

Научная статья

УДК 539.31

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179681>

## **МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

**Сергей Алексеевич Боршевецкий**

ПАО «Яковлев», Москва, Россия

[wrdeew@bk.ru](mailto:wrdeew@bk.ru)

*Аннотация.* Аналитический подход в задачах с крупногабаритными пластинами или оболочках с большим количеством дополнительных опор имеет множество трудностей в силу размера получаемой системы уравнений. В статье предлагается методика определения расположения сосредоточенных дополнительных опор модели движения пластины Кирхгофа в случае приложения произвольной нагрузки. Методика базируется на использовании известных математических методов: функции влияния и метода компенсирующих нагрузок. Достоинством представленной методики является ее аналитический вид вычислений, что позволяет, в теории, рассматривать произвольные виды нагружения (в том числе и воздействие на площадку), физические и геометрические характеристики исследуемой пластины, а также различные варианты закрепления конструкции (в том числе линейные

закрепления и закрепления по площади). В конце статьи даны ссылки на апробации данной методики с тремя видами произвольной нагрузки.

**Ключевые слова:** пластина Кирхгофа, произвольная нагрузка, жесткость конструкции, шарнирно опертая пластина, функция влияния

**Для цитирования:** Боршевецкий С.А. Методика определения расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 135. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=179681>

Original article

## **METHOD FOR DETERMINING THE LOCATION OF ADDITIONAL SUPPORTS OF A SIMPLY SUPPORTED KIRCHHOFF PLATE UNDER RANDOM ACTION**

**Sergey A. Borshevetskiy**

PJSC Yakovlev, Moscow, Russia

[wrdeww@bk.ru](mailto:wrdeww@bk.ru)

**Abstract.** An integral trend in modern mechanical engineering is to increase the efficiency of manufactured products. In aircraft such as airplanes, this could be achieved by reducing the weight of the structure, which is achieved through the using of skins and panels, which are thin shells that are not capable of independently carrying any small load. Therefore, to increase rigidity, they are additionally fixed. The analytical approach to problems with large plates or shells with a large number of additional supports has many difficulties due to the size of the resulting system.

The main objective of the new proposed method is to obtain analytical relationships between the type of external load and the location of additional supports based on the conditions of structural rigidity. The problem solving in several stages and uses well-known mathematical methods.

The first step is to determine the maximum size of a single segment of the structure that satisfies the required stiffness condition. For universality, the problem is solved using the influence function (Green's) and the system's response to a unit load is obtained in the form of the Dirac delta function.

The second stage is to determine the location of only four (and in a non-stationary setting, only two) additional supports. The solution is the maximum value of the radius of the location of the fastenings that satisfy the condition of structural rigidity.

At the third stage, the required number and location coordinates of additional supports calculating for the entire structure as a whole, with possible adjustments to the sizes of the resulting segments.

The last stage can be numerical verification using modern modeling and calculation methods.

The undoubted advantage of the proposed method is its analytical form of solving the problem, which allows the method to using for various geometric and physical characteristics of the plates, as well as to apply an arbitrary load to any place. In general, the technique could be extend to curved shells. This will require the transition of the equation of motion of the structure to the local coordinate system of the shell, which will subsequently allow the shell to be “unfolded” into a rectangular plate. At the same time, the analytical

form of solving the problem, as well as the essence of the technique and its advantages, are completely preserved.

**Keywords:** Kirchhoff plate, structural rigidity, random load, structural rigidity, pivotally supported plate, influence function

**For citation:** Borshevetskiy S.A. Method for determining the location of additional supports of a simply supported Kirchhoff plate under random action. *Trudy MAI*, 2024, no. 135. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179681>

## 1. Введение

Неотъемлемой тенденцией современного машиностроения является повышение экономичности производимой продукции. В таких летательных аппаратах, как самолеты это может быть достигнуто за счет снижения веса конструкции, которое достигается путем использования обшивок и панелей, представляющих собой тонкие оболочки, не способные самостоятельно нести сколь угодно малую нагрузку. Поэтому, для увеличения жесткости, их дополнительно закрепляют. Аналитический подход в задачах с крупногабаритными пластинами или оболочках с большим количеством дополнительных опор имеет множество трудностей в силу размера получаемой системы уравнений: их число совпадает с количеством дополнительных опор. Проблема определения расположения и необходимого количества дополнительных опор для выполнения условия жесткости конструкции является актуальной при разработке новых конструкций.

