

Труды МАИ. 2021. № 120  
Trudy MAI, 2021, no. 120

Научная статья

УДК 519.977

DOI: [10.34759/trd-2021-121-19](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-19)

## ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

**Илья Вадимович Урюпин**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

[uryupin93@yandex.ru](mailto:uryupin93@yandex.ru)

*Аннотация.* В классической задаче оптимального управления непрерывными системами допустимое управление, как правило, кусочно-непрерывное (либо ограниченное измеримое). Эта задача рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений с учетом затрат на переключения управления. Такая постановка задачи является частным случаем задачи оптимального управления гибридными системами. На основе необходимых условий оптимальности кусочно-постоянного управления, разработан численно-аналитический алгоритм решения поставленной задачи. Решен академический пример оптимального гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами в классе кусочно-постоянных

управлений. Получено оптимальное кусочно-постоянное управление с минимальным количеством переключений, обеспечивающее заданную точность (по функционалу) в сравнении с оптимальным кусочно-непрерывным управлением.

**Ключевые слова:** теория управления, переключаемые системы, минимизация переключений, оптимизация, алгоритм, гибридные системы

**Для цитирования:** Урюпин И.В. Оптимизация непрерывных систем в классе кусочно-постоянных управлений // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-19](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-19)

## OPTIMIZATION OF CONTINUOUS SYSTEMS IN CLASS OF PIECEWISE CONSTANT CONTROLS

**Илья V. Uryupin**

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[uryupin93@yandex.ru](mailto:uryupin93@yandex.ru)

**Abstract.** The purpose of the research consists in developing an optimization algorithm for continuous systems in the class of piecewise constant controls. In classical problems of optimal control of continuous systems, the admissible controls are, as a rule, bounded measurable ones (in applied problems, they are piecewise continuous). In some complex continuous systems, physical implementation of such admissible control seems impossible. Then one can narrow down the set of admissible controls, for example, to the class of

piecewise constant controls with a fixed number of switchings and search for a solution in this narrow class. It is clear, the suboptimal controls herewith will be obtained, which, however, with an unlimited increase in the number of switchings, will tend to the optimal one. Thus, the problem of minimizing the number of switchings becomes actual.

To solve the set problem, a numerical-analytical algorithm has been developed based on the necessary conditions for optimality of switched systems. Boundary problems and formulas expressing the optimal values of piecewise constant control are obtained analytically, according to the necessary conditions. The resulting system of equations, as a rule, is transcendental and its solution is rather difficult. Thus, the author proposes to use the numerical minimization of the functional, followed by fulfillment verification of the necessary conditions to search for the optimal switching moments. The proposed algorithm is realized in MATLAB.

The problem of a linear oscillator controlling with quadratic functional is being considered as an example. The optimal solution to this problem in the class of continuous controls was obtained using the maximum principle. In this work, the optimal solution to the problem in a narrower class of piecewise constant controls is being searched for. This solution is being found using necessary conditions for the switched systems optimality. It may be regarded as a solution close to optimal continuous control. Besides the problem of an optimal piecewise constant control synthesizing, the problem of finding the minimum number of switchings, at which the difference between the approximate solution and the exact one does not exceed a given error is also solved.

The main result of the work is a numerical-analytical algorithm for minimizing the number of switchings of optimal piecewise-constant controls for an approximate solution of the optimal control problem for continuous systems.

**Keywords:** theory of control, switched systems, switching minimization, optimization, algorithm, hybrid systems

**For citation:** Uryupin I.V. Optimization of continuous systems in class of piecewise constant controls. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-19](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-19)

## Введение

Важным направлением современного развития теории и практики оптимального управления являются исследования и применение гибридных систем (ГС) [1-3]. Переключаемые системы (ПС) [4, 5] представляют собой обширный класс ГС, включающий непрерывно-дискретные (НДС) [6], логико-динамические системы (ЛДС) [7-9], динамических системы с автоматной частью [10], системы автоматного типа (САТ) [11, 12] и другие. Модели ПС применяются в авиации и космонавтике, а их функционирование представляется непрерывно-дискретными процессами, которые имеют разнородное представление [5,13,14]. В ПС непрерывное изменение, задающее движение объекта управления, описывается дифференциальными уравнениями, а дискретное изменение, моделирующее работу устройства управления, – рекуррентными уравнениями.

