{k/m} = \omega_0$.

$$F_{r \max} = F_r(\omega_0) = F, \quad V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F}{r}. \quad (20)$$

Частота ω_m , на которой функции $A(\omega)$ и $F_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия $\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0$.

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2/(2km)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2/2}}. \quad (21)$$

$$F_{m \max} = F_m(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad A_{\max} = A(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} \frac{F}{m} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} A_0, \quad (22)$$

где $A_0 = A(0) = F/m$ – постоянное ускорение (при нулевой частоте).

При $d^2/2 > 1$ функции $X(\omega)$, $A(\omega)$, $F_k(\omega)$, $F_m(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что $\omega_k \omega_m = \omega_0^2$, (23)

$$F_{k \max} = F_{m \max}, \quad (24)$$

$$A_{\max} = \omega_0^2 X_{\max}, \quad (25)$$

$$\frac{A_{\max}}{\omega_m} = \omega_k X_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{1-d^2/4}}. \quad (26)$$

Другие характерные точки:

$$F_m(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad A(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} A_0, \quad (27)$$

$$F_k(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad X(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} X_0, \quad (28)$$

$$F_m(\omega_0) = QF, \quad A(\omega_0) = QA_0, \quad F_k(\omega_0) = QF, \quad X(\omega_0) = QX_0, \quad (29)$$

$$F_r(\omega_k) = F_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad V(\omega_k) = V(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} \frac{F}{r} = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} V(\omega_0). \quad (30)$$

Характерные отношения:

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_m(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_k(\omega_k)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_m(\omega_k)} = \frac{X(\omega_k)}{X(\omega_m)} = \frac{A(\omega_m)}{A(\omega_k)} = \frac{1}{1-d^2/2}, \quad (31)$$

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/2}}, \quad (32)$$

$$\frac{F_k(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = Q\sqrt{1-d^2/2}. \quad (33)$$

На рис. 1 представлены *подлинные* резонансные кривые для системы с параметрами: $F = 100$ Н, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 10$ кг·с⁻¹.

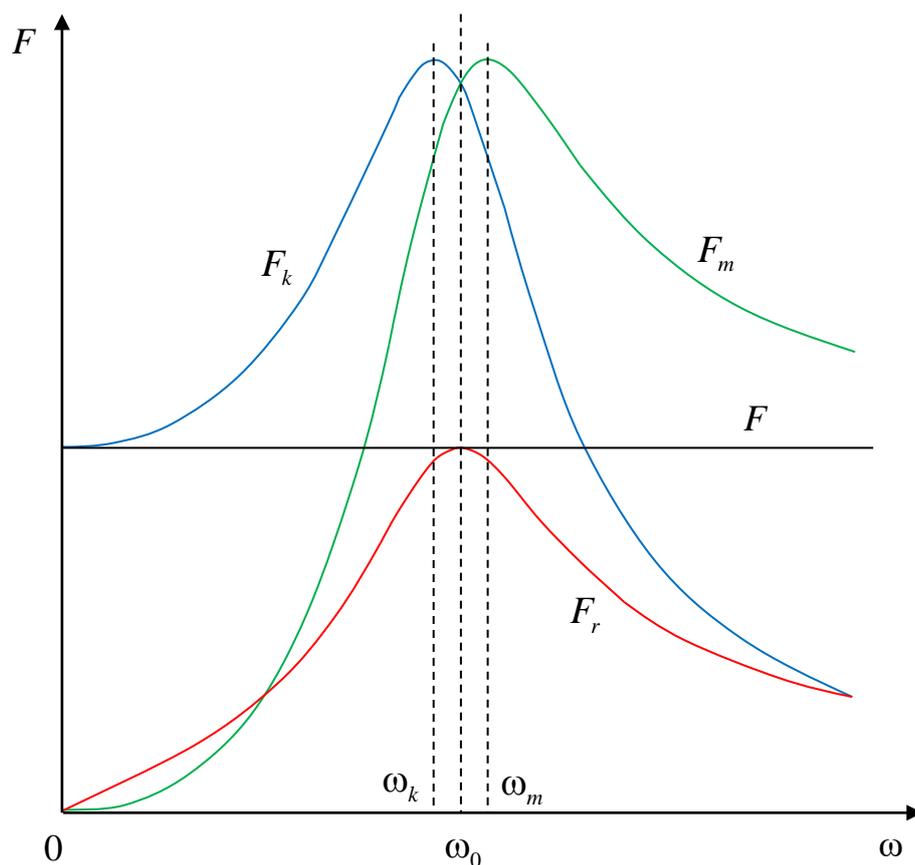


Рис. 1. – Резонанс сил

На том основании, что амплитуда отклонения X имеет максимум на частоте ω_k ($\omega_k < \omega_0$) она (ω_k , а не ω_0) считается резонансной частотой [20].

