

УДК: 533.682

Исследование эволюции профиля ветра над подстилающей поверхностью

Кудров М.А. ^{*}, Зудов К.А. ^{}, Юдин М.А. ^{***}, Харчилава Ю.Э. ^{****}**

Московский физико-технический институт (государственный университет),

МФТИ, ул. Гагарина, 16, г. Жуковский, МО, 140180, Россия

^{}e-mail: mkudrov@phystech.edu*

*^{**}e-mail: xzudov@mail.ru*

*^{***}e-mail: mikleudin@yandex.ru*

*^{****}e-mail: harchilava.yurii@gmail.com*

Аннотация

При расчете течений в атмосфере отдельной задачей является выбор граничных условий. В статье исследуются возможные постановки граничных условий. Изучены эволюции исходных профилей скорости ветра над ровной поверхностью при проведении расчетов в рамках краевой задачи для RANS с двухпараметрической SST моделью турбулентности для замыкания системы с условиями прилипания на подстилающей поверхности и Римана на верхней границе свободной расчетной области. Приводятся выводы систем уравнений, описывающих профили скоростей ветра в зависимости от высоты в пограничном слое. Приводится сравнение эволюций указанных профилей при течении над ровной поверхностью.

Ключевые слова: профиль вектора скорости, граничные условия, коэффициент турбулентности.

Введение

Построение профиля скорости ветра является важной задачей, которой посвящено много работ, например [1-5].

В частности в работе Вышинского В.В. и Судакова Г.Г. [6] в условиях аэропорта Франкфурт-на-Майне определена матрица безопасности дистанций между самолетами, совершающими посадку. Используются записи погодных условий в зоне аэропорта в течение года. При математическом моделировании использованы профили скорости ветра, температуры воздуха, k и ε по высоте, построенные в рамках модели Монина-Обухова.

В настоящей работе уделено внимание проблеме эволюции профиля скорости ветра над поверхностью. Профиль скорости ветра зависит от подстилающей поверхности, что можно видеть в работе [7], где было смоделировано поле ветра на разных уровнях в пограничном слое над большим промышленным городом. В работе [8] представлено исследование закономерностей изменения скоростей ветра в зависимости от рельефа, типа и шероховатости подстилающей поверхности.

Изучение эволюции изменения профиля скорости ветра над поверхностью необходимо для проведения корректных численных исследований течений, что является актуальным для авиации и метеорологии.

Для вывода профиля скорости рассмотрено две области в зависимости от влияющего на профиль коэффициента турбулентности.

Вывод профиля скорости ветра

В приземном подслое (до 100 метров [9]) длина пути смешения растет с высотой, а наиболее простая связь, предложенная Прандтлем, выглядит следующим образом:

$$l = \chi z, \quad (1)$$

где l – длина пути смешения, z – высота, χ – безразмерная постоянная Прандтля, значение которой установлено экспериментально из аэродинамических измерений и равна $\chi = 0,38$.

При таком определении пути смешения получается логарифмический профиль скорости в приземном подслое [10]:

$$u - u_1 = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_1}, \quad (2)$$

где u – скорость ветра, u_1 – скорость ветра на некоторой высоте z_1 , $v_* = \chi z \frac{\partial u}{\partial z}$ –

динамическая составляющая скорости.

Подстилающие поверхности под приземным слоем обычно являются шероховатыми. Шероховатость (или уровень шероховатости) z_0 вводится из соображений, что вследствие неровностей подстилающей поверхности средняя скорость обращается в нуль не на самой подстилающей поверхности, а выше ее, на некотором уровне z_0 , ниже которого имеют место только турбулентные пульсации.

Тогда, заменив в (2) $z_1 = z_0$, $u_1 = 0$, получается формула (3):

$$u = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0}. \quad (3)$$

Коэффициент турбулентности имеет следующее выражение:

$$k = \chi v_* z. \quad (4)$$

Удобно ввести:

$$k_1 = \chi v_*, \quad (5)$$

где k_1 – значение коэффициента турбулентности на единичной высоте $z=1$ м, следовательно:

$$k = k(z) = k_1 z. \quad (6)$$

Тогда для избегания бесконечности логарифма на высоте равной 0 уравнение профиля скорости ветра запишется в виде (7):

$$u = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z + z_0}{z_0} \right). \quad (7)$$

Пограничным слоем атмосферы называется слой от подстилающей поверхности до уровня порядка 1-1,5 км [9].