Другим способом увеличения жесткости конструкций является использование вафельных оболочек. Данный вид оболочек широко используется в современной

ракетно-космической отрасли и авиационной технике. Здесь необходимо определить геометрию обшивки и подкрепляющих ее ребер для избегания локальной потери устойчивости конструкции. Наиболее подробно задачи теории вафельных оболочек рассмотрены в пособии [1]. Подтверждением актуальности работ в данном направлении является недавняя работа [2].

Работы [3, 4] демонстрируют энергетический подход к решению задачи о подкрепленной оболочке. Отмечается, что использование уточненной теории с более высоким порядком аппроксимации обладает большей точностью, чем традиционные «простые» модели Кирхгофа и Тимошенко.

Основной задачей в предлагаемой методике является определение аналитических зависимостей между видом внешней нагрузки и расположением дополнительных опор для шарнирно опертой пластины Кирхгофа, исходя из условия жесткости конструкции. Такой метод расчета является крайне полезным для прикладных расчетов, так как позволяет брать готовую или почти готовую формулу решения задачи и подставлять любые частные случаи геометрии и нагрузки. А сама методика базируется на использовании известных математических методов.

Для универсальной подстановки нагрузки используется методика решения на основании функции влияния (Грина). Это позволяет получить решение, как реакцию системы на произвольное воздействие дельта-функции Дирака, а затем в ходе решения выполнять свертку с интересующей нагрузкой. Работы [5 - 9] отлично демонстрируют использование данного метода.

Замена опор соответствующими нагрузками является частным случаем метода компенсирующих нагрузок [10]. Данный метод позволяет раскрыть статическую

неопределимость постановки задачи. Примерами использования данного метода могут служить следующие работы [11 - 13].

В завершении аналитического расчета можно воспользоваться методом конечных элементов для верификации полученных результатов. Это самый распространенный в современном машиностроении способ выполнения проверочных расчетов.

Все вышеперечисленное является достоинством предлагаемой методики. Стоит отметить возможность применения данной методики и для оболочек произвольной формы. Потребуется лишь использование локальной системы координат, позволяющей развернуть оболочку в прямоугольную пластину. Для прямоугольных пластин методика прошла апробацию в работах [14 - 16]. Также были рассмотрено выполнение методики для модели движения пластины Тимошенко [17, 18].

## **2. Общая постановка задачи**

В качестве исследуемой модели рассматривается прямоугольная шарнирно опертая тонкая пластина размерами  $a$  на  $b$  постоянной толщины  $h$ , имеющая множество дополнительных опор по площади (Рисунок 1). Материал пластины упругий и изотропный. Начало декартовой системы координат расположено в левом верхнем углу срединной поверхности пластины. Предполагается, что дополнительные опоры расставлены с одинаковым шагом по осям координат, образуя равные сегменты таким образом, чтобы выполнялось условие жесткости конструкции: прогиб не превышает заранее заданного значения. Однако, в силу того, что теории Кирхгофа применима лишь для тонких пластин, максимальный прогиб не должен превышать толщины пластины.

$$\begin{aligned} |w_{\max}(x, y, t)| &\leq w_0, \\ w_0 &\leq h. \end{aligned} \quad (1)$$