Это было бы сильным решением, если бы X был единственным значимым кинематическим параметром. Однако не менее значимыми параметрами являются амплитуды скорости V и ускорения A . При этом первая имеет максимум на частоте ω_0 , а вторая – на частоте ω_m ($\omega_m > \omega_0$). Таким образом, ω_k ничем не лучше, чем ω_0 и ω_m . Единственным аргументом при выборе резонансной частоты остается соображение симметрии (усиленное выражением (23)), в соответствии с которым резонансная частота – ω_0 .

Этот выбор становится еще более очевидным, если обратиться к силам.

Амплитуда упругой силы F_k имеет максимум на частоте ω_k , амплитуда инертной силы F_m – на частоте ω_m . Отдать предпочтение той или другой частоте невозможно. Однако именно на частоте ω_0 имеет место *резонанс сил*, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю [3].

Кроме того, величина импеданса механической системы $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$, характеризующего ее свойство оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, на частоте ω_0 имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу минимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

С другой стороны, имея в виду рис. 1, можно вести речь о трех резонансных частотах: ω_k , ω_m и ω_0 . На первой имеет место *резонанс упругой силы*, на второй – *резонанс инертной силы*, на третьей – *резонанс резистивной силы*.

Параллельное соединение и источник скорости. Антирезонанс сил.

Комплексная амплитуда инертной силы – $\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = x_m V e^{i\pi/2} = F_m e^{i\pi/2}$.

Комплексная амплитуда упругой силы – $\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = x_k V e^{-i\pi/2} = F_k e^{-i\pi/2}$.

Комплексная амплитуда резистивной силы – $\dot{F}_r = \underline{r} \dot{V} = r V e^{i0} = F_r e^{i0}$.

Разумеется, $\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}$.

Комплексная амплитуда отклонения –

$$\dot{X} = \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i\pi/2}}{k} = \frac{k V e^{-i\pi/2}}{\omega k} = \frac{V}{\omega} e^{-i\pi/2} = X e^{-i\pi/2} \quad (34)$$

Комплексная амплитуда ускорения –

$$\dot{A} = \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i\pi/2}}{m} = \frac{\omega m V e^{i\pi/2}}{m} = \omega V e^{i\pi/2} = A e^{i\pi/2} \quad (35)$$

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) – $\dot{F} = \dot{V} \underline{z} = V z e^{i\varphi} = F e^{i\varphi}$.

Амплитудно-частотная характеристика $F(\omega) = V \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$.

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $F(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (3) порождает чрезмерные деформации упругого элемента (34), сопровождаемые, соответственно, чрезмерными силами упругости. При сверхвысоких частотах условие (3) порождает чрезмерные ускорения (35) и чрезмерные инерционные силы.

При ω_0 график проходит через *минимум* $F_{\min} = F(\omega_0) = Vr = F_r$. Имеет место *антирезонанс сил*, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и *противоположны*, а их сумма, соответственно, равна нулю.

Для антирезонанса разночтений со смещением антирезонансной частоты (она же резонансная) не возникает.

На рис. 2 представлена *подлинная* антирезонансная кривая для системы, отличающейся от первой тем, что $V = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$.