В статье рассматривается задача минимизации количества переключений ГС [15-17]. Эта задача состоит в нахождении наименьшего количества переключений, при котором значение функционала качества не превышает заданного значения. Например, в классической задаче оптимального управления [18] допустимые управления – ограниченные измеримые (в прикладных задачах – кусочно-непрерывные). Можно сузить множество допустимых управлений, например, до кусочно-постоянных управлений с фиксированным числом переключений и искать решение в этом узком классе. Разумеется, при этом будем получать субоптимальное управление, которое, однако, при неограниченном росте количества переключений будет стремиться к оптимальному. Здесь возникает вопрос: при каком количестве переключений субоптимальное управление будет достаточно близким (по функционалу качества) к оптимальному управлению с прикладной точки зрения? Другим очевидным приложением задач минимизации переключений служит классическая задача аппроксимации [19], в которой требуется определить наименьшее количество частичных отрезков аппроксимации, чтобы погрешность не превышала допустимую. Заметим также, что проблема минимизации количества переключений нередко встречается в прикладных задачах, в которых число переключений, как правило, ограничено. Например, для вывода спутника на геостационарную орбиту используется разгонный блок "Бриз-М" [20], количество включений маршевого двигателя которого ограничено (не более 10 запусков). Это ограничение, разумеется, учитывается при разработке схемы полета. Потребность

минимизации количества переключений возникает естественным образом, если затраты на каждое переключение существенные. В этом случае желательно достичь цели управления с наименьшим количеством переключений.

В статье, на основе необходимых условий оптимальности кусочно-постоянного управления [16], разработан численно-аналитический алгоритм задачи минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального управления непрерывными системами. Работа алгоритма, демонстрируется на академическом примере.

### **Задачи оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений**

**Постановки задач.** Рассмотрим классическую задачу оптимального управления непрерывной системой [18]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (2)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Обозначения в задаче (1) – (3) стандартные:  $x(t)$ ,  $u(t)$  – состояние системы и управление в момент времени  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_F]$ ;  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ;  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $U$  – заданное множество допустимых значений управления. Начальное состояние  $x_0$  задано. Момент окончания  $t_F$  и терминальное состояние  $x_F = x(t_F)$  определяются первым достижением поверхности  $\Gamma(t_F, x_F)$ . Функции  $f: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$f^0 : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Gamma : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$  непрерывны на областях определения вместе с частными производными по  $t$  и  $x$ . Предполагаем, что функции  $f^0$  и  $F$  ограничены снизу.

Множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  образовано парами  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , включающими траекторию  $x(\cdot)$  системы – непрерывную кусочно-гладкую функцию  $x : T \rightarrow X$ , и управление  $u(\cdot)$  – кусочно-непрерывную функцию  $u : T \rightarrow U$ , удовлетворяющую почти всюду на  $T$  уравнению движения (1) и терминальным условиям (2). Функционал (3) определен на множестве допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$ .

Требуется найти наименьшее значение  $\min I$  функционала (3) и оптимальное кусочно-непрерывное управление  $u(\cdot)$ , на котором это значение достигается.

Будем решать задачу (1) – (3) в классе кусочно-постоянных управлений. Пусть на заданном промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  кусочно-постоянное управление  $y(\cdot)$  динамической системой совершает  $N$  переключений в моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , образующие возрастающую конечную последовательность  $\mathbf{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \quad (4)$$

Движение системы и функционал задаются соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i \quad (5)$$

$$y_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0,$$

$$I_N(d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (7)$$

В задаче (4) – (7) требуется найти наименьшее значение  $\min I_N$  функционала (7) и кусочно-постоянное управление  $y^*(\cdot)$ , на котором это значение достигается. Отметим, что в этой задаче количество переключений  $N$  задано.

Сформулируем теперь *задачу минимизации количества переключений*. Требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором наименьшее значение  $I_{N^\varepsilon}$  функционала (7) не превосходит заданной величины  $\varepsilon$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} = \min_{d \in D_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, y_0)} I_{N^\varepsilon}(d) \leq \varepsilon. \quad (8)$$

Формулировку задачи (8) можно уточнить, если известно минимальное значение  $\min I$  функционала (3). В этом случае требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором решение задачи в классе кусочно-постоянных управлений отличается по функционалу от решения задачи в классе кусочно-непрерывных управлений не более чем на заданную величину  $\varepsilon$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} - \min I \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Решение задач (8) и (9) естественным образом сводится к многократному решению задачи (4) – (7) для разных фиксированных значений  $N$ . При этом, разумеется, применяются необходимые или достаточные условия оптимальности ПС [16]. Сравнивая задачу (4) – (7) с общей постановкой задачи в работе [16], заключаем, что мгновенные многократные переключения [21] исключаются, множество допустимых состояний дискретной части постоянно ( $G(t, x, y) = U$ ), в функционале

качества управления не учитываются затраты на переключения ( $g^+ = 0$ ). Начальное состояние  $y_0$  дискретной части системы не задано. Оно является ресурсом управления и определяется при решении задачи минимизации.

