

УДК: 533.6.01.

DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

## **Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта**

**Березко М.Э.\*, Никитченко Ю.А.\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия*

*\*e-mail: [maxberezko@yandex.ru](mailto:maxberezko@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [nikitchenko7@yandex.ru](mailto:nikitchenko7@yandex.ru)*

***Статья поступила 16.12.2019***

### **Аннотация**

В настоящей работе предложена комбинированная физико-математическая модель течения, использующая в пределах кнудсеновского слоя модельное кинетическое уравнение многоатомных газов, в остальной расчетной области – систему моментных уравнений 3-го порядка (МЗ). В области сшиваия моделей восстанавливается аппроксимирующая функция распределения, представляющая собой разложение локально-равновесной функции Максвелла по степеням тепловой скорости. Параметры разложения (неравновесные напряжения и моменты 3-го порядка) определяются в приближении модели МЗ.

**Ключевые слова:** комбинированная модель, гибридная модель, моментные уравнения, кинетическое уравнение, неравновесные течения, течение Куэтта.

## Введение

Особенностью процессов, протекающих в современных технических устройствах, является их существенная неравновесность, которая характеризуется высокими значениями градиентов параметров газа и малым временем протекания этих процессов.

В неравновесном газовом потоке, энергия неравномерно распределена между степенями свободы молекул, как поступательными, так и внутренними. Исследования такого рода течений требуют учёта молекулярных процессов, происходящих в газе. Постановка граничных условий на уровне газодинамических переменных может приводить к физически неадекватным результатам. Поэтому использование гидродинамических моделей (модели сплошной среды) и соответствующие им граничные условия непригодны для исследования неравновесных течений. Физически адекватно описать процесс взаимодействия газа с твёрдой поверхностью помогают описать кинетические модели, однако они чрезвычайно неэкономичны в смысле количества вычислительных операций. Для описания неравновесных течений используют модели, которые занимают промежуточное положение между гидродинамическими и кинетическими моделями. В их основе лежит то или иное кинетическое уравнение, из которого при помощи функции распределения специального вида получают замкнутую систему дифференциальных уравнений, называемых моментными уравнениями, относительно макроскопических переменных. Получаемые таким способом модели, с одной стороны, лишены избыточной информативности кинетических моделей, с

другой – содержат необходимую информацию о молекулярных процессах, отсутствующих в теории сплошной среды.

Формулировка граничных условий на твердой поверхности для систем моментных уравнений представляет существенные сложности, которые возникают из-за определения достаточного количества таких условий. Тем не менее, такие граничные условия на основе молекулярно-кинетической теории, с существенными упрощениями, впервые были получены Грэдом [1]. Дальнейшее исследование граничных условий для систем моментных уравнений проводилось в работах [2, 3, 4].

Строгая формулировка граничных условий получена только для модели Навье-Стокса-Фурье (НСФ), являющейся неполной системой моментных уравнений 2-го порядка. В условиях высокой неравновесности модель НСФ с соответствующими ей граничными условиями значительно завышает коэффициент трения на обтекаемой поверхности.

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования (см., например, [5, 6, 7]) размер высоконеравновесных пристеночных областей ограничен несколькими длинами свободного пробега молекулы. За пределами этих областей течение может считаться равновесным.

Ранее авторами была предложена комбинированная модель течения, дополняющая модель НСФ в пристеночной области кинетическим уравнением с соответствующими граничными условиями [8, 9]. Такое комбинирование

гидродинамической и кинетической моделей позволило существенно улучшить решение в пристеночной области.

Цель настоящей работы – сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей течения в пристеночной области на примере течения Куэтта. Исследуемые модели описывают течение в кнудсеновском слое на кинетическом уровне с соответствующими граничными условиями. В остальной расчётной области будут использоваться модели неравновесных течений различного порядка: система моментных уравнений неполного второго порядка (НСФ) и система моментных уравнений третьего порядка (МЗ).

Такая структура модели позволит:

- выставить физически адекватные кинетические граничные условия, которые позволят описать процесс взаимодействия газа с твёрдой поверхностью на молекулярном уровне;
- обеспечить приемлемую точность и экономичность в широком интервале чисел Маха и чисел Кнудсена.

Последняя особенность модели связана с тем, что размер кинетической области, который измеряется в длинах свободного пробега молекул, слабо зависит от числа Маха и не зависит от числа Кнудсена.