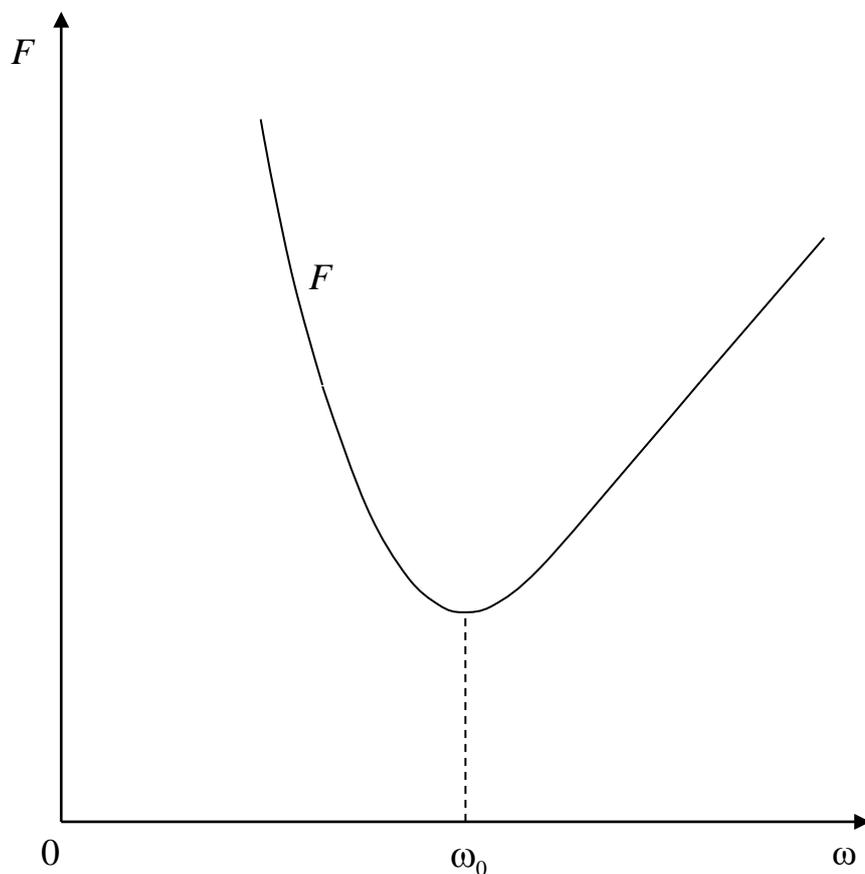


Рис. 2. –Антирезонанс сил

Последовательное соединение и источник скорости. Резонанс скоростей

Порядок рассуждений такой же, как в п. 1.

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) –

$$\dot{F} = \frac{\dot{V}}{y} = \frac{V}{y} e^{-i\varphi} = F e^{-i\varphi}. \quad (36)$$

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента –

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = V_m e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (37)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента –

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = V_k e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (38)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента

$$- \dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{-i\varphi} = V_r e^{-i\varphi}. \quad (39)$$

Разумеется,
$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}. \quad (40)$$

Из (37) следует выражение для комплексной амплитуды импульса –

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = m \frac{1}{\omega m} F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = \frac{F}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = P e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (41)$$

Из (38) следует выражение для комплексной амплитуды производной силы (специального названия не имеет, приводится здесь как дуальный аналог преобразования (16)) –

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = k \frac{\omega}{k} F e^{i(\pi/2-\varphi)} = \omega F e^{i(\pi/2-\varphi)} = B e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (42)$$

Это соответствует преобразованию

$$kv = k \frac{dx}{dt} = \frac{d(kx)}{dt} = \frac{dF}{dt} = B. \quad (43)$$

Разумеется,
$$B = \omega F = \omega^2 P. \quad (44)$$

Из (36)–(42) и (7) – (9) следуют амплитудно-частотные характеристики

$$V_m(\omega) = \frac{V}{\omega m \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad P(\omega) = \frac{V}{\omega \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (45)$$

$$V_r(\omega) = \frac{gV}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (46)$$

$$V_k(\omega) = \frac{\omega V}{k\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad B(\omega) = \frac{\omega V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}. \quad (47)$$

Разумеется,
$$V = \sqrt{V_r^2 + (V_k - V_m)^2} \quad (48)$$

Графики функций $P(\omega)$, $F(\omega)$, $B(\omega)$ ведут себя качественно также как, соответственно, $V_m(\omega)$, $V_r(\omega)$, $V_k(\omega)$.

Частота ω_m , на которой функции $P(\omega)$ и $V_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия
$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - mk/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - x_w^2/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^2/2}. \quad (49)$$

$$V_{m\max} = V_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad P_{m\max} = P_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} Vm = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0, \quad (50)$$

где $P_0 = P(0) = Vm$ – постоянный импульс (при нулевой частоте).

Частота ω_r , на которой функции $F(\omega)$ и $V_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна
$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

$$V_{r\max} = V_r(\omega_0) = V, \quad F_{\max} = F(\omega_0) = \frac{V}{g}. \quad (51)$$

Частота ω_k , на которой функции $B(\omega)$ и $V_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия
$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - km/(2r^2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - Q^2/2}}. \quad (52)$$

$$V_{k \max} = V_k(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad B_{\max} = B(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V k = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} B_0, \quad (53)$$

где $B_0 = B(0) = V k$ – постоянная производная силы (при нулевой частоте).

