

УДК 629.78

Оптимизация траектории КА с ЭРДУ к Юпитеру с гравитационным маневром в рамках задачи трех тел

Константинов М.С., Нгуен Диен Нгок

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: mkonst@bk.ru

e-mail: bauman252@mail.ru

Аннотация

Проводится оптимизация траектории межпланетного перелёта при использовании схемы полёта, когда на первом гелиоцентрическом этапе перелета (после выхода КА из грависферы Земли с некоторым гиперболическим избытком скорости) электроракетная двигательная установка обеспечивает встречу КА с Землей для гравитационного маневра у неё. На последующих этапах полета (после этого гравитационного маневра у Земли) не предполагается использование маршевого двигателя. Вся траектория КА (от старта с околоземной орбиты до подлета к планете назначения (Юпитеру)) анализируется в рамках ограниченной задач трех тел (Земля – Солнце – КА). Задача оптимизации траектории гелиоцентрического перелета космического аппарата формулируется с использованием принципа максимума Понтрягина. Анализируемая транспортная космическая система базируется на ракете-носителе «Протон М», химическом разгонном блоке «Бриз М» и электроракетной двигательной установке, использующей стационарные плазменные двигатели СПД-140Д. Новизна настоящего исследования связана с разработкой методики оптимизации траектории межпланетного перелета КА с ЭРДУ при использовании гравитационного маневра у Земли в рамках задач трех тел. Производится сравнительный анализ результатов,

полученных в рамках задач трех тел, с результатами, полученными с использованием метода грависфер нулевой протяженности.

Ключевые слова: космический аппарат, Юпитер, оптимизация траектории перелета, гравитационный маневр, условия трансверсальности

Список сокращений

КА – космический аппарат

ХРБ – химический разгонный блок

ЭРДУ - электроракетная двигательная установка

МГНП - Метод грависфер нулевой протяженности

ГЭСК - гелиоцентрическая эклиптическая система координат

СК – система координат

Введение

В данной работе проводится оптимизация траектории полета КА с ЭРДУ к Юпитеру с гравитационным маневром у Земли. Проблеме оптимизации траектории межпланетного КА с ЭРДУ посвящено много публикаций (например, [1-4]). В настоящей работе (в отличие от приведенных в ссылке, где используется МГНП) межпланетная траектория анализируется в рамках ограниченной задачи трех тел. Задача оптимизации траектории гелиоцентрического перелета КА формулируется с использованием принципа максимума Понтрягина [5]. Среди оптимизируемых программ управления движением КА на межпланетном перелете мы рассматриваем: программу включения – выключения ЭРДУ и программу, определяющую ориентацию вектора тяги ЭРДУ на гелиоцентрическом участке траектории перелета Земля - Земля.

Критерием оптимальности рассматривается масса КА, доставляемая в окрестность планеты назначения (конечная масса КА). Эта масса максимизируется. Задача оптимизации траектории межпланетного перелета сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью формализма принципа максимума. Для решения краевой задачи используется метод продолжения по параметру в варианте, описанном в [6].

1. Исследуемая транспортная система и схема полета КА к Юпитеру

Предполагается, что ракета-носитель «Протон М» выводит КА на низкую околоземную орбиту. Химический разгонный блок «Бриз М» обеспечивает старт КА с этой орбиты и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли. После первых суток полета химический разгонный блок отделяется от КА, раскрываются панели солнечных батарей, обеспечивающих работу ЭРДУ. Считается, что после этого ЭРДУ может многократно включаться и выключаться на всей гелиоцентрической траектории Земля - Земля. Предполагается, что ЭРДУ использует блок шести параллельно работающих стационарных плазменных двигателей типа СПД-140Д. Тяга двигателей, как и их удельный импульс, предполагаются постоянными. Характеристики каждого двигателя приняты следующими: тяга двигателя 180 мН; удельный импульс 2700 с.

На гелиоцентрическом участке траектории ЭРДУ обеспечивает перелет в окрестность Земли для гравитационного маневра около неё. Предполагается, что после гравитационного маневра у Земли, не используя какого-либо маршевого двигателя, КА достигает окрестность Юпитера. Как уже отмечалось, основной

особенностью настоящего исследование является то, что на всех участках траектория КА рассматривается в рамках задач трех тел.

Вся траектория полета КА состоит из следующих участков:

1. Околоземной участок, начинающийся со старта с низкой околоземной орбиты. Старт обеспечивается химическим разгонным блоком.
2. Гелиоцентрический перелет по маршруту Земля – Земля. Участок реализуется с использованием ЭРДУ.
3. Гравитационный маневр у Земли.
4. Гелиоцентрический участок полета Земля – Юпитер. На этом участке не используется какой-либо маршевый двигатель. Участок заканчивается попаданием КА в окрестность Юпитера.

Схема полета КА пояснена на рисунке 1. *Участок старта КА от Земли* заканчивается на метке «А» схемы. Основными выбираемыми характеристиками этого участка являются: дата старта t_0 , долгота восходящего узла орбиты старта Ω , аргумент широты точки старта с орбиты старта w , разгонный импульс скорости ΔV , который обеспечивает старт КА с орбиты старта. Заметим, что наклонение стартовой орбиты не выбирается. Оно считается известным для используемого космодрома и ракеты-носителя. Дата окончание этого участка условно принимается равной дате старта плюс пять суток. По перечисленным характеристикам определяются радиус вектор r_A и вектор скорости V_A КА в конечный момент t_1 . А так же масса КА в этот момент.

