

УДК 629.7.054

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В АТМОСФЕРЕ МАРСА.

Данченко О.М.

Аннотация

Исследования марсианской атмосферы, проведенные автоматическими межпланетными станциями, выявили достаточно сильные ветровые воздействия в нижнем 20-25 км слое атмосферы планеты. В данной работе на основании статистической обработки экспериментальных данных проведен анализ вероятностных характеристик поля скорости ветра, и предлагается математическая модель ветровых воздействий в виде канонического разложения.

Ключевые слова: космический аппарат; Марс; ветровые воздействия; доверительные интервалы; каноническое разложение.

Постановка задачи.

В общем случае скорость ветра является случайной функцией пространства и времени. Иными словами, скорость ветра является случайным полем. Поэтому полное описание структуры поля скорости ветра должно производиться на базе исследования пространственно-временных статистических характеристик. Исследование возможно на основе большого ряда значений рассматриваемых параметров атмосферы в различных точках пространства и в различные промежутки времени. К сожалению, достаточно полная подобная информация отсутствует. В связи с этим будем рассматривать значения скорости ветра как векторные случайные величины, статистические характеристики которых являются функциями фиксированных значений высоты точки над поверхностью планеты. Если принять гипотезу, по аналогии с земной атмосферой, что составляющие скорости ветра

распределяются по нормальному закону, то статистические свойства полей скорости ветра можно описывать математическими ожиданиями и ковариациями.

Вектор ветра может быть представлен в виде двух составляющих, одна из которых направлена по параллели, а вторая по меридиану. Эти составляющие вектора ветра располагаются на осях системы координат, которую в метеорологии принято называть стандартной, а сами составляющие называются зональной и меридиональной. Обозначим составляющие вектора ветра соответственно через v и u и представим их совокупность в виде n - мерного случайного вектора W .

$$W = (u(h_1), u(h_2), \dots, u(h_m), v(h_1), v(h_2), \dots, v(h_m))^T \quad (1)$$

Если этой матрице-столбцу поставить в соответствие матрицу математических ожиданий,

$$M_w = (M_u(h_1), M_u(h_2), \dots, M_u(h_m), M_v(h_1), M_v(h_2), \dots, M_v(h_m))^T \quad (2)$$

то ковариационную матрицу вектора можно получить следующим образом:

$$R_w = M \left[(W - m_w)(W - m_w)^* \right] \quad (3)$$

Развернув эту матрицу, будем иметь блочную матрицу:

$$R_w = \begin{vmatrix} R_{uu} & R_{uv} \\ R_{vu} & R_{vv} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Блоки матрицы R_w , стоящие на главной диагонали, являются симметрическими автоковариационными матрицами составляющих скорости ветра. Остальные блоки представляют собой несимметрические взаимные ковариационные матрицы и обладают свойством:

$$R_{uv} = R_{vu}^* \quad (5)$$

Матрица R_w дает возможность получить нормированную корреляционную матрицу

$$r_w = \begin{vmatrix} r_{uu} & r_{uv} \\ r_{vu} & r_{vv} \end{vmatrix} \quad (6)$$

которая обладает теми же особенностями, что и матрица R_w , где

$$r_{uu}(h, h') = \frac{R_{uu}(h, h')}{\sqrt{R_{uu}(h, h)R_{uu}(h', h')}} \quad (7)$$

$$r_{vv}(h, h') = \frac{R_{vv}(h, h')}{\sqrt{R_{vv}(h, h)R_{vv}(h', h')}} \quad (8)$$

$$r_{uv}(h, h') = \frac{R_{uv}(h, h')}{\sqrt{R_{uu}(h, h)R_{vv}(h', h')}} \quad (9)$$

Если принимается гипотеза о нормальном законе распределения составляющих скорости ветра, то достаточные и несмещенные оценки элементов рассмотренных выше ковариационных матриц рассчитываются по экспериментальным данным с помощью следующих формул [1]:

$$R_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)$$

$$R_{xx} = D_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \quad (10)$$

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

В качестве основного исходного материала для расчета статистических характеристик случайных ветровых воздействий были взяты результаты исследования атмосферы Марса, начиная с 1969 года [2 -10].