### Необходимые условия оптимальности

Необходимые условия оптимальности для задачи (4) – (7) формулируются следующим образом [16].

**Теорема.** Пусть оптимальный процесс  $(x(\cdot), y(\cdot))$  имеет  $N$  переключений в моменты  $t_1, \dots, t_N$ :  $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_F$ . Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция  $\psi(\cdot)$ , что выполняются:

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

2) условие трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\} \delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством  $\Gamma_t[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F = 0$ ;

3) неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \left\{ F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций  $\delta y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

4) равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Условия 1), 2) теоремы вместе с уравнениями движения и начальными условиями позволяют получить вспомогательные функции, зависящие от  $2N + 1$

параметров  $t_1, \dots, t_N, y_0, y_1, \dots, y_N$ . Для нахождения этих параметров имеется система из  $2N + 1$  условий 3), 4). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [18], дает «полную» систему условий для нахождения процесса, который, может быть, оптимальными. Неоптимальные процессы условиям теоремы не удовлетворяют.

### Алгоритм поиска оптимального кусочно-постоянного управления непрерывной системой

Согласно необходимым условиям оптимальности задача (4) – (7) сводится к решению двухточечной краевой задачи с промежуточными условиями. Для процессов с  $N$  переключениями в моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ , удовлетворяющие неравенствам

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \quad \square \quad ,$$

нужно выполнить следующие действия.

Шаг 1. Составляем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (4) – (7):

$$H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y).$$

Шаг 2. Из неравенств

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \left\{ F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

справедливых для любых допустимых вариаций  $\delta y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , находим выражения для управлений  $y_i$ .

Шаг 3. Составляем систему канонических уравнений

$$\dot{\psi} = -H_\psi, \quad \dot{x} = H_x, \quad \dot{y}_i = H_{y_i}, \quad t \in T_i, \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad i=0,1,\dots,N, \quad (11)$$

и равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i=1,\dots,N. \quad (12)$$

Шаг 4. Записываем краевые условия

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (13)$$

а также дополнительные условия в конечный момент времени  $t_F$ , которые получаем

из условий трансверсальности

$$\begin{aligned} \{F_t[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\} \delta x_F &= 0, \\ \Gamma_t[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Шаг 5. Решаем, полученную на предыдущих шагах (3 и 4), краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (10), (11) с краевыми условиями (13), (14) и промежуточными условиями (12). В результате находим условно оптимальное управление, которое может оказаться оптимальным.

Шаг 6. Для найденного управление вычисляем значение функционала (7).

Таким образом, находится оптимальное управление для заданного количества переключений  $N$ . Как правило, алгоритм выполняется последовательно для  $N=0,1,\dots,N_{\text{MAX}}$ , где  $N_{\text{MAX}}$  – максимальное допустимое количество переключений. Сравнивая вычисленные значения функционала при  $N=0,1,\dots,N_{\text{MAX}}$ , выбираем минимальное. Этому значению соответствует оптимальное количество переключений. Особенностью предложенной численно-аналитической процедуры решения является его сложная реализация, так как получаемая по алгоритму краевая

задача имеет промежуточные условия. Моменты переключений  $t_1, \dots, t_N$  и параметры управления  $y_0, y_1, \dots, y_N$ , связаны системой  $2N + 1$  трансцендентных уравнений. Ее численное решение является серьезной проблемой, не говоря об аналитическом решении, которое, как правило, невозможно даже при  $N = 1$ . Поэтому предлагается другой подход, который заключается в минимизации функционала  $I_N$  по моментам переключений. Действительно, если управление  $y_i$  удастся выразить через моменты переключений  $y_i = y_i(t_1, \dots, t_N)$ , то функционал  $I_N$ , можно представить в виде функции  $I_N = I_N(t_1, \dots, t_N)$ . Тогда процедура приближенного решения задачи (4) – (7) при  $N \geq 1$  сводится к минимизации функции  $I_N(t_1, \dots, t_N)$  с последующей проверкой выполнения необходимых условий оптимальности. Описанная процедура решения – численно-аналитическая. Необходимые условия используются для составления краевой задачи и получения формул для управлений  $y_i(t_1, \dots, t_N)$ . Минимизация функции  $I_N(t_1, \dots, t_N)$  выполняется численно. После минимизации вычисляются невязки для системы уравнений (12), которые характеризуют точность выполнения необходимых условий оптимальности.