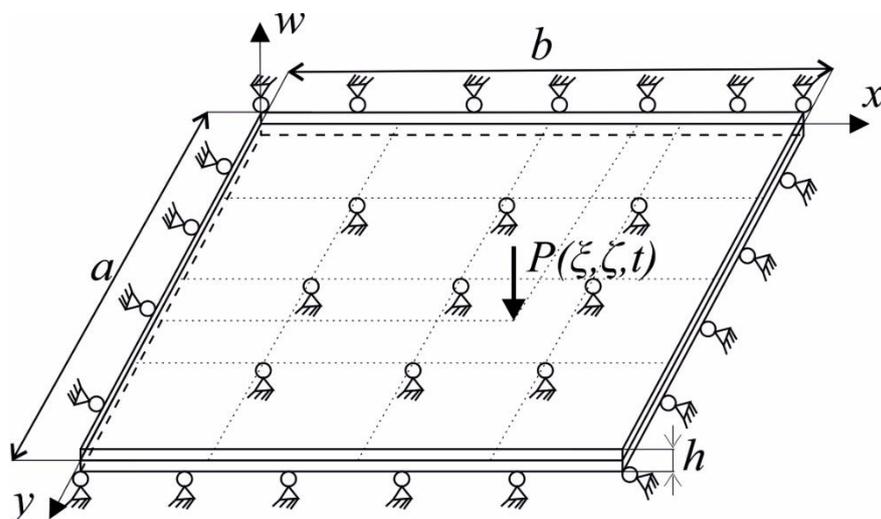


Рисунок 1 — Общая постановка задачи

В начальный момент времени в случайное место пластины прикладывается произвольная сосредоточенная нагрузка. Требуется определить необходимое количество и расположение дополнительных опор, удовлетворяющих условию жесткости конструкции (1). Однако, чтобы расставить множество дополнительных опоры, необходимо сначала определить размер единичного сегмента, удовлетворяющего условию жесткости конструкции. Размер такого сегмента определяется из решения следующей, более простой, задачи.

В качестве объекта исследования берем шарнирно опертую со всех сторон тонкую прямоугольную пластину размерами  $a$  на  $b$  постоянной толщины  $h$ , имеющую лишь четыре дополнительные опоры (Рисунок 2). Материал пластины упругий и изотропный. Начало декартовой системы координат расположено в левом верхнем углу срединной поверхности пластины. В центр пластины с координатами  $(X, Y)$  приложена, в общем случае, нестационарная сосредоточенная нагрузка  $P(X, Y, t)$ .

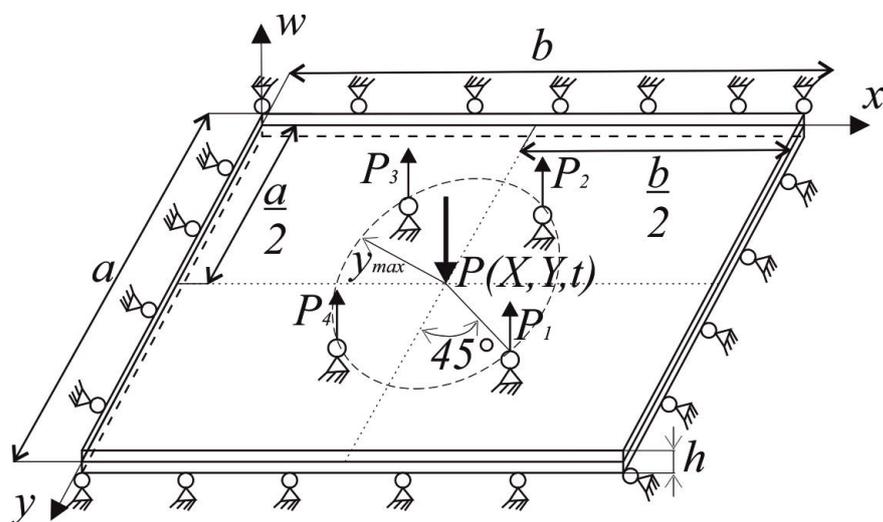


Рисунок 2 — Постановка задачи для определения размера сегмента

Вокруг точки приложения нагрузки на некотором радиусе  $y_{max}$ , подлежащем определению, установлены четыре дополнительные опоры, образующие квадратный сегмент. Требуется определить радиус расположения дополнительных опор, основывая на том факте, что максимальный прогиб не должен превышать предельно допустимой величины  $w_0$ .