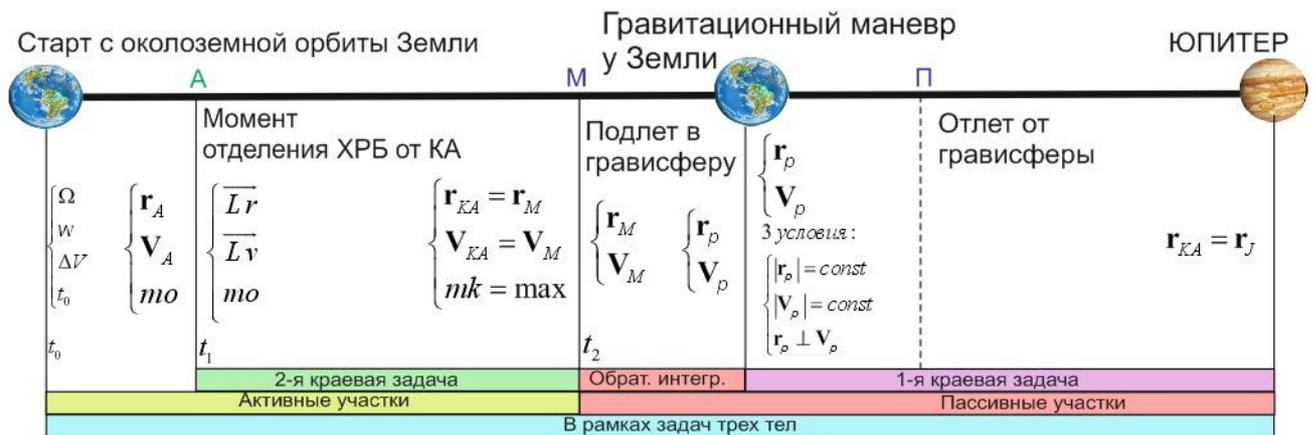


Рисунок 1 - Схема полета КА с околоземной орбиты в окрестность Юпитера

Участок гелиоцентрического перелета Земля - Земля, начинается с метки «А»

и заканчивается меткой «М» на приведенной схеме. На этом участке траектории находится с использованием необходимых условий оптимальности принципа максимума. Нахождение траектории сводится к решению краевой задачи. Неизвестными параметрами краевой задачи являются вектора сопряженных переменных (λ_r, λ_v) к радиусу вектору КА и к вектору его скорости в точке «А» схемы. Их выбор фиксирует программу управления движением на рассматриваемом участке траектории, саму траекторию и условия встречи КА с Землей для гравитационного маневра около неё.

Участок гравитационного маневра у Земли, начинается с метки «М» и заканчивается меткой «Р» на приведенной схеме. На этом участке не предполагается работа какого-либо двигателя. Поэтому вся траектория определяется условиями движения (временем, положением КА и его скоростью) в начальной точке рассматриваемого участка. Эти условия определяют в частности важнейшие характеристиками этого участка: минимальную высоту пролета Земли (она

ограничивается снизу высотой 400 км) и условия движения (скорость и положение) в конечной точке рассматриваемого участка.

Участок гелиоцентрического перелета Земля - Юпитер является последним участком траектории. Он начинается с метки «П» и заканчивается Юпитером на приведенной схеме. На этом участке траектории не предполагается использования маршевых двигателей. В нулевом приближении он исследуется с помощью решения задачи Ламберта.

2. Постановка задачи оптимизации гелиоцентрического перелета КА к Юпитеру с ЭРДУ

Рассмотрим задачу оптимизации траектории полета КА к Юпитеру с ЭРДУ с гравитационным маневром у Земли в рамках задачи трех тел. Требуется найти (оптимизировать) следующие характеристики:

- дату старта КА;
- долготу восходящего узла околоземной орбиты и аргумент широты точки старта КА с неё;
- величину разгонного импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты;
- время перелета от Земли до встречи КА с Землёй для гравитационного маневра у Земли (точка «М» на схеме рисунка 1);
- момент пролета минимальной высоты над Землей при гравитационном маневре у Земли;
- время перелета от Земли (после гравитационного маневра) до Юпитера;
- программу включения – выключения электроракетного двигателя на гелиоцентрическом участке траектории перелета Земля - Земля;
- программу ориентации вектора тяги ЭРДУ на активных участках полета КА.

Критерием оптимальности рассматривается конечная масса КА, доставляемая в окрестность Юпитера. Она максимизируется.

3. Модель движения КА

Движение КА на гелиоцентрическом участке траектории рассматривается под действием трех сил: гравитационной силы притяжения КА Солнцем, гравитационной силы притяжения КА Землей и силы тяги ЭРДУ. Величина тяги и удельный импульс включенной ЭРДУ считаются постоянными. Гравитационные поля притягивающих тел считаются центральными ньютоновскими.