На рисунке 1 показаны средние по времени значения составляющих скорости ветра при солнцестоянии (solstice) и равноденствии (equinox). При солнцестоянии зональная составляющая характеризуется сильным западным ветром с максимумом в средних широтах зимнего полушария и особенно сильным восточным ветром в районе экватора. Наиболее слабый восточный ветер наблюдается в средних и высоких широтах в летнем полушарии. Меридиональная составляющая во всем рассматриваемом слое атмосферы (до 20-25 км) имеет сравнительно небольшую величину, наибольшие значения достигают 10 м/сек. Меридиональная составляющая на верхнем рассматриваемом уровне (20-25 км) и нижнем (5-7 км) взаимно не погашаются, а в результате потерь в атмосфере масс CO_2 , конденсирующихся на зимней полярной шапке, появляется атмосферный поток в направлении полюса.

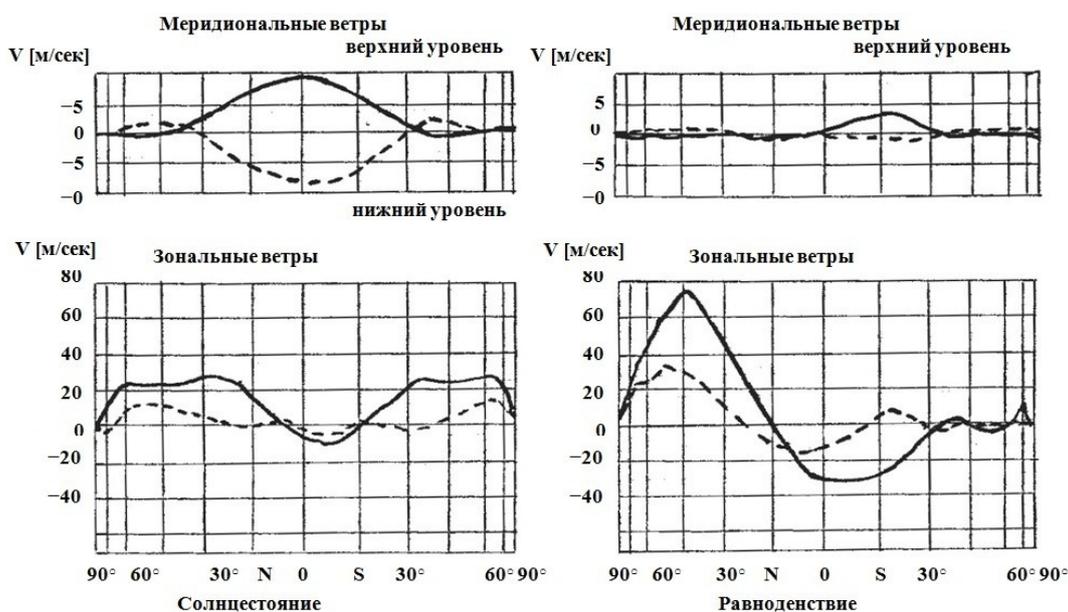


Рис. 1

Средние по времени значения составляющих скорости ветра при солнцестоянии и равноденствии.

При равноденствии обе составляющие ветра значительно слабее. Существуют потоки в западном направлении в обоих полушариях с двойным максимумом на нижнем рассматриваемом уровне, а также узкий пояс восточных ветров в районе экватора. Эксперименты по измерению составляющих скорости ветра, по данным [8,9] проходили в течение почти месяца. По этим экспериментам, наибольшие значения среднезональной

составляющей скорости ветра (в условиях незапыленной атмосферы планеты), при солнцестоянии составляли 83 м/сек и 65 м/сек. В таблице 1 представлены значения скорости ветра в зависимости от координат точки наблюдения для $H = 20$ км.