Уравнения горизонтального движения [11]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\omega_z v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -2\omega_z u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где u и v – продольная и поперечная составляющие скорости, ω_z – угловая скорость вращения Земли, ρ – плотность потока воздуха, p – давление потока воздуха.

Одним из наиболее важных вопросов динамики пограничного слоя атмосферы является вопрос о распределении скорости ветра с высотой. В задаче о распределении скорости ветра с высотой приходится исходить из определенных гипотез о значениях коэффициента турбулентности и его изменения с высотой.

В настоящее время наиболее распространенной является схема с изломом для функции $k(z)$, впервые построенная М.И. Юдиным и М.Е. Швецом [10]:

$$k = \begin{cases} k_1 z, & z \leq h; \\ k_1 h, & z \geq h; \end{cases} \quad (9)$$

где h – высота приземного подслоя. В настоящей работе рассмотрена эта модель с некоторыми упрощениями. В приземном подслое учтена только турбулентная вязкость, т.е. в этом слое в точности выполняется логарифмический профиль ветра, вытекающий из линейного профиля коэффициента турбулентности. Рассмотрено движение без ускорений и принято, что вектор горизонтального градиента давления не зависит от высоты.

Если направить ось x по изобаре, то уравнения (8) запишутся в виде:

$$\begin{cases} 2\omega_z v + \frac{d}{dz} \left(k \frac{du}{dz} \right) = 0, \\ -2\omega_z u + \frac{d}{dz} \left(k \frac{dv}{dz} \right) = -2\omega_z V_g, \end{cases} \quad (10)$$

где $V_g = -\frac{1}{\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ – геострофический ветер.

Согласно изложенному необходимо решить двухслойную задачу. В приземном подслое ($z \leq h$) в системе уравнений (10) пренебрегают слагаемыми с производными, поскольку рассмотрено движение без ускорения. Используя все

выше сказанное, можно получить, что скорость ветра будет описываться логарифмическим законом (11):

$$V = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right), \quad (z \leq h). \quad (11)$$

Тогда составляющие скорости в приземном подслое будут иметь вид (12):

$$\begin{cases} u = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \cos(\alpha), \\ v = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \sin(\alpha), \end{cases} \quad (z \leq h) \quad (12)$$

где α – угол между направлением геострофического ветра и ветра в приземном подслое.

В основной толще турбулентного пограничного слоя атмосферы ($z \geq h$) согласно формуле М.И. Юдина и М.Е. Швеца систему (10) можно записать в виде:

$$\begin{cases} k_1 h \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega_z v = 0, \quad (13) \\ k_1 h \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega_z u = -2\omega_z V_g, \quad (14) \end{cases} \quad (z \geq h).$$

Для нахождения решения системы уравнений применяют следующий прием.

Вводится комплексная скорость:

$$W = u + iv,$$

где i – мнимая единица.

Умножив уравнение (14) на i и сложив с (13), можно получить:

$$k_1 h \frac{d^2 W}{dz^2} - 2\omega_z i W = -2\omega_z i V_g.$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения складывается из общего решения W_0 , соответствующего однородному уравнению, и частного решения W_1 . Легко заметить, что частное решение имеет вид $W_1 = const = V_g$.

Общее решение уравнения $k_1 h \frac{d^2 W}{dz^2} - 2\omega_z i W = 0$ примет вид:

$$W = W_0 + W_1 = C \exp(a(1+i)z) + D \exp(-a(1+i)z) + V_g, \quad (15)$$

где C и D – некоторые комплексные постоянные интегрирования, $a = \frac{\omega_z}{k_1 h}$.