### Пример

Рассмотрим задачу гашения малых колебаний с минимальными энергетическими затратами под действием неограниченного ускорения. Постановка задачи оптимального кусочно-непрерывного управления имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \alpha x = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (15)$$

Требуется найти наименьшее значение  $\min I$  функционала и оптимальное кусочно-непрерывное управление  $u(\cdot)$ , на котором этот минимум достигается.

Решение поставленной задачи получено, например в [22], при помощи принципа максимума [23]. Оптимальное управление

$$u(t) = \frac{4}{\pi - 2} (\sin t - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

будет иметь вид гармонической функции, график которой представлен на рисунке 1.

Наименьшее значение функционала (15), при этом, будет равно

$$\min I = \frac{4}{\pi - 2} \approx 3.5039;$$

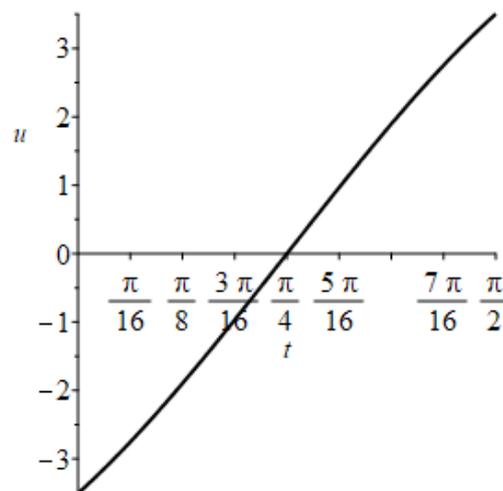


Рисунок 1. График оптимального управления в задаче (15).

Рассмотрим задачу оптимизации в классе кусочно-постоянных управлений.

Пусть на промежутке функционирования  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  система совершает  $N$  переключений

в моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ , образующие возрастающую последовательность:

$$0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \leq \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

Уравнения движения системы и функционал качества имеют вид

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad \dot{y}_i = -y_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad y_i \in R, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad (18)$$

$$I_N = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} y_i^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (19)$$

Требуется найти наименьшее значение  $\min I_N$  функционала (19) и оптимальное кусочно-постоянное управление  $y(\cdot)$ , на котором этот минимум достигается.

Сформулируем задачу минимизации количества переключений. Требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором наименьшее значение  $\min I_{N^\varepsilon}$  функционала (19) отличается от наименьшего значения  $\min I$  функционала (15) не более чем на заданную величину  $\varepsilon = 0.1$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} - \min I \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Поставленную задачу можно рассматривать как приближенное с точностью  $\varepsilon$  решение задачи (15) в классе кусочно-постоянных управлений.

По сравнению с общей постановкой задачи (4) – (7) имеем:

$$t_0 = 0, \quad t_F = \frac{\pi}{2}, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad y \in U = \mathbb{R}, \quad x(0) = (1, 1)^T, \quad f(t, x, y) = (x_2, -x_1 + y)^T,$$

$$f^0(t, x, y) = \frac{y^2}{2}, \quad g^+(y_{i-1}, y_i) = 0, \quad F(t_F, x(t_F), y_N) = 0, \quad \Gamma(t_F) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(\psi, t, x, y) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + y) - \frac{1}{2} y^2$$

и условия теоремы для задачи (16) – (19):

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = \psi_1, \quad \dot{y} = -y, \quad t \in T; \quad (21)$$

2) условия трансверсальности выполняются, так как вариации  $\delta t_F = 0$ ,  $\delta x(t_F) = 0$  при фиксированном правом конце траектории;

3) для всех допустимых вариаций  $\delta y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , выполняются неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\psi_2(t) - y_i] dt \cdot \delta y_i \leq 0 \Leftrightarrow y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi_2(t) dt, \quad (22)$$

поскольку ограничений на вариации  $\delta y_i$  нет;