### 3. Общее решение задачи

Уравнение движения пластины Кирхгофа в перемещениях [19] запишется следующим образом:

$$\rho h \ddot{w}(x, y, t) = -D \Delta \Delta w(x, y, t) + P(t),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где  $w$  — нормальный прогиб,  $\rho$  — плотность материала пластины,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ — цилиндрическая жесткость.}$$

Запишем начальные условия:

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

и граничные условия:

$$w(x, y, t) \Big|_{x=0, b} = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0, b} = 0,$$

$$w(x, y, t) \Big|_{y=0, a} = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{y=0, a} = 0.$$

Граничные условия для дополнительных опор имеют вид:

$$w(q_i, z_i, t) = 0, \quad i = 1..4, \quad (3)$$

где

$$q_1 = \frac{b}{2} + y_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_1 = \frac{a}{2} + y_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (4)$$

$$q_i = q_{i-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \sin\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right), \quad i = 2..4,$$

$$z_i = z_{i-1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y_{\max} \cos\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right).$$

Уравнение движения в перемещениях (2), НУ и ГУ образуют начально-краевую задачу о нестационарных вынужденных колебаниях. Решение начально-краевой задачи будем искать при помощи функции влияния. Представим прогиб как свертку этой функции с действующей нагрузкой:

$$w(x, y, t) = G(x, y, t; \xi, \zeta) * P(t) + \sum_{i=1}^4 G(x, y, t; q_i, z_i) * P_i(t). \quad (5)$$

Тогда постановка задачи через функцию влияния переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho h \ddot{G}(x, y, t) &= -D \Delta \Delta G(x, y, t) + \delta(x - \xi, y - \zeta) \delta(t), \\ G(x, y, 0) &= \left. \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ G|_{x=0, a} &= G|_{y=0, b} = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right|_{x=0, a} = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right|_{y=0, b} = 0.\end{aligned}$$

Выполним интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  для уравнения движения. Тогда, с учетом начальных условий получим:

$$\rho h s^2 G^L(x, y, s) = -D \Delta \Delta G^L(x, y, s) - \delta(x - \xi, y - \zeta) 1(s).$$

Разложим в тригонометрические ряды Фурье по координатам всех входящих в уравнение движения пластины функций таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия по краям пластины [20, 21].

$$\begin{aligned}G^L(x, y, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}^L(s) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y), \\ \delta(x - \xi, y - \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{\pi n}{b}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{a}, \\ \delta_{nm}(\xi, \zeta) &= \frac{4}{ab} \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \zeta).\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}\rho h \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} s^2 G_{nm}^L(s) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y) &= -D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2 G_{nm}^L(s) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm}(\xi, \zeta) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y).\end{aligned}$$

Опустив знаки суммирования и сократив тригонометрические множители, получим уравнение движения в коэффициентах рядов функции влияния в изображениях:

$$\rho h s^2 G_{nm}^L(s) = -D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2 G_{nm}^L(s) + \delta_{nm}(\xi, \zeta).$$

Решив уравнение относительно коэффициентов функции влияния в изображениях, получим:

$$G_{nm}^L(s) = \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta)}{\rho h s^2 + D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2}.$$

Вернемся в оригиналы коэффициентов функции влияния, выполнив обратное преобразование Лапласа при помощи таблиц операционного исчисления [22]:

$$G_{nm}(t) = \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta)}{\rho h \sqrt{\frac{D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2}{\rho h}}} \sin\left(\sqrt{\frac{D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2}{\rho h}} t\right).$$

Тогда искомая функция влияния имеет вид:

$$G(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_{nm}(\xi, \zeta)}{\sqrt{D \rho h (\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{D(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^2}{\rho h}} t\right) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m y).$$