При $Q^2/2 > 1$ функции $P(\omega)$, $B(\omega)$, $V_m(\omega)$, $V_k(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что
$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2, \quad (54)$$

$$V_{k \max} = V_{m \max}, \quad (55)$$

$$B_{\max} = \omega_0^2 P_{\max}, \quad (56)$$

$$\frac{B_{\max}}{\omega_k} = \omega_m P_{\max} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{1 - Q^2/4}}. \quad (57)$$

Другие характерные точки:

$$V_m(\omega_k) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad P(\omega_k) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0, \quad (58)$$

$$V_k(\omega_m) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad B(\omega_m) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} B_0, \quad (59)$$

$$V_m(\omega_0) = d \cdot V, \quad P(\omega_0) = d \cdot P_0, \quad V_k(\omega_0) = d \cdot V, \quad B(\omega_0) = d \cdot B_0, \quad (60)$$

$$V_r(\omega_k) = V_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - Q^2/2}}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad F(\omega_k) = F(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - Q^2/2}}{\sqrt{1 - Q^2/4}} \frac{V}{g} = \frac{\sqrt{1 - Q^2/2}}{\sqrt{1 - Q^2/4}} F(\omega_0). \quad (61)$$

Характерные отношения:

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_m(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_k(\omega_k)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_m(\omega_k)} = \frac{P(\omega_m)}{P(\omega_k)} = \frac{B(\omega_k)}{B(\omega_m)} = \frac{1}{1-d^2/2}, \quad (62)$$

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/2}}, \quad (63)$$

$$\frac{V_k(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = d\sqrt{1-Q^2/2}. \quad (64)$$

Амплитуда импульса P имеет максимум на частоте ω_m ($\omega_m < \omega_0$), амплитуда силы F – на частоте ω_0 , амплитуда производной силы B – на частоте ω_k ($\omega_k > \omega_0$).

Амплитуда скорости инертного элемента V_m имеет максимум на частоте ω_m , амплитуда скорости изменения длины упругого элемента V_k – на частоте ω_k .

На частоте ω_0 имеет место *резонанс скоростей, при котором (реактивные) скорости V_m и V_k равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю* [3].

Величина адмитанса механической системы $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$, характеризующего ее свойство *не оказывать* сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, на частоте ω_0 имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу максимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

Для системы с параметрами, отличающимися от параметров второй тем, что $r = 40 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}$, *подлинные резонансные кривые полностью совпадают с*

изображенными на рис. 1 при заменах $F_k \rightarrow V_m$, $F_m \rightarrow V_k$, $F_r \rightarrow V_r$, $\omega_k \rightarrow \omega_m$, $\omega_m \rightarrow \omega_k$.

С другой стороны, имея в виду рис. 1, можно вести речь о трех резонансных частотах: ω_m , ω_k и ω_0 . На первой имеет место *резонанс скорости инертного элемента*, на второй – *резонанс скорости изменения длины упругого элемента*, на третьей – *резонанс скорости изменения длины резистивного элемента*.

Последовательное соединение и источник силы. Антирезонанс скоростей

Порядок рассуждений такой же, как в п. 2.

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента –

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i\pi/2} = V_m e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента –

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i\pi/2} = V_k e^{i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{i0} = V_r e^{i0}.$$

Разумеется, $\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}$.

Комплексная амплитуда импульса –

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i\pi/2} = m \frac{1}{\omega t} F e^{-i\pi/2} = \frac{F}{\omega} e^{-i\pi/2} = P e^{-i\pi/2}. \quad (65)$$

Комплексная амплитуда производной силы –

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k F e^{i\pi/2} = k \frac{\omega}{k} F e^{i\pi/2} = \omega F e^{i\pi/2} = B e^{i\pi/2} \quad (66)$$

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) – $\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = Fye^{i\varphi} = Ve^{i\varphi}$.

Амплитудно-частотная характеристика $V(\omega) = F\sqrt{g^2 + (\omega/k - 1/(\omega m))^2}$.

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $V(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (2) порождает чрезмерный импульс (65), сопровождаемый, соответственно, чрезмерной скоростью инертного элемента. При сверхвысоких частотах условие (2) порождает чрезмерную производную силы (66) и чрезмерную скорость изменения длины упругого элемента. При ω_0 график проходит через *минимум* $V_{\min} = V(\omega_0) = Fg = V_r$. Имеет место *антирезонанс скоростей, при котором (реактивные) скорости V_m и V_k равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю.*

Для системы, отличающейся от третьей тем, что $F = 100$ Н, *подлинная* антирезонансная кривая *полностью совпадает* с изображенной на рис. 2 при замене $F \rightarrow V$.