4) в моменты переключений  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned}
& \psi_1(t_i)x_2(t_i) + \psi_2(t_i)[-x_1(t_i) + y_{i-1}] - \frac{1}{2}y_{i-1}^2 - \psi_1(t_i)x_2(t_i) - \\
& - \psi_2(t_i)[-x_1(t_i) + y_i] + \frac{1}{2}y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \psi_2(t_i)(y_{i-1} - y_i) - \frac{1}{2}(y_{i-1}^2 - y_i^2) = 0 \Rightarrow 2\psi_2(t_i) = y_{i-1} + y_i. \quad (23)
\end{aligned}$$

В последнем преобразовании уравнения учитывалось, что  $y_{i-1} \neq y_i$ , иначе нет переключения.

Таким образом, задача сведена к краевой задаче для уравнений движения (17) и сопряженной системы (21) с краевыми условиями (18). Для нахождения  $2N+1$  управляющих параметров  $t_1, \dots, t_N, y_0, y_1, \dots, y_N$  имеются  $2N+1$  уравнений (22) и (23).

Будем искать решение краевой задачи. Согласно уравнениям движения, траектория имеет вид

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= A_i \cos t + B_i \sin t + y_i, \\
x_2(t) &= -A_i \sin t + B_i \cos t, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (24)
\end{aligned}$$

Условия непрерывности траектории (24) в моменты переключений приводят к рекуррентным уравнениям

$$A_i = A_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_i = B_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Следовательно,

$$A_N = A_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_N = B_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \quad (26)$$

причем из начальных и конечных условий следует, что

$$A_0 = 1 - y_0, \quad B_0 = 1, \quad A_N = 0, \quad B_N = -y_N. \quad (27)$$

причем из начальных и конечных условий следует, что

Поэтому

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0, \quad 1 + y_N + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i = 0. \quad (28)$$

причем из начальных и конечных условий следует, что

Траектория движения имеет вид (24) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (25) – (27). Отметим сразу, что управление без переключения не является допустимым. В самом деле, при  $N = 0$  имеем  $y_N = y_0$ . Тогда уравнения (28) противоречат друг другу:  $1 - y_0 = 0$  и  $1 + y_0 = 0$ , что невозможно. Следовательно, допустимые управления обязательно имеют переключения, т.е.  $N \geq 1$ .

Траектория  $x(\cdot)$  определяется управляющими параметрами – значениями управления  $y_i$  и моментами переключений  $t_i$ , которые удовлетворяют системе уравнений (22), (23). Эти уравнения тригонометрические, так как вспомогательные функции  $\psi_1(\cdot)$ ,  $\psi_2(\cdot)$  – периодические, поскольку описываются уравнениями колебаний (21). Найти решение системы тригонометрических уравнений сложно. Для упрощения воспользуемся следующим соображением. График, представленный на рисунке 2, оптимального непрерывного управления  $u = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , в задаче (15)

симметричен относительно точки  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ . Предположим, что график оптимального

кусочно-постоянного управления  $y = y(t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , имеет тот же центр симметрии.

При этом будут выполняться равенства

$$y_i + y_{N-i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t_i + t_{N+1-i} = \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Неравенства для  $y_i$  и для  $t_i$  в (29) повторяются. Поэтому фактически в (29) имеется

$[N/2] + 1 + [(N+1)/2] = N+1$  равенств. Здесь  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

Значения  $y_i$  выражаются через  $\psi_2$  по формуле (22). Чтобы обеспечить равенства (29), график функции  $\psi_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , также должен иметь центр симметрии  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ . Поэтому из решений уравнений (21) нужно взять следующее:

$$\psi_1(t) = C \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad \psi_2(t) = -C \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Так как функции  $\psi_1$  является первообразной для  $\psi_2$ , условие (22) можно записать в виде

$$y_i = \frac{\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{C}{t_{i+1} - t_i} \left[ \cos\left(t_{i+1} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(t_i - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

или, выделяя общий множитель,

$$y_i = C \Delta_i, \quad \Delta_i = \frac{\left[ \cos\left(t_{i+1} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos(t_i) \right]}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (30)$$

Подставляя управление (30) в (23) и сокращая на множитель  $C$ , получаем

$$\Delta_i + \Delta_{i-1} - 2 \sin\left(t_i - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (31)$$