Следующим шагом станет определение реакций в опорах. Они определяются из граничных условий в опорах (3). Для этого раскроем свёртку функции влияния с действующей нагрузкой и реакциями в опорах (5):

$$w(x, y, t) = \int_0^t G(x, y, t - \tau; \xi, \zeta) P(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^4 \int_0^t G(x, y, t - \tau; q_i, z_i) P_i(\tau) d\tau.$$

Для интегралов с неизвестными функциями реакций в опорах применим согласно [23] дискретизацию с частичным интегрированием на  $T+1$  частей:

$$w(x, y, t_j) = \int_0^{t_i} G(x, y, t_i - \tau; \xi, \zeta) P(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=2}^{j+1} P_i(t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} G(x, y, t_j - \tau; q_i, z_i) d\tau, \quad j = 2..T + 1. \quad (6)$$

В таком случае все интегралы, входящие в (6), являются берущимися, что в дальнейшем будет иметься ввиду, заменив интегралы взятыми обозначениями:

$$\int_0^{t_i} G(x, y, t_i - \tau; \xi, \zeta) P(\tau) d\tau \rightarrow G(x, y, t_i; \xi, \zeta) P(t_i),$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} G(x, y, t_j - \tau; q_i, z_i) d\tau \rightarrow G(x, y, t_j, t_k, t_{k-1}; q_i, z_i).$$

Применим на запись функции прогиба (6) граничные условия в опорах (3).

Получаем СЛАУ в различные моменты времени, зависящие от предыдущего. Реакции в опорах в каждый из моментов времени ищутся итерационно. Дискретизация по времени выполняется с одинаковым шагом, определяющимся рассматриваемым интервалом времени и возможностями ЭВМ. Так как приоритетом методики является сохранение аналитического вида решения, то в связи с трудностью, временем и «тяжестью» вычислений реакций в дополнительных опорах в каждый момент времени и дальнейшей работы с ними, рекомендуется использовать не более десяти точек дискретизации (включая ноль). Для точности решения далее будет применяться графически метод последовательных приближений.

В момент времени  $t_1=0$  прогиб отсутствует из начальных условий. Следовательно, и реакции в дополнительных опорах равны нулю. В момент времени  $t_2$  реакции в дополнительных опорах вычисляются по правилу Крамера из СЛАУ, записанного в матричном виде:

$$M_{4 \times 4}(t_2) \cdot \begin{pmatrix} P_1(t_2) \\ P_2(t_2) \\ P_3(t_2) \\ P_4(t_2) \end{pmatrix} = -P(t_2) \begin{pmatrix} G(q_1, z_1, t_2; \xi, \zeta) \\ G(q_2, z_2, t_2; \xi, \zeta) \\ G(q_3, z_3, t_2; \xi, \zeta) \\ G(q_4, z_4, t_2; \xi, \zeta) \end{pmatrix},$$

$$M_{4 \times 4}(t_2) = \begin{pmatrix} G(q_1, z_1, t_2; q_1, z_1) & G(q_1, z_1, t_2; q_2, z_2) & G(q_1, z_1, t_2; q_3, z_3) & G(q_1, z_1, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_2, z_2, t_2; q_1, z_1) & G(q_2, z_2, t_2; q_2, z_2) & G(q_2, z_2, t_2; q_3, z_3) & G(q_2, z_2, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_3, z_3, t_2; q_1, z_1) & G(q_3, z_3, t_2; q_2, z_2) & G(q_3, z_3, t_2; q_3, z_3) & G(q_3, z_3, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_4, z_4, t_2; q_1, z_1) & G(q_4, z_4, t_2; q_2, z_2) & G(q_4, z_4, t_2; q_3, z_3) & G(q_4, z_4, t_2; q_4, z_4) \end{pmatrix},$$