Система уравнений движения КА в гелиоцентрической эклиптической системе координат (ГЭСК), используя безразмерные переменные (за единицу расстояния принята астрономическая единица, за единицу ускорения принято гравитационное ускорение от Солнца на расстоянии одной астрономической единицы), может быть записана так:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r}_E}{|\mathbf{r}_E|^3} + \frac{a_{ob} \cdot \delta}{1 - \frac{a_{ob}}{w_b} t_M} \cdot \mathbf{e}$$

$$\frac{dt_M}{dt} = \delta,$$

где \mathbf{r} - радиус вектор КА (безразмерный) в ГЭСК; \mathbf{V} - вектор гелиоцентрической скорости КА (безразмерный); \mathbf{e} - орт вектора реактивной тяги; δ - функция включения-выключения двигателя ($\delta = 1$ при включенной ЭРДУ, и $\delta = 0$ при неработающей ЭРДУ); a_{ob} - безразмерная величина начального реактивного

ускорения; w_b - безразмерный удельный импульс ЭРДУ; t_m - безразмерное моторное время; \mathbf{r}_E - радиус вектор Земли (безразмерный) в ГЭСК; $k = \frac{fME}{fM}$; (fME - гравитационная постоянная Земли, fM - гравитационная постоянная Солнца).

Задача состоит в нахождении оптимальных программ $\delta(t)$ и $\mathbf{e}(t)$, обеспечивающих выполнение граничных условий для системы уравнений движения и доставляющих максимум конечной массы КА. Функция Гамильтона может быть записана в следующем виде:

$$H = \left(\lambda \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) + \left(\lambda \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) + \lambda t_m \cdot \frac{dt_m}{dt}$$

$$= \left(\lambda \mathbf{v}, \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r}_E}{r_E^3} + \frac{a_{ob} \cdot \delta}{1 - \frac{a_{ob}}{w_b} t_m} \cdot \mathbf{e} \right) \right) + (\lambda \mathbf{r}, \mathbf{V}) + \lambda t_m \cdot \delta,$$

где $\lambda \mathbf{r}$, $\lambda \mathbf{V}$ - вектора, сопряженные векторам положения и скорости КА;

λt_m - сопряженная к моторному времени переменная.

Оптимальное управление находится из условия максимума гамильтониана H по управлениям δ и \mathbf{e} :

$$\mathbf{e}^{opt} = \frac{\lambda \mathbf{v}}{\lambda v}, \quad \delta^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Pi > 0; \\ 0, & \text{если } \Pi \leq 0. \end{cases}$$

где $\lambda v = |\lambda \mathbf{v}|$,

$\Pi = \frac{a_{ob}}{1 - \frac{a_{ob}}{w_b} t_m} \cdot \lambda v + \lambda t_m$ - функция переключения двигателя.

Производные по времени от сопряженных переменных получаем дифференцированием гамильтониана по фазовым переменным. После этого полная

система уравнений, включающая уравнения для фазовых и сопряженных переменных, может быть представлена в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} - k \cdot \frac{\mathbf{r}_E}{|\mathbf{r}_E|^3} + \frac{a_{ob} \cdot \delta}{1 - \frac{a_{ob}}{w_b} t_m} \cdot \frac{\lambda \mathbf{v}}{\lambda v} \\ \frac{dt_m}{dt} = \delta, \\ \frac{d\lambda \mathbf{v}}{dt} = -\lambda \mathbf{r}; \\ \frac{d\lambda \mathbf{r}}{dt} = \frac{\lambda \mathbf{v}}{r^3} + k \cdot \frac{\lambda \mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} - \frac{3 \cdot \mathbf{r} \cdot \lambda v_{XYZ}}{r^5} - \frac{3 \cdot k \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_E) \cdot \lambda v_{XYZE}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^5}; \\ \frac{d\lambda t_m}{dt} = -\frac{a_{ob}^2}{\left(1 - \frac{a_{ob}}{w_b} t_m\right)^2} \cdot \frac{\lambda v}{w_b} \cdot \delta. \end{array} \right.$$

где $\lambda V_{XYZ} = \lambda V_X \cdot x + \lambda V_Y \cdot y + \lambda V_Z \cdot z$;

$\lambda V_{XYZE} = \lambda V_X \cdot (x - x_E) + \lambda V_Y \cdot (y - y_E) + \lambda V_Z \cdot (z - z_E)$.

4. Общий алгоритм проектирования межпланетной траектории. Этапы анализа. Формулировка краевой задачи на каждом из этапов анализа

Проектировать траекторию межпланетного перелета в рамках задачи трех тел без предварительного анализа задачи межпланетного перелета с использованием метода грависфер нулевой протяженности, с нашей точки зрения, если не невозможно, то, по крайней мере, нерационально. Начальное приближение для важнейших характеристик схемы межпланетного перелета следует найти, используя идею грависфер. К таким характеристикам, в частности следует отнести все характерные даты, характеристики базовой околоземной орбиты и точки схода с

неё, положение и скорость КА в момент максимального сближения КА с Землей при гравитационном маневре около неё. Поэтому на первом этапе проектирования рассматриваемой межпланетной траектории мы используем метод грависфер нулевой протяженности.

4.1 Формулировка задачи проектирования межпланетной траектории в рамках метода грависфер нулевой протяженности

Неизвестными характеристиками при проектировании рассматриваемого межпланетного перелета с маршрутом Земля - Земля - Юпитер в рамках метода грависфер нулевой протяженности рассматриваются следующие характеристики:

- дата старта от Земли;
- дата проведения гравитационного маневра у Земли;
- дата подлёта КА к Юпитеру;
- величина разгонного импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты;
- вектор, сопряженный к радиусу вектору КА, в начале гелиоцентрического участка траектории Земля - Земля;
- вектор, сопряженный к вектору гелиоцентрической скорости КА, в начале гелиоцентрического участка траектории Земля - Земля;

Заметим, что значение сопряженной к моторному времени переменной в начальной точке гелиоцентрического участка траектории, учитывая однородность сопряженной системы, примем равным минус 1. Так как эта сопряженная переменная монотонно убывает вдоль оптимальной траектории, то при этом автоматически удовлетворяется необходимое условие оптимальности принципа максимума, которое требует, чтобы в конечной точке траектории сопряженная к минимизируемому моторному времени переменная была не положительна.