На верхней границе пограничного слоя (при $z \rightarrow \infty$) ветер должен обращаться в геострофический. Таким образом, справедливо:

$$u(\infty) = V_g \text{ и } v(\infty) = 0.$$

Откуда следует:

$$W(\infty) = V_g. \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части (15) имеет множитель $\exp(az)$, который неограниченно растет с высотой, а множитель $\exp(iaz)$ ограничен. Поэтому, для того, чтобы удовлетворить условию (16), необходимо положить $C = 0$. Учитывая данное обстоятельство и воспользовавшись формулой Эйлера $\exp(-iaz) = \cos(az) - i \cdot \sin(az)$, получается:

$$W = V_g + (D_1 + iD_2) \exp(-az) (\cos(az) - i \cdot \sin(az)). \quad (17)$$

Тогда, согласно выражению комплексной скорости, отделяя вещественную и мнимую части, имеется:

$$\begin{aligned} u &= V_g - B \exp(-a(z-h)) \cos[a(z-h) + \delta], \\ v &= B \exp(-a(z-h)) \sin[a(z-h) + \delta], \end{aligned} \quad (18)$$

где B и δ берутся из:

$$\begin{aligned} D_1 &= -B \exp(-ah) \cos(-ah + \delta), \\ D_2 &= B \exp(-ah) \sin(-ah + \delta). \end{aligned}$$

Очевидно, что вектор ветра на уровне h , определенный по формуле (18) и по формулам (12), должен быть одним и тем же:

$$u|_{z=h-0} = u|_{z=h+0}, \quad v|_{z=h-0} = v|_{z=h+0}. \quad (19)$$

Точно так же вектор напряжения турбулентного трения не должен испытывать скачка на уровне на верхней границе приземного подслоя h . Так как коэффициент турбулентности остается непрерывным при $z=h$, то условие непрерывности напряжения трения сводится к условию непрерывности вертикального градиента ветра:

$$\frac{du}{dz}|_{z=h-0} = \frac{du}{dz}|_{z=h+0}, \quad \frac{dv}{dz}|_{z=h-0} = \frac{dv}{dz}|_{z=h+0} \quad (20)$$

Равенства типа (19) и (20) обычно называют условиями сращивания. В итоге можно получить:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \delta, \quad (21)$$

$$B = \frac{k_1}{\chi^2} \sqrt{\frac{k_1}{2h\omega_z}}, \quad (22)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 + 2 \sqrt{\frac{h\omega_z}{k_1}} \ln \frac{h}{z_0}, \quad (23)$$

$$\frac{k_1}{\chi^2} \ln\left(\frac{h}{z_0}\right) = V_g (\cos\alpha - \sin\alpha). \quad (24)$$

Итак, профиль $z = h$ ветра описывается системой (25):

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{k_1}{\chi^2} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \cos(\alpha), \\ v = \frac{k_1}{\chi^2} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \sin(\alpha), \end{array} \right. \quad (z \leq h) \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = V_g - \frac{k_1}{\chi^2} \sqrt{\frac{k_1}{2h\omega_z}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}}(z-h)\right) \cos\left[\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}}(z-h) + \frac{\pi}{4} - \alpha\right], \\ v = \frac{k_1}{\chi^2} \sqrt{\frac{k_1}{2h\omega_z}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}}(z-h)\right) \sin\left[\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}}(z-h) + \frac{\pi}{4} - \alpha\right], \end{array} \right. \quad (z \geq h)$$

При этом параметры профиля ветра связаны между собой соотношениями (23) и (24).

Выводы получены для $\omega_z > 0$, поэтому результат относится к северному полушарию. Из формулы (23) вытекает, что ветер в приземном подслое отклоняется от геострофического влево. Это означает, что ветер с высотой в пограничном слое вращается вправо. Формула (23) также показывает, что $\operatorname{ctg}\alpha > 1$, т.е. $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

Для устранения неопределенности скорости ветра на высоте $z=0$ используется система (26):

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z + z_0}{z_0} \right) \cos(\alpha), \\ v = \frac{k_1}{\chi^2} \ln \left(\frac{z + z_0}{z_0} \right) \sin(\alpha), \end{array} \right. \quad (z \leq h)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = V_s - \frac{k_1}{\chi^2} \sqrt{\frac{k_1}{2h\omega_z}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}} (z - h) \right) \cos \left[\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}} (z - h) + \frac{\pi}{4} - \alpha \right], \\ v = \frac{k_1}{\chi^2} \sqrt{\frac{k_1}{2h\omega_z}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}} (z - h) \right) \sin \left[\sqrt{\frac{\omega_z}{k_1 h}} (z - h) + \frac{\pi}{4} - \alpha \right], \end{array} \right. \quad (z \geq h)$$
(26)

Введенная поправка почти не влияет на скорость ветра в общем слое и устраняет неопределенность.