Тогда реакции в опорах определяются:

$$P_i(t_2) = \frac{\Delta_i(t_2)}{\Delta(t_2)},$$

$$\Delta_i(t_2) = \begin{vmatrix} G(q_1, z_1, t_2; q_1, z_1) \dots - P(t_2)G(q_1, z_1, t_2; \xi, \zeta) \dots G(q_1, z_1, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_2, z_2, t_2; q_1, z_1) \dots - P(t_2)G(q_2, z_2, t_2; \xi, \zeta) \dots G(q_2, z_2, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_3, z_3, t_2; q_1, z_1) \dots - P(t_2)G(q_3, z_3, t_2; \xi, \zeta) \dots G(q_3, z_3, t_2; q_4, z_4) \\ G(q_4, z_4, t_2; q_1, z_1) \dots - P(t_2)G(q_4, z_4, t_2; \xi, \zeta) \dots G(q_4, z_4, t_2; q_4, z_4) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(t_2) = |M_{4 \times 4}(t_2)|.$$

В последующих итерациях учитываются предыдущие значения реакций в опорах. И система уравнений принимает вид:

$$M_{4 \times 4}(t_j) \cdot \begin{pmatrix} P_1(t_j) \\ P_2(t_j) \\ P_3(t_j) \\ P_4(t_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sum_1(t_j) \\ Sum_2(t_j) \\ Sum_3(t_j) \\ Sum_4(t_j) \end{pmatrix},$$

$$M_{4 \times 4}(t_j) = \begin{pmatrix} G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) & G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_2, z_2) & G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_3, z_3) & G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) & G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_2, z_2) & G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_3, z_3) & G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) & G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_2, z_2) & G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_3, z_3) & G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) & G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_2, z_2) & G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_3, z_3) & G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \end{pmatrix},$$

где в вектор-столбец действующей нагрузки входят суммы действующей нагрузки с реакциями в опорах, в предыдущем моменте времени:

$$Sum_l(t_j) = -P(t_j)G(q_l, z_l, t_j; \xi, \zeta) - \sum_{i=2}^{j-1} \left( \sum_{k=1}^4 P_k(t_i)G(q_l, z_l, t_j, t_{i-1}, t_i; q_k, z_k) \right), \quad l=1..4.$$

Тогда реакции в опорах в момент времени  $t_j$ ,  $j=3..T+1$  определяются:

$$P_i(t_j) = \frac{\Delta_i(t_j)}{\Delta(t_j)},$$

$$\Delta_i(t_j) = \begin{vmatrix} G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) \dots - P(t_j)G(q_1, z_1, t_j; \xi, \zeta) \dots G(q_1, z_1, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) \dots - P(t_j)G(q_2, z_2, t_j; \xi, \zeta) \dots G(q_2, z_2, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) \dots - P(t_j)G(q_3, z_3, t_j; \xi, \zeta) \dots G(q_3, z_3, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \\ G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_1, z_1) \dots - P(t_j)G(q_4, z_4, t_j; \xi, \zeta) \dots G(q_4, z_4, t_j, t_{i-1}, t_i; q_4, z_4) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(t_j) = |M_{4 \times 4}(t_j)|.$$

Реакции в опорах в каждый момент времени найдены.

Подставляя все найденное в условие жесткости конструкции (1), получаем уравнения условия жесткости конструкции относительного искомого параметра  $u_{max}$  в моменты времени  $t_j$ . Однако момент времени, при котором радиус расположения дополнительных опор будет минимальным, неизвестен. Поэтому будем применять графический метод последовательных приближений. Суть метода заключается в том, чтобы построить график зависимости радиусов расположения дополнительных опор

$u_{max}$  в каждый момент времени из выбранного заранее интервала. Затем увидеть экстремум или последовательное увеличение радиуса  $u_{max}$  в двух соседних моментах времени и крайнее значение этого «перегиба» взять за новую границу рассматриваемого интервала времени. Выполнить заново дискретизацию по времени, определение реакций в дополнительных опорах и снова прийти к графику зависимости. Условием остановки будет нахождение экстремума или последовательного увеличения радиуса расположения дополнительных опор, отличающихся по значению не более чем на 5%.