Количество уравнений в (31) из-за симметрии (29) можно уменьшить, полагая

$$i = 1, \dots, \left[ \frac{N+1}{2} \right].$$

Итак, для нахождения  $N$  моментов переключений составлена система (31)  $N$  трансцендентных уравнений. Пусть найдено решение  $t_1, \dots, t_N$  этой системы. Тогда значения управления можно вычислить по формуле (30). Нужно только определить значение произвольной постоянной  $C$ . Для этого воспользуемся первым уравнением в (28). Второе уравнение из-за условий симметрии (29) равносильно первому. Перепишем уравнение в виде

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0 \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=0}^N y_i (\cos t_{i+1} - \cos t_i) = 0.$$

Учитывая симметрию (29) и (30), получаем равенство

$$C = - \left\{ \sqrt{2} \sum_{i=0}^k \Delta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right\}^{-1}, \quad (32)$$

где  $k = \left[ \frac{N}{2} \right]$  – целая часть числа  $\frac{N}{2}$ .

Таким образом, при помощи необходимых условий задача поиска оптимального кусочно-постоянного управления сведена к решению системы  $N$  трансцендентных уравнений (31) относительно  $N$  неизвестных  $t_1, \dots, t_N$ , которые должны удовлетворять неравенствам (16). Если моменты переключений найдены, то

по формуле (32) определяем постоянную  $C$ , а затем по формулам (30) – значения управлений  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . После этого вычисляем минимальное значение функционала (19).

К сожалению, как говорилось ранее, указанный план трудно реализовать, так как система уравнений (31) весьма сложная. Ее численное решение является серьезной проблемой, не говоря об аналитическом решении, которое невозможно даже при  $N = 1$ . Поэтому был использован другой подход, который заключается в минимизации функционала  $I_N$  по моментам переключений. Действительно, при заданных моментах  $t_1, \dots, t_N$  функционал  $I_N$ , учитывая (30), можно представить в виде

$$I_N(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i) y_i^2(t_i, t_{i+1}). \quad (33)$$

Функция (33) зависит от  $k = \left[ \frac{N}{2} \right]$  моментов переключений, так как  $y_k = 0$  при четном

$N = 2k$  и  $t_{k+1} = \frac{\pi}{4}$  при нечетном  $N = 2k + 1$ . Ее нужно минимизировать при

ограничениях  $0 < t_1 < \dots < t_k < \frac{\pi}{4}$ . После нахождения моментов переключений  $t_1, \dots, t_k$ ,

доставляющих условный минимум функции (33), нужно проверить выполнение необходимых условий оптимальности, подставляя эти моменты в систему (31).

Таким образом, процедура приближенного решения задачи (19) при  $N \geq 1$  сводится к условной минимизации функции (33) с последующей проверкой выполнения равенств (31). Описанная процедура решения – численно-аналитическая, поскольку часть необходимых условий оптимальности использованы для получения

уравнений (30) – (32) и составления функции (33), минимизация которой производится численным методом.

Результаты приближенных вычислений представлены в таблице. Кроме минимальных значений функционала (19) и погрешности (20) в таблице приводится величина невязки  $|\delta|$ , которая вычисляется по значениям левых частей уравнений (31):

$$|\delta| = \sqrt{\delta_1^2 + \dots + \delta_k^2}, \quad \delta_i = \Delta_i + \Delta_{i-1} + 2 \sin(t_i - \frac{\pi}{4}), \quad i = 1, \dots, k = \left[ \frac{N}{2} \right].$$

Таблица. Результаты приближенных вычислений

Число переключений $N$	Минимальное значение функционала $\min I_N$	Невязка $ \delta $	Погрешность $\varepsilon_N = \min I_N - \min I$
1	4.57764	0	1.07376
2	3.90544	0.00046	0.40156
3	3.71780	0.00042	0.21393
4	3.63751	0.82095	0.13363
5	3.59548	0.68004	0.09160

Невязка характеризует точность приближенного решения системы (31), т.е. "степень выполнения" необходимых условий оптимальности.