Результаты расчетов

В работе проведены расчеты течений в области длиной 10 км и шириной 4 км. Было выполнено два расчета. В первом использован профиль, описываемой системой (26). Во втором случае профиль являлся логарифмическим во всем пограничном слое и был задан уравнением:

$$u = 1,1258 \cdot \ln(z) + 7,7747. \quad (27)$$

Моделирование осуществлено путем численного интегрирования уравнений Рейнольдса с SST замыканием. Газ считается совершенным. Значение температуры фиксировано и соответствует нормальным условиям. Давление по высоте меняется. Ни профиль температуры, ни профиль давления на результат особо не влияют.

В работе использована неструктурированная расчетная сетка с призматическим подслоем вблизи поверхности земли высотой ~ 100 м, позволяющем разрешить приземное течение. Ее общий размер составляет около 20 млн. ячеек. При построении расчетной сетки размер пристенной ячейки составлял 10 см,

коэффициент нарастания равен 1,2. Характерный размер тетраэдральных ячеек составляет около 50 м.

Для профилей, выражающихся формулами (26) и (27), были проведены сравнения профилей скорости во входном сечении (исходные профили) и выходном, находящемся на расстоянии 10 км от входного (рисунки 1-3). Расчеты проводились с использованием SST модели турбулентности.