Таблица 1

Данные о скорости ветра

Солнцестояние $H=20$ км

Широта [град]	28	35	49	42	42	35	35
Долгота [град]	189	27	225	315	297	261	261
Скорость [м/сек]	50,1	96,3	127,1	147,3	149,4	137,2	114

Равноденствие $H=20$ км

Широта [град]	63	70	63	49	63	70	56
Долгота [град]	252	252	0	144	126	81	54
Скорость [м/сек]	23,4	30,0	44,1	55,9	58,9	57,6	54,1

Солнцестояние $H=5-7$ км

Широта [град]	35	42	35	70	70	56	56	42
Долгота [град]	297	315	270	207	153	306	288	360
Скорость [м/сек]	61,0	60,6	64,7	63,0	30,9	32,1	31,0	29,3

Солнцестояние $H=0$ км

Равноденствие $H=0$ км

Широта [град]	21	21	14	35	63	70	49	28
------------------	----	----	----	----	----	----	----	----

Долгота [град]	342	144	279	180	351	351	333	63
Скорость [м/сек]	59,1	50,4	68,7	52,2	32,5	32,7	31,8	30,1

Наиболее сильные ветры наблюдаются при солнцестоянии на верхнем уровне ($H = 20$ км). В работе [2] отмечено, что градиент скорости ветра по высоте невелик, порядка 1-2 м/сек на километр и переменен по знаку в пространстве и времени. Большое влияние на характеристики ветра имеет локальный рельеф местности. На длинных склонах порядка 200-1000 км, вследствие их неравномерного разогрева может возникнуть сильная местная циркуляция, при которой ветер в 2-3 раза может превысить средние значения. Для небольших склонов до 100 км такой дополнительный ветер, согласно [8,10] имеет величину порядка 10 м/сек. В этой же работе приведен перечень областей, которые желательно избегать при посадке из-за возможных сильных ветров. Это северная часть области Хеллас, области Нике Олимпика и Амазония.

Воспользовавшись данными о скорости ветра, представленными в работах [2-10] для высот $H_1 = 0-1$ км, $H_2 = 5-7$ км, и $H_3 = 20$ км, были подсчитаны элементы ковариационной матрицы скорости ветра в соответствии с формулами (10)

$$R_w = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \text{ где} \quad (11)$$

$R_{11} = D_1 = 241,8431$ [м²/сек²] - дисперсия скорости ветра, математическое ожидание

$M[w] = 45,76$ [м/сек] при $H_1 = 0-1$ км;

$R_{22} = D_2 = 305,0628$ [м²/сек²] - дисперсия скорости ветра, математическое ожидание

$M[w] = 42,45$ [м/сек] при $H_2 = 5-7$ км;

$R_{33} = D_3 = 2120,8$ [м²/сек²] - дисперсия скорости ветра, математическое ожидание

$M[w] = 81,82$ [м/сек] при $H_3 = 20$ км;

Так как согласно (5) $R_{ij} = R_{ji}$, то в результате получим следующие данные:

$$R_{12} = R_{21} = 787,8893 [\text{м}^2/\text{сек}^2];$$

$$R_{13} = R_{31} = 614,8824 [\text{м}^2/\text{сек}^2]; R_{23} = R_{32} = 253,1021 [\text{м}^2/\text{сек}^2]$$

На рисунке 2 представлен характер изменения среднего значения результирующей скорости ветра по высоте, напоминающий изменение по высоте аналогичной характеристики для земной атмосферы.