Учитывая, что после гравитационного маневра у Земли на траектории перелёта к Юпитеру не предполагается использование маршевого двигателя, анализ этого участка траектории проводится с использованием решения задачи Ламберта. При этом вектора гиперболических избытков скорости отлета от Земли и подлета к Юпитеру оказываются однозначными функциями двух дат: даты гравитационного маневра и даты подлета к Юпитеру. Мы считаем возможным выбирать эти две даты из условия минимизации величины гиперболического избытка скорости при гравитационном маневре у Земли (с учетом ограниченности величины гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру). Такой анализ практически повторяет те операции, которые используются при проектировании прямой схемы межпланетного перелета к планете назначения для КА с традиционными химическими ракетными двигателями.

Таким образом, после анализа в рамках метода грависфер нулевой протяженности участка перелета Земля - Юпитер мы получаем дату гравитационного маневра у Земли, дату подлета к Юпитеру и вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли после гравитационного маневра у неё. Разумеется, отмеченные даты принципиально могут уточняться на последующих этапах исследования, когда межпланетная траектория будет анализироваться в рамках задачи трех тел. Отметим, что при этом теряет смысл само понятие вектора гиперболического избытка скорости.

После того, как мы описали алгоритм анализа участка траектории Земля - Юпитер в рамках метода грависфер нулевой протяженности, опишем алгоритм анализа первого участка гелиоцентрической траектории - траектории Земля - Земля.

Неизвестными параметрами краевой задачи можно считать два сопряженных вектора в начальной точки траектории (вектор, сопряженный к радиусу вектору КА и вектор, сопряженный к вектору гелиоцентрической скорости КА). То есть шесть скалярных неизвестных.

Краевые условия краевой задачи, к которой принцип максимума сводит задачу оптимизации перелета Земля - Земля, рассматривались в следующем виде:

- Три условия по вектору положения КА в момент гравитационного маневра у Земли (гелиоцентрический радиус вектор КА должен быть равен радиусу вектору Земли в момент гравитационного маневра у неё).
- Одно условие, обеспечивающее требуемую величину гиперболического избытка скорости при подлете к Земле для гравитационного маневра у Земли. Эта величина должна быть равна величине гиперболического избытка скорости после гравитационного маневра у Земли. Последняя была найдена ранее из анализа заключительного участка гелиоцентрической траектории полета к Юпитеру.
- Двух условий, связанных с оптимальным направлением гиперболического избытка скорости при подлете к Земле. Эти условия имеют различный вид в зависимости от величины и направления гиперболического избытка скорости после гравитационного маневра у Земли.

Последние два условия имеют различный вид, так как являются условиями трансверсальности, связанными с ограничением типа неравенства. Суть ограничения такова: угол между векторами гиперболического избытка скорости при подлете к планете и отлете от неё (при гравитационном маневре) не может быть больше некоторого угла β_{\max} . Этот угол зависит от величины гиперболического избытка скорости V_{∞} и от характеристик планеты (минимально допустимого

радиуса перигея пролетной гиперболы r_{min} и гравитационного параметра Земли):

$$\beta_{\text{max}} = 2 \arcsin\left(1 + \frac{r_{\text{min}} V_{\infty}^2}{fME}\right)^{-1}.$$

А) Если угол поворота асимптоты гиперболы (угол между векторами гиперболического избытка скорости при подлете к Земле и отлете от Земли) меньше максимального допустимого значения, условия трансверсальности таковы:

- Коллинеарность вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Земле $[V_{\infty x}^-, V_{\infty y}^-, V_{\infty z}^-]$ и вектора, сопряженного к вектору скорости КА при подлете к Земле $[\lambda_{V_x}(t_E), \lambda_{V_y}(t_E), \lambda_{V_z}(t_E)]$. Это два скалярных условия:

$$\frac{V_{\infty x}^-}{\lambda_{V_x}(t_E)} = \frac{V_{\infty y}^-}{\lambda_{V_y}(t_E)} = \frac{V_{\infty z}^-}{\lambda_{V_z}(t_E)}.$$

Б) Если угол поворота асимптоты гиперболы равен максимально допустимому углу, то условие трансверсальности таково:

- Скалярное условие принадлежности вектора, сопряженного к вектору скорости КА при подлете к Земле, плоскости гравитационного маневра:

$$(\lambda_V(t_E), [\mathbf{V}_{\infty}^- \times \mathbf{V}_{\infty}^+]) = 0.$$

В последнем соотношении верхние индексы "плюс" и "минус" обозначают вектора гиперболического избытка скорости до и после гравитационного маневра. С учетом условия на величину радиуса перигея гиперболы пролета, как и в предыдущем случае «А», записанное условие трансверсальности фиксирует шесть краевых условий шести параметрической краевой задачи.