### **1. Модели неравновесных течений и кинетическая модель**

Для сравнения были выбраны две модели неравновесных течений. Первая из них модель НСФ, представляющая собой систему моментных уравнений неполного второго порядка. В общем случае, эта система уравнений может быть представлена

в виде [10] (повторяющиеся греческие подстрочные индексы подразумевают суммирование от 1 до 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( 1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (2)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

В этих выражениях:

$\rho, u_i, T$  – плотность, скорость и термодинамическая температура газа;

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$  – тензор напряжений,  $T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$  – удельные напряжения;

$p, p_{ij}$  – давление и тензор неравновесных напряжений;

$q_i$  – вектор теплового потока;

$\mu = \mu(T^S)$  – коэффициент вязкости, – свободный параметр модели;

$h$  – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения времени поступательно-вращательной релаксации к времени поступательно-поступательной релаксации энергии молекул, в настоящей работе принят  $h = 5$ ;

$c_v, c_p, \gamma, R$  – изохорная и изобарная теплоёмкости, показатель адиабаты, удельная газовая постоянная.

В качестве модели старшего порядка выбрана система моментных уравнений третьего порядка (МЗ). Она представляет собой систему, состоящую из 24 уравнений, записанных в термодинамических переменных[11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = -\frac{p_{ij}}{\tau_p} \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h - 1}{h} \frac{p_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p_{i\beta}}{\rho} \right) = \\ = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left( \frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p} \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь:

$c_\Omega$  – удельная теплоёмкость внутренних степеней свободы;

$c_\omega = \frac{c_p}{Pr} - \frac{15}{4} R$ , где  $Pr$  – число Прандтля.

Условия взаимодействия газа с твёрдой поверхностью для моделей НСФ и МЗ формулируются как условия скольжения пограничного слоя [2]. В комбинированных моделях такие условия не требуются.

В качестве кинетической модели выбрано модельное кинетическое уравнение многоатомных газов [12].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = \frac{f^{+} - f}{\tau_p} \quad (4)$$

В этом выражении:

$\xi_i$  – молекулярная скорость (координата пространства скоростей);

$\tau_p = \frac{\mu}{p}$  – время релаксации напряжений;

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$  – весовая функция, фазовое пространство, которой дополнено подпространством вращательной энергии молекулы  $\varepsilon$ .

После формального интегрирования по пространству вращательных энергий (4) может быть приведено к двум уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{1}{\tau_p} \left| \frac{f_t^{+} - f_t}{f_r^{+} - f_r} \right|. \quad (5)$$

Здесь:

$$f_t = \int f d\varepsilon; \quad f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon;$$

$$f_t^{+} = \frac{n}{(2\pi RT_t^{+})^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_{\alpha} c_{\alpha}}{2RT_t^{+}}\right) \left(1 + \frac{\varphi_{\alpha} c_{\alpha}}{3\rho(RT_r^{+})^2} \left(\frac{c_{\alpha} c_{\alpha}}{5RT_t^{+}} - 1\right)\right);$$

$$f_t^{+} = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} kT_r^{+} f_r^{+};$$

$$T_t^{+} = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r); \quad T_r^{+} = T - \frac{3}{2} (\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r);$$

$c_i = \xi_i - u_i$  – тепловая скорость движения молекул; величина  $1/Z$  представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул.

Для формулировки кинетических граничных условий на твёрдой поверхности достаточно задать закон взаимодействия молекул газа с твёрдой поверхностью. В настоящей работе использован закон диффузного отражения с полной аккомодацией энергии. Этот закон адекватен реальным физическим процессам, протекающим на шероховатых поверхностях.

## 2. Метод комбинирования моделей

Комбинированные модели предполагают разбиение поля течения на две области – кинетическую и гидродинамическую. Кинетическая область граничит с обтекаемой поверхностью. Её протяжённость по направлению нормали к поверхности составляет несколько длин свободного пробега молекул (так называемый Кнудсеновский слой). Остальное поле течения занимает гидродинамическая область.

Метод сшивания подробно описан в работе [7]. Для моделей старшего порядка комбинирование происходит аналогичным образом, за исключением вида аппроксимирующей функции. Для М3 аппроксимирующая функция принимает вид:

$$f = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \times \frac{2\sqrt{\varepsilon/\pi}}{(2/3 \eta k T_r)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2/3 \eta k T_r}\right) \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{1}{\rho RT_t} \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_p} \right) p_{\alpha\beta} c_{\alpha} c_{\beta} + \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p} \right) \varphi_{\alpha} \left( \frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) c_{\alpha} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_p} \right) \frac{\omega_{\alpha} T_t}{\eta T_r} \left( \frac{\varepsilon}{\eta k T_r} - 1 \right) c_{\alpha} \right) \right)$$

На рис.1 показана схема расчётной области в предположении, что для численного решения задачи используется конечно-разностный метод. Область сшивания моделей обозначена символом С с тремя перечёркнутыми узлами.