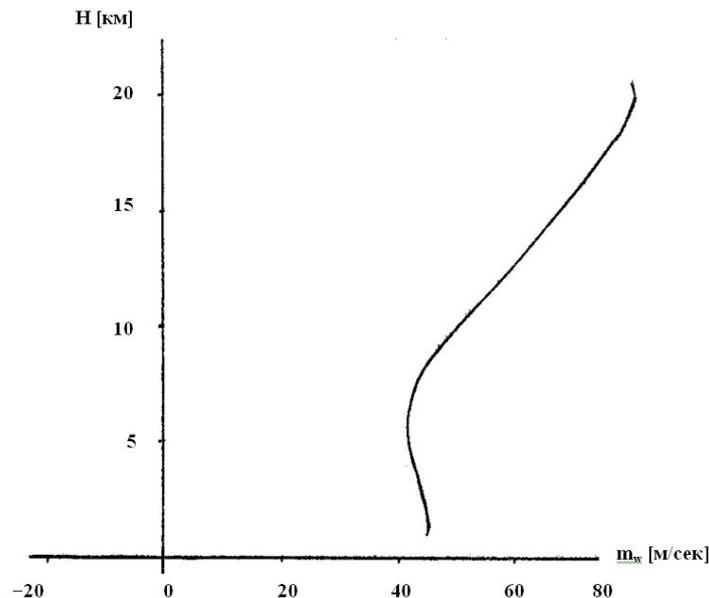


Рис. 2

Зависимость математического ожидания скорости ветра на высоте.

Оценки статистических характеристик, рассчитанные по имеющимся опытным данным, вычислялись по ограниченным совокупностям. В связи с этим предлагается оценить степень приближения к искомым статистическим характеристикам с помощью доверительных интервалов.

Но прежде чем перейти к определению доверительных интервалов, была проверена гипотеза о нормальном распределении случайной величины скорости ветра в атмосфере Марса (по аналогии с земной атмосферой) с помощью χ^2 – критерия согласия Пирсона. В результате проверки по этому критерию была получена вероятность $p = 0,2$. Судить о том, достаточна ли эта вероятность для принятия гипотезы о нормальном распределении

случайной величины скорости ветра в диапазоне скоростей 40-140 м/сек при математическом ожидании $M[w] = 62,75$ м/сек и среднеквадратическом отклонении $\sigma = 36,4$ м/сек,

можно лишь в том плане, что обычно на практике отбрасываются или пересматриваются те гипотезы, вероятность которых меньше, чем 0,1 [1]. Следует отметить, что с помощью критерия χ^2 (или любого другого критерия согласия) можно только в некоторых случаях отвергнуть выбранную гипотезу и отбросить ее как явно несогласную с опытными данными. Если же вероятность велика, то этот факт сам по себе ни в коем случае не может считаться доказательством справедливости гипотезы, а указывает лишь на то, что гипотеза не противоречит опытными данным.

Перейдем к определению степени приближения оценок к статистическим характеристикам скорости ветра с помощью доверительных интервалов. Найдем доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии. Для определения доверительных интервалов вычисленных статистических характеристик, необходимо задаться доверительной вероятностью, с которой данные характеристики будут располагаться в этих интервалах. Заданная $\beta = 0,85$ и найдем такую величину ε_β , для которой

$$P\left(m^* - \varepsilon_\beta < m < m^* + \varepsilon_\beta\right) = \beta \quad (13)$$

Согласно [1] для математического ожидания доверительный интервал можно найти по формуле:

$$I_\beta = \left(m^* - t_\beta \sigma_{m^*}; m^* + t_\beta \sigma_{m^*} \right), \text{ где} \quad (14)$$

$$t_\beta = \arg \phi^* \left(\frac{1 + \beta}{2} \right)$$

Аналогичным способом может быть построен доверительный интервал и для дисперсии. Заменим дисперсию D её оценкой D^* и будем считать, что

$$M\left[D^*\right] = D; \quad D\left[D^*\right] = \frac{0,8n + 1,2}{n(n-1)} (D^*)^2, \quad \text{где} \quad (15)$$

n – число опытов.

Из последнего равенства приближенно находим

$$\sigma_{D^*} = \sqrt{\frac{0,8n + 1,2}{n(n-1)}} \cdot D^* \quad (16)$$

Далее можно построить доверительный интервал

$$I_{\beta} = \left(D^* - t_{\beta} \sigma_{D^*} ; \quad D^* + t_{\beta} \sigma_{D^*} \right), \text{ где} \quad (17)$$

t_{β} – величина, которая в зависимости от заданной вероятности находится по специальным таблицам ([1], стр.321, табл.14.3.1).