Минимизация выполнялась перебором на сгущающихся сетках. Наименьший шаг сетки  $\Delta t = 0.001$ . При пяти переключениях погрешность  $\varepsilon_5 = 0.091$  оказалась меньше допустимой погрешности  $\varepsilon = 0.1$ , поэтому процесс решения закончился. Оптимальные моменты переключений и значений управления следующие:

$$t_1 = 0.284, t_2 = 0.540, t_3 = 0.785, t_4 = 1.031, t_5 = 1.287;$$

$$y_0 = -3.0402, y_1 = -1.8498, y_2 = -0.6208, y_3 = 0.6208, y_4 = 1.8498, y_5 = 3.0402.$$

С ростом количества переключений величина минимального значения функционала (19), разумеется, монотонно убывает, а невязка – меняется нерегулярно. Видимо, чем больше уравнений в системе (31), тем больше невязка. На рисунке 2 представлены графики кусочно – непрерывного (черный) и кусочно-постоянного управления с пятью переключениями (красный) для задачи (15)

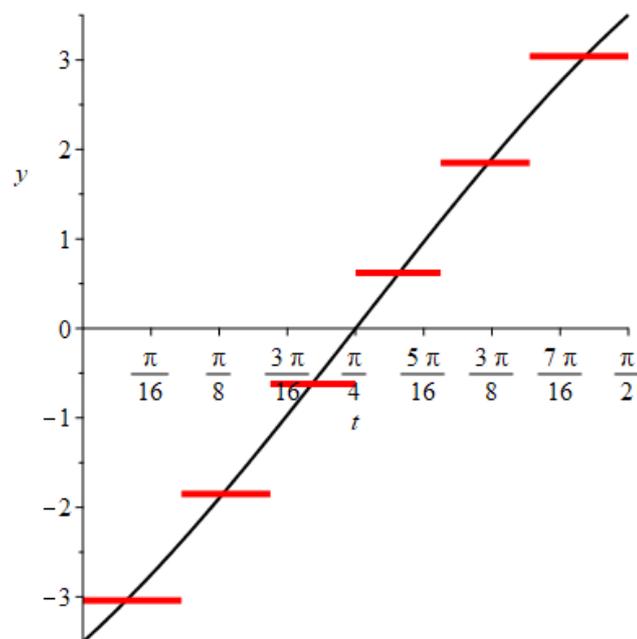


Рисунок 2. График кусочно-постоянного управления с пятью переключениями.

## Заключение

На основе необходимых условий оптимальности разработан численно-аналитический алгоритм минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального управления непрерывными системами. Работа алгоритма продемонстрирована на решении академического примера задачи управления линейным осциллятором с квадратичным функционалом в классе кусочно-постоянных управлений. Дальнейшие исследования связаны с распространением полученного алгоритма на более сложные модели движения управляемых динамических системам.

## Список источников

1. Savkin A.V., Evans R.J. Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems, Boston, Birkhäuser, 2002. DOI:[10.1007/978-1-4612-0107-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0107-6)
2. Hedlund S., Rantzer A. Optimal Control of Hybrid Systems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, pp. 3972-3977. DOI:[10.1109/CDC.1999.827981](https://doi.org/10.1109/CDC.1999.827981)
3. Гурман В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 70-75.
4. Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K. A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, no. 1, pp. 31-45.

5. Liberzon D. Switching in Systems and Control, Berlin, Springer, 2003, 243 p.
6. Кезлинг Г.Б. Технические средства АСУ. - Л.: Машиностроение, 1986. Т. 2. – 780 с.
7. Бортакoвский А.С. Синтез лoгико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 41-55.
8. Жук К.Д., Тимченко А.А., Даленко Т.И. Исследование структур и моделирование лoгико-динамических систем. - Киев: Наукова думка, 1975. - 199 с.
9. Бортакoвский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными лoгико-динамическими системами // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: <http://www.mai.ru/publications/index.php?ID=33013>
10. Бортакoвский А.С. Необходимые условия оптимальности автоматной части лoгико-динамической системы // Труды МИАН. 2008. Т. 262. С. 50–63.
11. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudy.mai.ru/published.php?ID=73376>
12. Пегачкова Е.А. Приближенный синтез оптимальных систем автоматного типа // Труды МАИ. 2011. № 49. URL: [http://trudymai.ru/published.php?ID=27614&PAGEN\\_2=2](http://trudymai.ru/published.php?ID=27614&PAGEN_2=2)
13. Sun Z., Ge S. Analysis and Synthesis of Switched Linear Control Systems // Automatica, 2005, vol. 41 (2), pp. 181-195. DOI:[10.1016/j.automatica.2004.09.015](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.09.015)

14. Xu X., Antsaklis P.J. Optimal Control of Switched Systems Based on Parameterization of the Switching Instants // IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, vol. 49 (1), pp. 2-16. DOI:[10.1109/TAC.2003.821417](https://doi.org/10.1109/TAC.2003.821417)
15. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 29-46.
16. Bortakovsky A.S., Uryupin I.V. Optimization of Switchable Systems' Trajectories // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2021, vol. 60 (5), pp.701–718. DOI:[10.1134/s1064230721050051](https://doi.org/10.1134/s1064230721050051)
17. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Компьютерная технология синтеза оптимальных линейных переключаемых систем // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 11. С. 13 – 22.
18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Физматгиз, 1961. - 391 с.
19. Урюпин И.В. Синтез оптимальных кусочно-гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93440>
20. Журавин Ю. Разгонный блок "Бриз-М" // Новости космонавтики. 2000. Т. 10. № 8(211). С. 52-55.