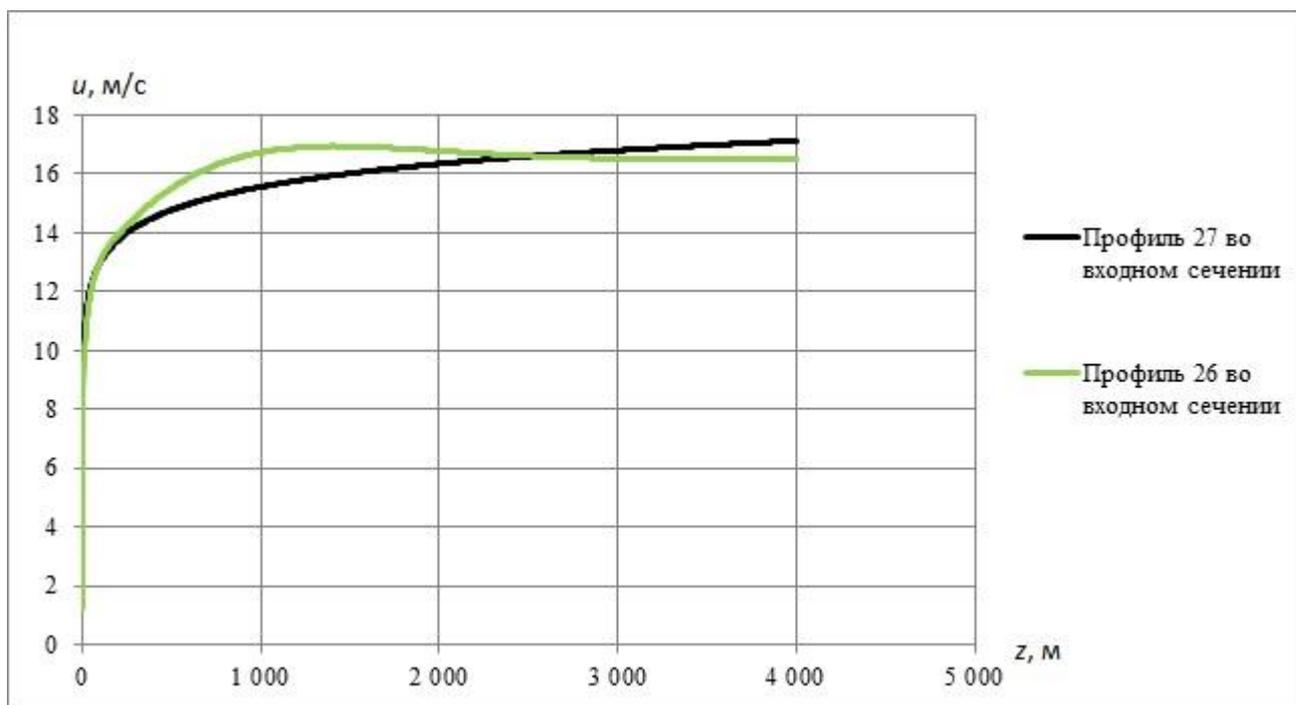


Рисунок 1 – Сравнение профилей скорости ветра во входном $x = 0$ км сечении

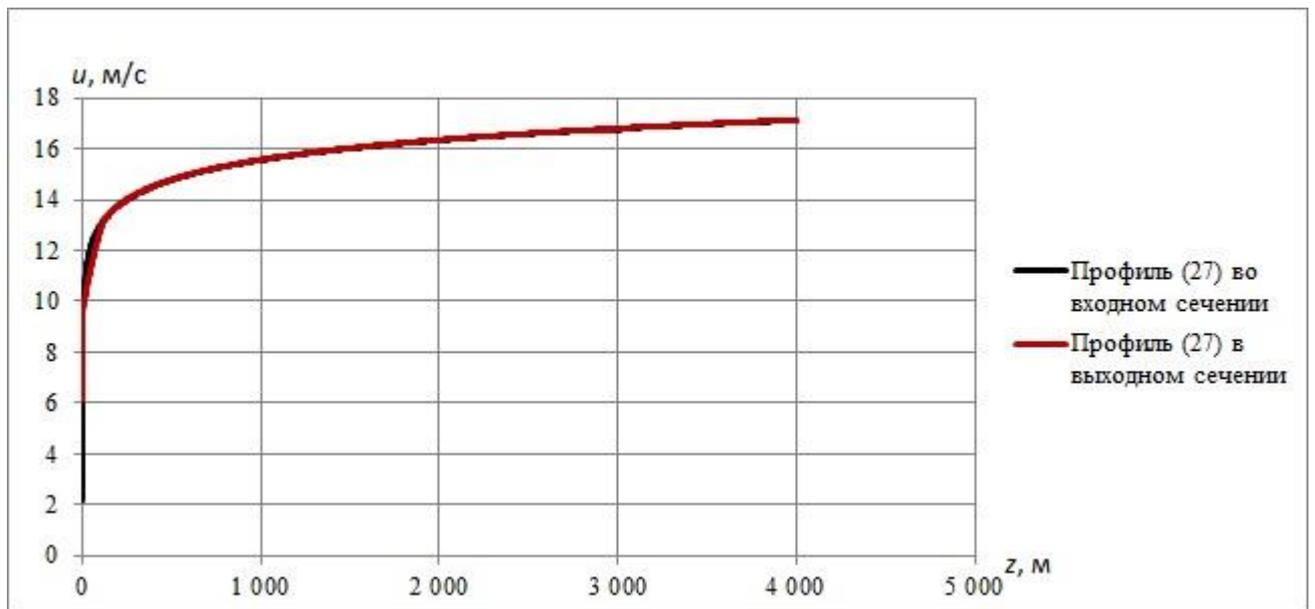


Рисунок 2 – Сравнение профиля скорости ветра (27) во входном $x = 0$ км и в выходном $x = 10$ км сечениях