В таблице 2 представлены доверительные интервалы математических ожиданий и дисперсий для случайной величины скорости ветра в зависимости от высоты полета, при $\beta = 0,85$ и $t_{\beta} = 1,439$.

Доверительные интегралы математических ожиданий и дисперсий

Таблица 2

Н [км]	Для математического ожидания [м/сек]	Для дисперсии [м ² /сек ²]
0	37,86 – 53,70	113,8481 – 369,8481
7	33,55 – 51,35	144,0628 – 466,0628
20	64,12 – 99,52	1323,8 – 2917,8

$$\beta = 0,85 ; \quad t_{\beta} = 1,439$$

Каноническое разложение скорости ветра.

В ряде случаев случайную функцию бывает удобно представить в виде определенной линейной комбинации некоррелированных случайных величин. Эта комбинация содержит не случайные функции и имеет вид:

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i x_i(t) \quad (18)$$

где $x_i(t)$ – не случайные функции, называемые координатными функциями;

v_i – некоррелированные случайные величины такие, что $M[v_i] = 0$,

$$M[v_i] = 0 ; \quad M[v_i v_j] = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ D_i & \text{при } i = j \end{cases} \quad (19)$$

Представление случайной функции в виде (18) принято называть каноническим разложением. В общем случае каноническое разложение является бесконечным рядом. На практике обычно пользуются ограниченным числом членов ряда.

Для определения элементов канонического разложения достаточно иметь данные о математическом ожидании и ковариациях. Эти данные, как указывалось выше, дают достаточно полное представление о нормально распределенной случайной величине или функции. Зададимся числом членов ряда равным трем. Тогда случайная функция скорости ветра в зависимости от высоты в форме канонического разложения примет вид:

$$W(H) = m_W(H) + \sum_{i=1}^3 \mu_i x_i(H), \quad (20)$$

где согласно [1,11,12] $v_1 = \overset{\circ}{W}(H_1)$ – случайное число с $M[v_1] = 0$, а

$\overset{\circ}{W}(H_1)$ – центрированная случайная величина скорости ветра на уровне $H = H_1$ и

дисперсией $D_1 = R_W(H_1, H_1) = R_{11} = 241,8481 [м^2 / сек^2]$

Координатная функция $X_1(H) = 1$

Для определения случайного коэффициента v_2 , согласно [11,12] справедливо равенство

$$v_2 = \overset{\circ}{W}(H_2) - v_1 \cdot X_1(H_1) \quad (21)$$

Учитывая, что $X_1(H)=1$, равенство (21) примет вид:

$v_2 = \overset{\circ}{W}(H_2) - v_1$ — случайное число с математическим ожиданием $M[v_2]=0$ и дисперсией, вычисленной на основании с [12].

$$D_2 = R_W(H_2, H_2) - D_1 [X_1(H_1)]^2, \quad D_2 = 305,0628 \text{ [м}^2/\text{сек}^2\text{]}$$

Вторая координатная функция $X_2(H)$ в соответствии с [12] определяется выражением :

$$X_2(H) = \frac{1}{D_2} [R_W(H, H_2) - D_1 X_1(H) X_1(H_2)]$$

учитывая, что $X_1(H)=1$, получим

$$X_2(H) = \frac{1}{D_2} [R_W(H, H_2) - D_2] \quad (22)$$

Значения функции $R_W(H, H_2)$ получим из таблицы 2. Аналогичным образом определяем :

$$v_3 = \overset{\circ}{W}(H_3) - v_1 X_1(H_1) - v_2 X_2(H_2)$$

Так как в соответствии с [12] $X_i(t_i)=1$, то $v_3 = \overset{\circ}{W}(H_3) - v_1 - v_2$ — случайное число с математическим ожиданием $M[v_3]=0$ и дисперсией

$$D_3 = R_W(H_3, H_3) - \sum_{i=1}^2 D_i [X_i(H_3)]^2 = R_W(H_3, H_3) - D_1 [X_1(H_3)]^2 - D_2 [X_2(H_3)]^2$$