21. Бортакoвский А.С., Коновалова А.А. Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 38.
22. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. - М.: Физматлит, 2005. - 391 с.
23. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle // Systems & Control Letters, 2008, pp. 964–970. DOI:[10.1016/j.sysconle.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.05.006)

## References

1. Savkin A.V., Evans R.J. *Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems*, Boston, Birkhäuser, 2002. DOI:[10.1007/978-1-4612-0107-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0107-6)
2. Hedlund S., Rantzer A. Optimal Control of Hybrid Systems, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999, pp. 3972-3977. DOI:[10.1109/CDC.1999.827981](https://doi.org/10.1109/CDC.1999.827981)
3. Gurman V.I. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2004, no. 4, pp. 70-75.
4. Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K. A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 1, pp. 31-45.
5. Liberzon D. *Switching in Systems and Control*, Berlin, Springer, 2003, 243 p.

6. Kezling G.B. *Tekhnicheskie sredstva ASU* (Technical means automatic control system), Leningrad, Mashinostroenie, 1986. Vol. 2, 780 p.
7. Bortakovskii A.S. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2010, no. 2, pp. 41-55.
8. Zhuk K.D., Timchenko A.A., Dalenko T.I. *Issledovanie struktur i modelirovanie logiko-dinamicheskikh system* (Research of structures and modeling of logical-dynamic systems), Kiev, Naukova dumka, 1975, 199 p.
9. Bortakovskii A.S., Pegachkova E.A. *Trudy MAI*, 2007, no. 27. URL: <http://www.mai.ru/eng/publications/index.php?ID=33013>
10. Bortakovskii A.S. *Trudy MIAN*, 2008, vol. 262, pp. 50–63.
11. Nemychenkov G.I. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <http://trudy.mai.ru/eng/published.php?ID=73376>
12. Pegachkova E.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 49. URL: [http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=27614&PAGEN\\_2=2](http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=27614&PAGEN_2=2)
13. Sun Z., Ge S. Analysis and Synthesis of Switched Linear Control Systems, *Automatica*, 2005, vol. 41 (2), pp. 181-195. DOI:[10.1016/j.automatica.2004.09.015](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.09.015)
14. Xu X., Antsaklis P.J. Optimal Control of Switched Systems Based on Parameterization of the Switching Instants, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, vol. 49 (1), pp. 2-16. DOI:[10.1109/TAC.2003.821417](https://doi.org/10.1109/TAC.2003.821417)
15. Bortakovskii A.S., Uryupin I.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2019, no. 4, pp. 29-46.

16. Bortakovsky A.S., Uryupin I.V. Optimization of Switchable Systems' Trajectories, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60 (5), pp.701–718.  
DOI: [10.1134/s1064230721050051](https://doi.org/10.1134/s1064230721050051)
17. Bortakovskii A.S., Uryupin I.V. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*, 2019, no. 11, pp. 13 – 22.
18. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of optimal processes), Moscow, Fizmatgiz, 1961, 391 p.
19. Uryupin I.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93440>
20. Zhuravin Yu. Razgonnyi blok "Briz-M", *Novosti kosmonavтики*, 2000, vol. 10, no. 8(211), pp. 52-55.
21. Bortakovskii A.S., Konovalova A.A. *Teoriya i sistemy upravleniya*, 2014, no. 5, pp. 38.
22. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. *Geometricheskaya teoriya upravleniya* (Geometric control theory), Moscow, Fizmatlit, 2005, 391 p.
23. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle, *Systems & Control Letters*, 2008, pp. 964–970.  
DOI: [10.1016/j.sysconle.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.05.006)

Статья поступила в редакцию 14.11.2021; одобрена после рецензирования 29.11.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 14.11.2021; approved after reviewing on 29.11.2021; accepted for publication on 21.11.2021.