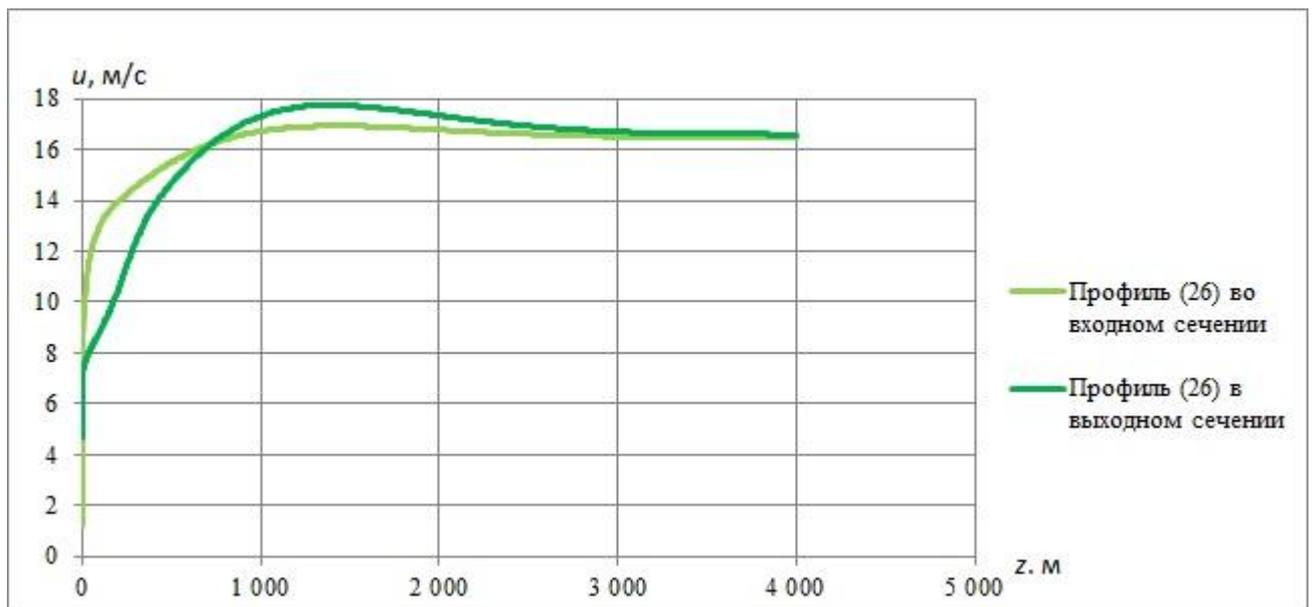


Рисунок 3 – Сравнение компоненты скорости ветра u профиля (26) во входном $x = 0$ км и в выходном $x = 10$ км сечениях

Для численной оценки различий профилей скорости была введена величина:

$$\beta = \frac{1}{N} \sum_i^N \left[\frac{|V_1(i) - V_0(i)|}{V_0'(i)} + \frac{|V_1'(i) - V_0'(i)|}{V_0'(i)} \right],$$

где $V_0(i)$ и $V_1(i)$ – скорости на высоте $h(i)$ исходного профиля и профиля в выходном сечении, а $V_0'(i)$ и $V_1'(i)$ – производные по высоте этих скоростей. По смыслу величина β определяет сумму средних отклонений скорости и ее производной, нормированных на их значение в исходном профиле.

Видно, что профиль, описываемый формулой (26), существенно изменяется вниз по потоку, причем $\beta \approx 2,94$. В то же время, логарифмический профиль (27) меняется (на рисунке 2 кривые, описывающие профили во входном и выходном сечениях в данном масштабе практически совпали, поэтому темную линию не видно) вниз по потоку незначительно ($\beta \approx 0,03$). Отклонение профиля от исходного произошло под влиянием турбулентности.

Выводы

В результате проведенного исследования численно подтверждено, что используемый решатель данной краевой задачи на достаточно грубой сетке сохраняет исходный вид (пренебрежимо малая диссипация). Профили скорости ветра для всего пограничного слоя, возможно, требуют более густой сетки для сохранения своей формы. Полученные результаты позволяют надеяться на корректность решения задачи для настоящего решателя данной топологии и данной сетки соответствующих размеров.

Пристатейный библиографический список

1. Барри Г.Р. Погода и климат в горах. - Л.: Гидрометеиздат, 1984. - 311 с.
2. Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. - Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1970. - 292 с.

3. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. Т.1. - М.: Наука, 1965. - 640 с.
4. Лайхтман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. - Л.: Гидрометеиздат, 1970. -340 с.
5. Матвеев Л.Т. Динамика облаков. - Л.: Гидрометеиздат, 1981. -311с.
6. Вышинский В.В., Судаков Г.Г. Вихревой след самолета в турбулентной атмосфере (физические и математические модели) // Труды ЦАГИ. 2005. вып. 2667. С. 146-152.
7. Ленская О.Ю., Абдуллаев С.М., Приказчиков А.И., Соболев Д.Н. Численное моделирование характеристик пограничного слоя атмосферы крупного промышленного города (на примере г. Челябинска) // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2013. Т. 2. № 2. С. 65-82.
8. Млявая Г.В. Влияние параметров шероховатости подстилающей поверхности на скорость ветра // Ecologia și Geografia. Buletinul AȘM. Științele vieții. 2014. № 2(323). С. 181-187.
9. Матвеев Л.Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. - Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1965. -874 с.
10. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. - Л.: Гидрометеиздат, 1984. - 752 с.

11. Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. - Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1955. - 400 с.