но так как $X_3(H_3)=1$, то $X_2(H_3) = \frac{1}{D_2} [R_W(H_3, H_2) - D_1]$, а

$$D_3 = 2120,8 \text{ [м}^2/\text{сек}^2\text{]}$$

Координатная функция $X_3(H_3)$ определяется следующим равенством :

$$X_3(H) = \frac{1}{D_3} \left[R_W(H, H_3) - \sum_{i=1}^2 D_i X_i(H) X_i(H_3) \right] =$$

$$= \frac{1}{D_3} \left[R_W(H, H_3) - D_1 X_1(H) X_1(H_3) - D_2 X_2(H) X_2(H_3) \right],$$

так как $X_1(H) = X_1(H_3) = 1$ и $X_2(H) = \frac{1}{D_2} \left[R_W(H_3, H_2) - D_1 \right] = 0,037$,

то окончательно:

$$X_3(H) = \frac{1}{D_3} \left[R_W(H, H_3) - D_1 - 0,037 \cdot D_2 \cdot X_2(H) \right] \quad (23)$$

В результате каноническое разложение случайной функции скорости ветра от высоты (20) примет вид:

$$W(H) = m_W(H) + v_1 + v_2 \cdot \frac{1}{D_2} \left[R_W(H, H_2) - D_1 \right] +$$

$$+ v_3 \frac{1}{D_3} \left[R_W(H, H_3) - D_1 - 0,037 \cdot D_2 \cdot X_2(H) \right] \quad (24)$$

где случайные коэффициенты v_1, v_2, v_3 и координатные функции $X_1(H)$ определяются формулами (21)-(24).

На рис.3 представлена одна реализация случайных значений скорости ветра в зависимости от высоты полета, полученная в соответствии с формулой (24).