Из найденного радиуса с помощью геометрических соотношений (4) находятся координаты расположения четырех дополнительных опор. Вычитая численные значения координат соседних опор определяется сторона и, как следствие, размер единичного квадратного сегмента пластины. Далее, по всей площади искомой пластины расставляются дополнительные опоры с шагом, соответствующему единичному сегменту. При этом допускается коррекция в сторону уменьшения геометрического размера для целочисленного разбиения пластины на сегменты. На этом задача определения расположения дополнительных опор завершается.

Верификация возможна, например, с помощью метода конечных элементов. В апробации методики пластина с четырьмя и многими дополнительными опорами моделировалась в программном комплексе Ansys Workbench с применением оболочечного конечного элемента SHELL181 [24]. Во всех расчетах выполнялись условие жесткости конструкции, а также граничные условия. При этом в случае искомой пластины со многими дополнительными опорами условие жесткости выполнялось в произвольном месте приложения нагрузки.

#### 4. Заключение

В работе описывается новая методика определения расположения дополнительных опор из условия жесткости конструкции на основании простых математических методов. Аналитический вид получаемого решения позволяет применять методику для различных геометрических и физических характеристиках пластин, а также прикладывать произвольную нагрузку в случайное место. В ссылках на апробации наглядно демонстрируется выполнение поставленной задачи, а также показывает универсальность по видам приложенных нагрузок.

В целом, методика может быть применена и на оболочки криволинейной формы. Для этого потребуется переход уравнения движения конструкции в локальную систему координат оболочки, позволяющая в дальнейшем «развернуть» оболочку в прямоугольную пластину. При этом аналитический вид решения задачи, а также суть методики и ее преимущества полностью сохраняются.

#### Список источников

1. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1994. - 384 с.
2. Печников В.П., Захаров Р.В., Тарасова А.В. Проектирование вафельных оболочек топливных баков ракеты с учетом пластических деформаций // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 11 (71). DOI: [10.18698/2308-6033-2017-11-1703](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2017-11-1703)
3. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104174>

4. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98866>
5. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25. № 1. С. 111-126. DOI: [10.14498/vsgtu1793](https://doi.org/10.14498/vsgtu1793)
6. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)
7. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenko G.V., Hein T.Z. Green's Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Plate // Journal of the Balkan Tribological Association, 2021, vol. 27, no. 5, pp. 747-761. DOI: [10.5937/jaes0-28205](https://doi.org/10.5937/jaes0-28205)
8. Lokteva Natalia A., Serdyuk Dmitry O., Skopintsev Pavel D. Non-Stationary Influence Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Shell // Journal of Applied Engineering Sciences, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 737-744. DOI: [10.5937/jaes0-28205](https://doi.org/10.5937/jaes0-28205)
9. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
10. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек. - Харьков: Б. и., 1992. - 92 с.

11. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с локальными шарнирными опорами // Материалы XII международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороге «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 24–25 ноября 2022): сборник трудов. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2022. С. 205-207.
12. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of a problem of unsymmetric bending of infinite ice slab with circular opening // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 50–55. DOI: [10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55)
13. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 71–77. DOI: [10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77)
14. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение нормальных перемещений шарнирно опертой пластины с дополнительными опорами под воздействием сосредоточенной силы // Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Т.2. – М.: ООО ТРПИ, 2021. С. 19–20.
15. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171384>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)

16. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение положения дополнительных опор для прямоугольной шарнирно опертой пластины при нестационарном воздействии на нее // Материалы международной молодежной научной конференции «XXV Туполевские чтения (школа молодых ученых)». Т. 2. – Казань: Изд-во ИП Сагиева А.Р., 2021. С. 395-400.
17. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение расположения дополнительных опор для прямоугольной пластины Тимошенко при воздействии сосредоточенной нагрузки // Материалы XII международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороге «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 24–25 ноября 2022): сборник трудов. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2022. С. 171–172.
18. Боршевецкий С.А., Локтева Н.А. Определение расположения дополнительных опор в пластине Тимошенко при гармоническом воздействии // 12-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»: сборник трудов. - М.: ООО «Сам Полиграфист», 2022. С. 438–447.
19. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
20. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. - М.: Наука, 1968. - 456 с.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. - 832 с.