Метод решения описанной краевой задачи базируется на идее продолжения по параметру, описанному в [6]. Её решение позволяет найти оценку основных характеристик схемы перелета. Эти оценки используются как начальное

приближение при проектировании межпланетной траектории в рамках задачи трех тел. По вектору гиперболического избытка скорости при старте от Земли и фиксированному наклонению базовой низкой околоземной орбиты (используя соотношения, например из [7]) находится долгота восходящего узла базовой околоземной орбиты и аргумент широты точки старта с неё.

По векторам гиперболического избытка скорости до и после гравитационного маневра у Земли находится радиус вектор перигея гиперболы пролета Земли при гравитационном маневре:

$$\mathbf{r}_\pi = \frac{\mathbf{V}_\infty^- - \mathbf{V}_\infty^+}{|\mathbf{V}_\infty^- - \mathbf{V}_\infty^+|} \times \left(\frac{1}{\sin(\beta/2)} - 1 \right) \times \frac{fME}{V_\infty^2},$$

и вектор геоцентрической скорости КА в перигее гиперболы пролёта \mathbf{V}_π . В последнем приведенном соотношении β - угол поворота асимптоты гиперболы при гравитационном маневре у Земли.

4.2 Формулировка задачи проектирования межпланетной траектории в рамках задачи трех тел

Как и в предыдущем разделе, анализ начинаем с исследования заключительного участка межпланетной траектории (участка Земля - Юпитер). На нем нужно удовлетворить условия попадания КА в окрестность Юпитера. Формулируется следующая краевая задача:

Краевыми условиями являются условия попадания КА (его радиус вектор в конечной точке траектории перелета $\mathbf{r}(T_f)$) в окрестность Юпитера (радиус вектор Юпитера в момент T_f подлета КА к нему обозначим \mathbf{r}_J): $f(z) = [\mathbf{r}(T_f) - \mathbf{r}_J] = 0$.

Неизвестными начальными условиями можно рассматривать компоненты радиуса вектора \mathbf{r}_p и вектора скорости \mathbf{V}_p в перигее гиперболы пролёта Земли. На шесть компонент этих двух векторов накладываем следующие три условия:

$$|\mathbf{r}_p| = const = |\mathbf{r}_\pi|; \quad |\mathbf{V}_p| = const = |\mathbf{V}_\pi|; \quad \mathbf{r}_p \perp \mathbf{V}_p.$$

То есть, фиксируем высоту перицентра гиперболы пролета Земли при гравитационном маневре и модуль скорости КА в перицентре. При этом рассматриваемая двух точечная краевая задача имеет третий порядок. Траектория анализируется в рамках ограниченной задачи трех тел Солнце - Земля - КА. Интегрирование ведется в ГЭСК. В результате решения краевой задачи находятся условия движения КА в перигее гиперболы пролета при гравитационном маневре.

На следующем этапе исследования, используя полученные условия движения в перигее гиперболы пролета Земли, как начальные условия для интегрирования в обратном времени уравнений движения КА. Временной интервал интегрирования выбран равным Δt (например, двум суткам): от момента прохождения перигея (t_p) до момента t_2 ($t_2 = t_p - \Delta t$). В результате интегрирования получаем условия движения КА при его подлете к Земле для гравитационного маневра у неё. Обозначим гелиоцентрический радиус КА и вектор его гелиоцентрической скорости в момент t_2 как \mathbf{r}_M и \mathbf{V}_M .. Эти характеристики будем рассматривать как конечные при анализе участка траектории КА на маршруте Земля – Земля.

ХРБ обеспечивает старт КА с базовой околоземной орбиты и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли. Обозначим начальное положение КА на гиперболе отлета в гелиоцентрической системе координат как $\mathbf{r}(t_0)$, а вектор

скорости КА в этот момент времени - $\mathbf{V}(t_0)$. Предполагается, что вскоре ХРБ отделяется от КА, затем раскрываются панели солнечных батарей и обеспечиваются условия для работы ЭРДУ, например, через 5 суток полета. Этот момент времени обозначим t_1 . Радиус-вектор и вектор скорости КА в момент t_1 ($\mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{V}(t_1)$) находятся численным интегрированием уравнений движения на интервале времени $[t_0...t_1]$. Начальные условия для интегрирования принимаем такими, какими они получены в рамках метода грависфер нулевой протяженности. Масса КА в момент t_1 считается равной массе КА после отделения ХРБ и обозначается m_0 . Таким образом, определяются начальные условия для вектора фазовых координат КА.

Краевыми условиями в конечной точке траектории перелета Земля - Земля являются найденные ранее компоненты радиуса вектора \mathbf{r}_M и вектора скорости \mathbf{V}_M в точке подлета КА к Земле для гравитационного маневра у неё:

$$f(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_M \\ \mathbf{V}(t_2) - \mathbf{V}_M \end{bmatrix} = 0.$$

Вектор неизвестных этой краевой задачи z состоит из 6 скалярных сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории.

5. Анализ численных результатов оптимизации траектории полета к Юпитеру для рассматриваемой транспортной космической системы

Были проанализированы 5 эпох запуска КА. Для рассматриваемой задачи окна запуска оказываются разделенными синодическим периодом Юпитера. Как известно этот период равен приблизительно 13-ти месяцев. Были рассмотрены даты гравитационного маневра у Юпитера в диапазоне 2018...2022 годов.