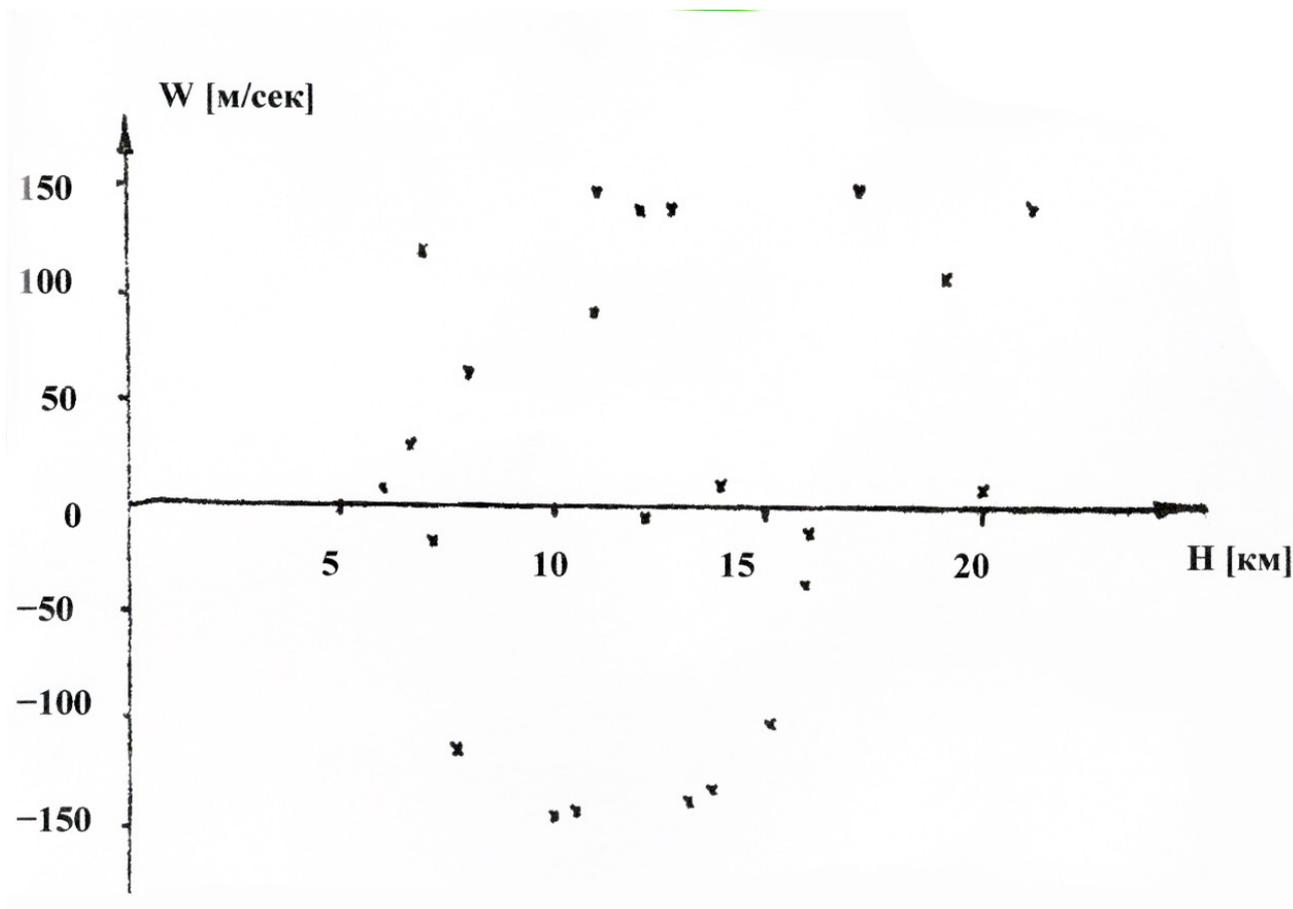


Рис. 3

Случайные по высоте значения скорости ветра.

Рассмотренное представление случайной функции скорости ветра в зависимости от высоты полета над поверхностью планеты в виде канонического разложения, по сути является математической моделью случайного атмосферного воздействия, построенной на основе статистических характеристик данного параметра атмосферы. Выбор той или иной формы математической модели атмосферных воздействий для решения задач управления движением аппаратов в атмосфере должен полностью определяться характером поставленной задачи управления.

Библиографический список.

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей. Изд. 2-е, М., «Наука», 1973 г., 312-351, 406-414 стр.
2. Авдудевский В.С., Аким Э.Л., Алешин В.И. и др. Атмосфера Марса в районе посадки спускаемого аппарата «Марс-6». «Космические исследования», т. XIII вып. 1, изд. «Наука», 1973 г.
3. Вокулер Ж. Физика планеты Марс., М., «Наука», 1965 г.

- 4.Маров М.Я. Планеты Солнечной системы., М., «Наука», 1986 г.
- 5.Мороз В.И., Физика планеты Марс., М., 1978 г.
- 6.Gierasch P.J. and Goody R.M. A study of the thermal and dynamical structure of the Martian lower atmosphere. Planet Space, Sie., 1968,Vo. 16, p.p. 615-646, Pergamon Press.
- 7.Leovy C. and Y.Minis. Numerical Simulation of the Atmospheric Circulation and Climate of Mars. Journal of the atmospheric Science, Nov. 1969, Vo/26, No.6.
- 8.Mariner-9 S-Band Martian Occultation Experiment. Initial Results of the atmosphere and Topography of Mars. Science, 1972, p.p. 315-317.
- 9.Zeiner H.N., French C.E., Howard D.A. A technique for lifting entry and terminal phase system optimization for the 1975 Mars Viking Lander. AIAA guidance, control and flight mechanics conference, New-Jerk, 1973.
- 10.NASA's Phoenix Lander Sees, Feels Martian Whirlwinds in Action – сайт миссии «Феникс», сентябрь 2008г.
11. Батков А.М., Александров И.М., и др. Методы оптимизации в статистических задачах управления. М., «Машиностроение», 1974 г.
12. Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Статистическая динамика управляемого полета. М., «Машиностроение», 1978 г.

Сведения об авторах.

Данченко Оксана Михайловна, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

тел. +7 499- 158-11, e-mail, dep.805 @ mail.ru