Заключение

Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности, позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем (п.п. 1 и 3, 2 и 4 являются дуально инверсными). Громоздкие и трудоемкие операции, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями.

В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении (1) и понятие о механических реактансе, резистансе, импедансе, сассептансе, кондактансе и адмитансе.

С помощью этого метода получены новые результаты, в т. ч., (14), (17)–(33), (40)–(64).

В дополнение к классическому методу рассмотрены последовательное соединение механических элементов и источник скоростей.

Классическое рассмотрение доставляет одну амплитудно-частотную характеристику, символический (комплексный) метод – восемь при значительно большем числе характерных точек и характерных отношений.

Установлено, что вопреки классическому подходу резонансной частотой является исключительно ω_0 (а не ω_k). Другими словами, резонансная частота не сдвигается от частоты свободных колебаний. Это обусловлено тем, что при классическом рассмотрении не установлена симметрия частот (23), (54), а при символическом она очевидна.

С другой стороны, можно вести речь о трех резонансных частотах: ω_k , ω_m и ω_0 . На первой имеет место *резонанс упругой силы и резонанс скорости изменения длины упругого элемента*, на второй – *резонанс инертной силы и резонанс скорости инертного элемента*, на третьей – *резонанс резистивной силы и резонанс скорости изменения длины резистивного элемента*.

Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей, которые не были определены классическим методом. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника силы, либо последовательного соединения и источника скорости. Антирезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения и источника скорости, либо последовательного соединения и источника силы.

Для всех описанных случаев *фазо-частотные* характеристики особой оригинальностью не отличаются и поэтому не рассматриваются.

Библиографический список

1. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119888>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
2. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
3. Попов И.П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 4 (47). С. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)

4. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
5. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
6. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
7. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
8. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
9. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>

10. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
11. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
12. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
13. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
14. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
15. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>

16. Благодырёва О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
17. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
19. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>
20. Яворский Б.М. Детлаф А.А. Справочник по физике. - М.: Наука, 1980. - 512 с.

Sources of force and velocity, resonances and anti-resonances

Popov I.P.

Kurgan State University, 63/4, Sovetskaya str., Kurgan, 640020, Russia

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Abstract

The article considers parallel and series connections of a mechanical system's elements with a source of harmonic force, or a source of harmonic velocity as a source of the external mechanical harmonic impact. A crank-and-yoke drive and a flywheel with a large moment of inertia can be the source of harmonic velocity. The source of the harmonic force can be represented by the rod of the pneumatic cylinder, which cavity can be in communication with the cavity of another pneumatic cylinder, which diameter is immeasurably higher than that of the first one, and which piston performs harmonic oscillations. The mechanical harmonic impacts, described in the courses of theoretical mechanics, correspond to the source of harmonic force. The article describes the four modes, namely resonances and anti-resonances of forces and velocities. The symbolic (complex) method implementation has significantly simplified the study of resonance and near-resonance phenomena, particularly, it allowed deeply unify and formalize consideration of various mechanical systems. The cumbersome and time-consuming operations associated with the preparation and solution of differential equations have been replaced by simple algebraic transformations. This method is based on the mechanical analogue of Ohm's law in a complex representation and the concept of mechanical reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance and admittance. The classical consideration delivers one

amplitude-frequency characteristic, while the symbolic (complex) method delivers eight ones with a significantly larger number of characteristic points and characteristic ratios. Resonance and anti-resonance of forces, resonance and anti-resonance of velocities were determined. Resonances stem from the combinations of parallel connection of elements and a source of harmonic force, or a series connection of elements and a source of harmonic speed. Anti-resonances occur due to the combination of parallel connection of elements and a harmonic velocity source, or their series connection and a harmonic force source.

Keywords: source of force, source of velocity, series connection, parallel connection, resonance, anti-resonance.

References

1. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
2. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*. 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
3. Popov I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2019, no. 4 (47), pp. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)
4. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>

5. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
6. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
7. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
8. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
9. Aleroeva H.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>
10. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
11. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
12. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
13. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
14. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>

15. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
16. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>
17. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
18. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
19. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>
20. Yavorskii B.M. Detlaf A.A. *Spravochnik po fizike* (Physics reference), Moscow, Nauka, 1980, 512 p.