Для всех рассмотренных эпох запуска дат КА оснащался ЭРДУ с использованием 6 параллельно работающих двигателей СПД-140Д. Фиксировалась и величина импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты. Считалось, что этот импульс обеспечивает гиперболический избыток скорости 1500 м/с. При этом, после отделения ХРБ масса КА равна 6205 кг. Критерием оптимальности - минимум моторного времени (что эквивалентно в настоящей постановке максимуму конечной массы КА).

В таблице 1 приведены характеристики гелиоцентрической траектории КА Земля - Юпитер после гравитационного маневра у Земли для разных эпох прибытия КА в окрестность Юпитера.

Таблица 1 - Характеристики гелиоцентрической траектории КА Земля - Юпитер после гравитационного маневра у Земли для разных эпох прибытия КА в окрестность Юпитера

Дата гравитационного маневра у Земли	Время перелета на участке Земля-Юпитер	Гиперболический избыток скорости после гравитационного маневра у Земли	Угловая дальность полета Земля - Юпитер
	сутки	м/с	градусы
14.02.2018	980	10 488	155,46
20.03.2019	870	11 034	146,84
24.04.2020	850	11 084	146,08
28.05.2021	800	10 867	145,43
27.06.2022	800	9 951	152,52

Анализ данных, приведенных в таблице 1, показывает, что для перелета к Юпитеру без использования маршевого двигателя на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитер требуется, чтобы величина гиперболического избытка скорости при отлете от Земли была довольно большой (9951 м/с ...10488 м/с). Такую величину гиперболического избытка скорости обеспечить при старте с базовой орбиты

многоступенчатым ХРБ практически невозможно (точнее, массовые характеристики такого КА будут плохими). В настоящей работе такие гиперболические избытки скорости предлагается реализовать за счет использования на начальном этапе межпланетного перелета гелиоцентрического участка траектории Земля – Земля и реализации гравитационного маневра у Земли.

Для каждой даты гравитационного маневра у Земли (приведенной в таблице 1) были найдены компоненты вектора гиперболического избытка скорости после гравитационного маневра у Земли, обеспечивающие полет КА к Юпитеру. Используя МГНП, была спроектирована гелиоцентрическая траектория КА на маршруте Земля – Земля. Найден вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Земле. Что дало возможности найти вектор гелиоцентрической скорости КА в перигее гиперболы пролета при гравитационном маневре, обеспечивающие полет КА к Юпитеру для разных эпох осуществления гравитационного маневра у Земли. Одновременно находился радиус вектор перигея гиперболы пролёта Земли в ГЭСК и величина геоцентрической скорости КА в упомянутом перигее.

Затем характеристики гравитационного маневра уточнялись для модели движения КА, использующего решение задачи трех тел. Сравнительный анализ полученных характеристик для даты гравитационного маневра 14.02.2018 приведен в таблице 2.

Из приведенных в таблице характеристик видно, что решение, полученное в рамках задачи трех тел, совсем близко к решению, полученному в рамках МГНП. Траектория КА очень чувствительна к характеристикам КА при гравитационном маневре у Земли. Что вполне объяснимо.

Таблица 2 - Характеристики траектории КА при гравитационном маневре у Земли 14.02.2018 для этапов анализа, использующих МГНП и задачу трех тел

Этап анализа	Геоцентрическая скорость КА в перигее гиперболы пролёта	Вектор гелиоцентрической скорости КА в перигее гиперболы пролёта Земли в ГЭСК	Радиус вектор перигея гиперболы пролёта Земли в ГЭСК
	км/с	км/с	АЕ
МГНП	15,090380	-32,559151;-22,9123352;-0,964669	-0,80879311;0,56664956;-0,00002012
Задача трех тел	15,089683	-32,559556;-22,922922;-0,965027	-0,80879312;0,56664955;-0,00002012

Для варианта осуществления гравитационного маневра 14.12.2018 представим результаты сравнительного анализа оптимальной траектории спроектированной с использованием МГНП и метода, разработанного для модели задачи трех тел

Для рассматриваемой эпохи оптимальное время полета на участке траектории Земля – Земля оказалось равно 620 суток. (Оно было получено варьированием даты старта). Время перелета на участке траектории Земля – Юпитер 980 суток.