22. Диткин В.А., Кузнецов П.И. Справочник по операционному исчислению. – М.:-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 255 с.
23. Воропай А.В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков: Изд-во "Лидер", 2018. – 212 с.
24. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

## References

1. Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruksii* (Design of thin-walled structures), Moscow, Mashinostroenie, 1994, 384 p.
2. Pechnikov V.P., Zakharov R.V., Tarasova A.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2017, no. 11 (71), DOI: [10.18698/2308-6033-2017-11-1703](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2017-11-1703)
3. Firsanov V.V., Fam V.T. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104174>
4. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>
5. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki»*, 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111-126. DOI: [10.14498/vsgtu1793](https://doi.org/10.14498/vsgtu1793)
6. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

7. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Green's Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Plate, *Journal of the Balkan Tribological Association*, 2021, vol. 27, no. 5, pp. 747-761. DOI: [10.5937/jaes0-28205](https://doi.org/10.5937/jaes0-28205)
8. Lokteva Natalia A., Serdyuk Dmitry O., Skopintsev Pavel D. Non-Stationary Influence Function for an Unbounded Anisotropic Kirchhoff-Love Shell, *Journal of Applied Engineering Sciences*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 737-744. DOI: [10.5937/jaes0-28205](https://doi.org/10.5937/jaes0-28205)
9. Levitskii D.Yu., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
10. Ventsel' E.S., Dzhhan-Temirov K.E., Trofimov A.M., Negol'sha E.V. *Metod kompensiruyushchikh nagruzok v zadachakh teorii tonkikh plastinok i obolochek* (Method of compensating loads in problems of the theory of thin plates and shells), Khar'kov, B. i., 1992, 92 p.
11. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Materialy XII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posvyashchennoi 160-letiyu Belorusskoi zheleznoi doroge «Problemy bezopasnosti na transporte»*: sbornik trudov. Gomel', Belorusskii gosudarstvennyi universitet transporta, 2022, pp. 205-207.
12. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of a problem of unsymmetric bending of infinite ice slab with circular opening, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 50–55. DOI: [10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-50-55)
13. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 71–77. DOI: [10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77)

14. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *Materialy XXVII Mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova «Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred»*. Vol. 2. Moscow, OOO TRP, 2021, pp. 19–20.
15. Borshevetskii S.A. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171384>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)
16. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *Materialy mezhdunarodnoi molodezhnoi nauchnoi konferentsii «XXV Tupolevskie chteniya (shkola molodykh uchenykh)»*. Vol. 2. Kazan', Izd-vo IP Sagieva A.R., 2021, pp. 395-400.
17. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *Materialy XII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posvyashchennoi 160-letiyu Belorusskoi zheleznoi doroge «Problemy bezopasnosti na transporte»: sbornik trudov*. Gomel', Belorusskii gosudarstvennyi universitet transporta, 2022, 171–172.
18. Borshevetskii S.A., Lokteva N.A. *12-ya Vserossiiskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem «Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, slozhnykh i geterogennykh sred»: sbornik trudov*. Moscow, OOO «Sam Poligrafist», 2022, pp. 438–447.
19. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous environments), Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
20. Chernina V.S. *Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniya* (Statics of thin walled shells of rotation), Moscow, Nauka, 1968, 456 p.
21. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* (Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers), Moscow, Nauka, 1974, 832 p.

22. Ditkin V.A., Kuznetsov P.I. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Handbook of Operational Calculus), Moscow-Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1951, 255 p.
23. Voropai A.V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* (Integral Volterra equations in incorrect problems of non-stationary deformation of plates), Khar'kov, Izd-vo "Lider", 2018, 212 p.
24. Basov K.A. *ANSYS: spravochnik pol'zovatelya* (ANSYS: User's guide), Moscow, DMK Press, 2005, 640 p.

Статья поступила в редакцию 18.03.2024

Одобрена после рецензирования 20.03.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 18.03.2024; approved after reviewing on 20.03.2024; accepted for publication on 26.04.2024