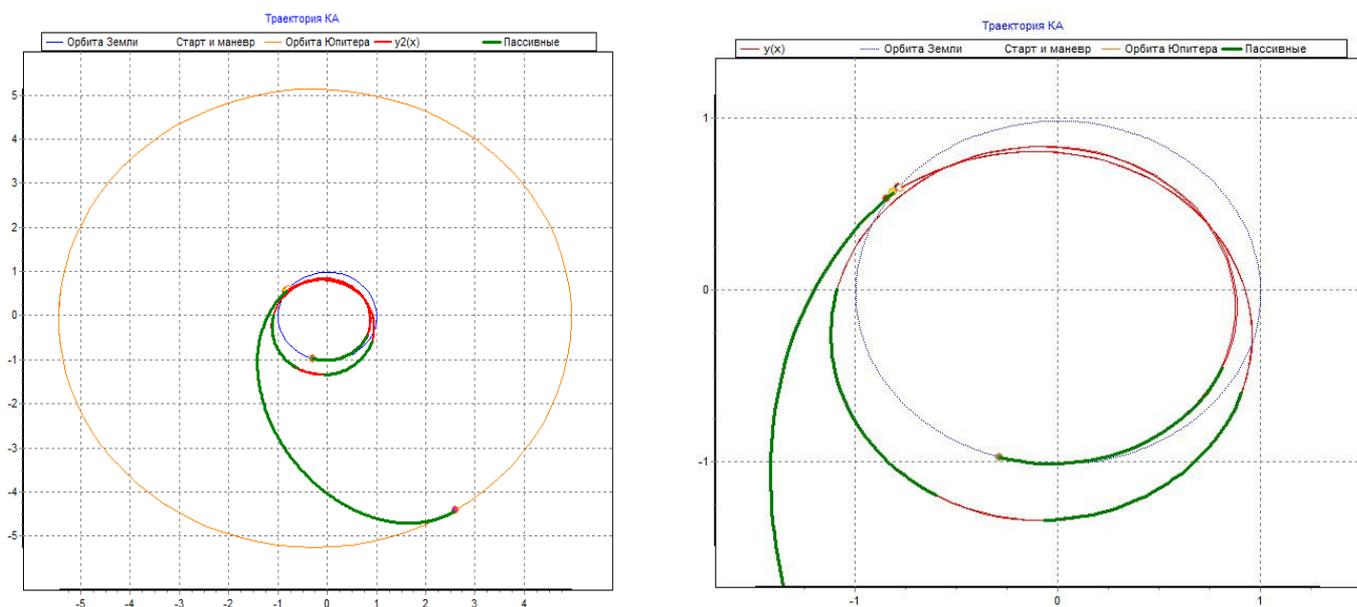


Рисунок 2 - Гелиоцентрическая траектория КА (проекция на плоскость эклиптики). Активные участки траектории Земля – Земля отмечены красным цветом, пассивные – зеленым цветом. Справа показан участок траектории Земля - Земля

На левой части рисунка 2 показана проекция гелиоцентрической траектории Земля – Земля – Юпитер на плоскость эклиптики. Заметить разницу траекторий, полученных разными методами, не удастся даже, если выбрать более крупный масштаб (правая часть рисунка). Активные участки траектории выделены красным цветом. Число активных участков на участке Земля – Земля три, как и пассивных участков. Интересно, что траектория начинается пассивным участком.

Длительности пассивных и активных участков хорошо анализировать, используя рисунок 3. На нем показано изменение функции переключения двигателя. Тогда, когда функция переключения положительна, ЭРДУ включена. Красная линия на рисунке соответствует исследованию траектории в рамках задачи трех тел. Зеленая линия соответствует случаю использования МГНП. Видна небольшая разница в функции переключения в зависимости от используемого метода исследования траектории.

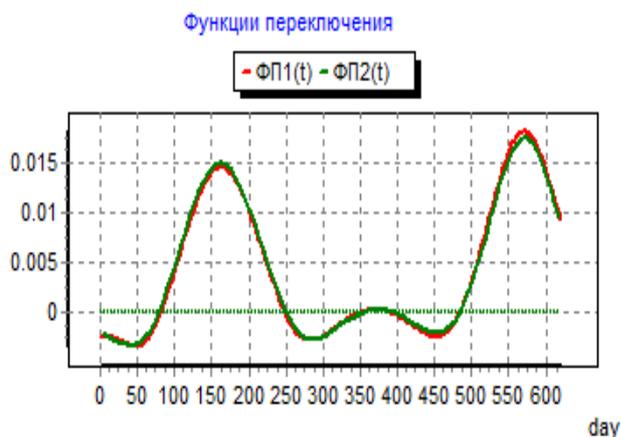


Рисунок 3 - Функция переключения двигателя как функция времени [сутки]
Красная линия - функция переключения в рамках задачи трех тел. Зеленая линия – с использованием МГНП

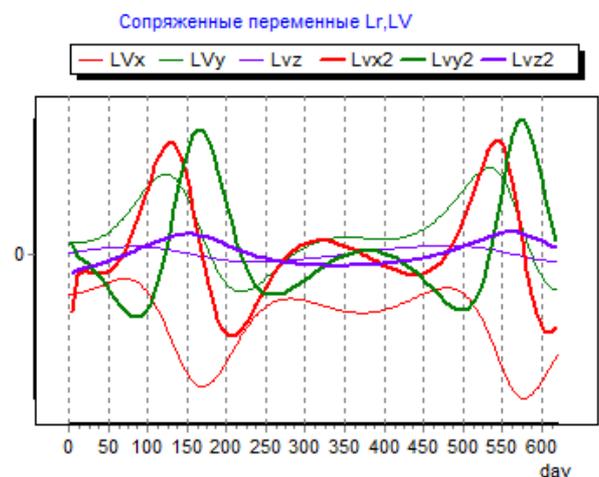


Рисунок 4 – Сопряженные переменные как функции времени [сутки] на траектории перелета
Толстыми линиями обозначены сопряженные переменные в рамках задачи трех тел. Тонкими – с использованием МГНП

Так как функция переключения двигателя слабо изменилась при переходе от МГНП к задаче трех тел (при изменении метода исследования), то и затраты топлива на перелет изменились мало. Масса топлива в рамках МГНП оказалась равна 1180.7 кг, а в рамках задачи трех тел $M_t=1184,5$ кг. Таким образом, переход к более точной модели при исследовании привел для рассматриваемой эпохи старта к увеличению требуемого расхода топлива на 0.32%. То, что затраты топлива на перелет увеличились, (как будет показано для других рассмотренных эпох старта) не является обязательным свойством. Затраты могут и уменьшиться.

Рассмотрение других эпох старта КА проводилось без оптимизации времени перелета Земля – Земля. Гиперболический избыток скорости при старте от Земли принимался равным 1.5 км/с. Найденные в рамках МГНП характеристики при старте от Земли не уточнялись при использовании задачи трех тел.

6. Анализ точности МГНП для рассмотренных вариантов траектории полета

В таблице 3 представлены результаты исследования всех рассмотренных эпох старта. Основной характеристикой таблицы следует считать оценку неточности расчета требуемой массы топлива при использовании МГНП по сравнению с методом, использующим модель задачи трех тел (последний столбец таблицы). Знак минус в этом столбце таблицы свидетельствует о том, что использование МГНП приводит к занижению требуемых затрат ксенона.

Анализ последнего столбца таблицы показывает, что неточность МГНП при оценке требуемой массы ксенона по сравнению с более точной моделью, использующей решение задачи трех тел, не превышает одного процента. Такая неточность для этапа проектирования транспортной космической системы можно

считать допустимой. Поэтому можно утверждать, что проектирование траектории межпланетного КА с ЭРДУ при полете к Юпитеру с гравитационным маневром у Земли в рамках МГНП дает достаточно точную оценку требуемого на перелет топлива и всех массовых характеристик проекта КА с ЭРДУ.

Таблица 3 - Требуемая масса топлива в рамках МГНП и в рамках задач трех тел для разных эпох старта

Дата гравитац. маневра у Земли	Время перелета Земля - Земля	Время перелета Земля - Юпитер	Масса КА в окрестн. Юпитера	Требуемая масса ксенона		Относительное отклонение требуемой массы ксеноны
				в рамках МГНП	в рамках задач трех тел	
	сутки	сутки	Кг	кг	кг	%
14.02.2018	620	980	5020.5	1180.7	1184.5	-0.32%
20.03.2019	500	870	4755.4	1450.8	1449.6	0.08%
24.04.2020	550	850	4854.0	1351.7	1351.0	0.05%
28.05.2021	650	800	4884.6	1307.8	1320.4	-0.96%
27.06.2022	600	800	4814.3	1384.6	1390.7	-0.44%

В четвертом столбце таблицы 3 приведена конечная масса КА (масса КА в момент подлёта к окрестности Юпитера). Приведенные значения соответствуют расчету, приведенному с использованием модели задачи трех тел. Видно, что эта масса достаточно сильно изменяется в зависимости от эпохи старта. Заметим, что из сравнения масс не следует делать вывод о преимуществе одной эпохи старта по отношению к другой. Дело в том, что для всех рассмотренных эпох кроме первой эпохи не проводилась оптимизация времени перелета на маршруте Земля – Земля. Это было сделано специально, чтобы иметь возможность рассмотреть другие структуры оптимальной программы управления движением КА. Так для варианта с датой гравитационного маневра 20.03.2019 траектория Земля – Земля состоит всего из двух активных участков, разделенных небольшим пассивным участком. Траектория оказывается энергонапряженной, что объясняется относительно малым временем перелета Земля – Земля.

Заключение

Новизна настоящего исследования связана с анализом траектории перелета КА в рамках задачи трех тел при оптимизации массы КА, доставляемой в окрестность Юпитера.

В работе предложен метод проектирования траектории межпланетного КА с ЭРДУ и гравитационным маневром у Земли при использовании модели движения КА в рамках ограниченной задачи трех тел. Для оптимизации траектории КА используется принципа максимума Понтрягина. Есть основания полагать, что разработанный метод может применяться для анализа любой межпланетной траектории КА с ЭРДУ с гравитационными маневрами у любой планеты.

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных для двух моделей, описывающих траекторию межпланетного КА (модели, использующей метод грависфер нулевой протяженности, и модели, использующей ограниченную задачу трех тел). Показано, траектория КА и структура функции управления движением КА (функции переключения двигателя) практически совпадают, а относительное отклонение требуемой массы ксеноны на перелёте не превышает одного процента.

Проведенный сравнительный анализ показывает корректность использования МГНП при проектировании траектории перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру с использованием гравитационного маневра у Земли.

Библиографический список

1 Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация прямых полетов к Юпитеру с ядерной электроракетной двигательной установкой. Вестник МАИ. т. 20, № 5, 2013

2 Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории перелёта космического аппарата с малой тягой для исследования Юпитера с использованием гравитационного манёвра у Земли. // Вестник ФГУП «НПО им. С.А.Лавочкина». т. 21, №5, 2013, стр. 42-46

<http://vestnik.laspace.ru/archives/05-2013/>

3 М.С. Константинов, Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 67, 2013г.

<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=41510>

4 М.С. Константинов, В.Г. Петухов. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте «Интергелио-Зонд». Труды 4-ой Российско-Германской конференции. «Электроракетные двигатели и их применение». Москва-Мышкин-Кострома-Ярославль, 25-30 июня 2012, Россия, 2012, 8 с.

5 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., М. Наука, 1983. С.392.

6 Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования, т. 50, № 3, 2012, стр. 258 – 270

7 М.С. Константинов, Е.Ф. Каменков, Б.П. Перельгин, В.К. Безверный. Под ред. В.П. Мишина. Механика космического полета. М.: Машиностроение, 1989. С.407.