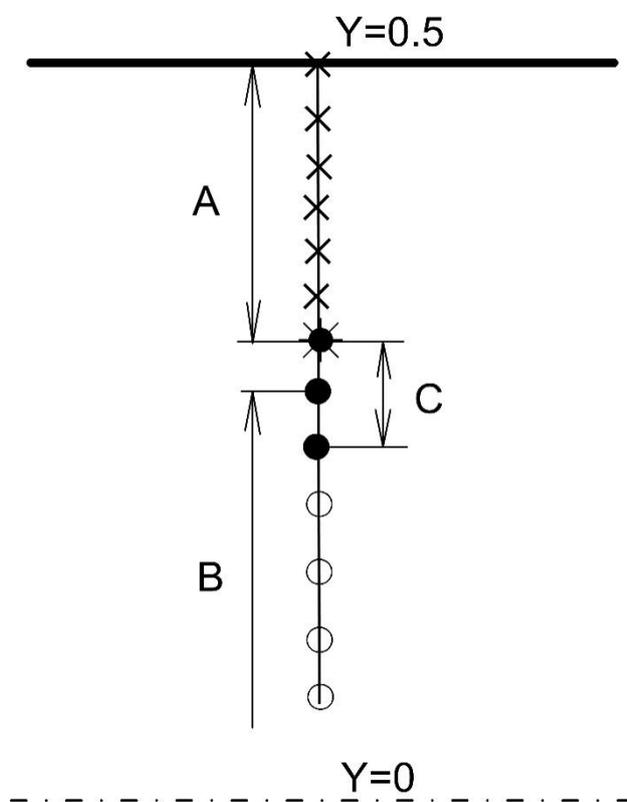


Рис. 1. Схема расчётной области. А – кинетическая область, В – гидродинамическая область, С – область сшивания.

В узлах кинетической области (область А, тёмные точки) решается кинетическое уравнение (5). Гидродинамические параметры, определённые в верхней точке области А, служат крайними значениями для моделей НСФ и МЗ. Эти

модели решаются в гидродинамической области (область В, светлые точки). Аппроксимирующие весовые функции восстанавливаются в двух узлах области сшивания.

Для решения поставлена краевая задача, реализуемая на трёхдиагональной ленточной матрице. Такая задача хорошо решается с помощью метода прогонки (алгоритм Томаса) [13, 14].

### 3. Тестовая задача

Для сравнения полей пристеночных течений, полученных с помощью моделей различных порядков, выбрано плоское течение Куэтта. Это течение хорошо изучено как экспериментально, так и теоретически [16, 17]. Схема течения и используемая система координат показаны на рис. 2.

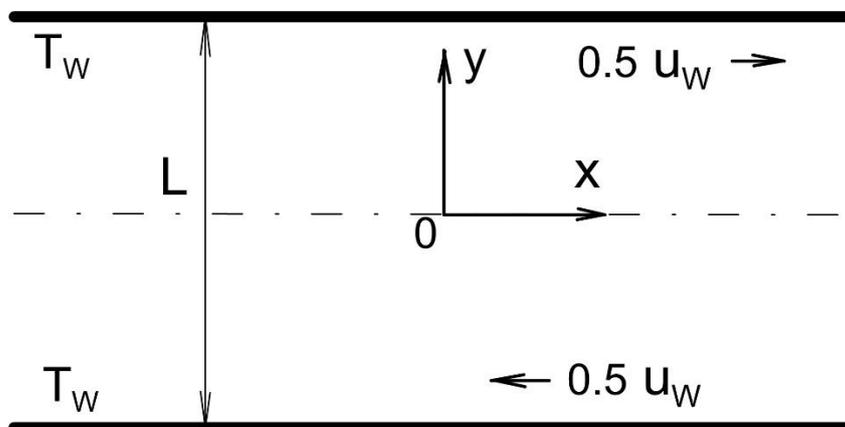


Рис. 2. Схема тестовой задачи

Две плоские бесконечные поверхности движутся в противоположных направлениях оси  $Ox$  с относительной скоростью  $u_w$ . Температура поверхностей –  $T_w$ . До начала движения плотность газа и концентрация молекул имели значения  $\rho_0$  и  $u_0$ .

Средняя длина свободного пробега молекулы в невозмущённом (неподвижном) газе:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{RT_w}}$$

Числа Маха и Кнудсена определены как:

$$M = \frac{u_w}{\sqrt{\gamma RT_w}}; Kn = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{RT_w}} \frac{1}{L},$$

здесь  $\mu_0$  – коэффициент вязкости, рассчитанный по температуре  $T_w$ .

Варьирование числами Маха и Кнудсена позволяет изучать течения различной степени неравновесности, которая определяется как произведение этих чисел.

#### 4. Результаты численных расчётов

Свободные параметры, такие как  $s$ ,  $h$  и  $Z$  были подобраны в ранней работе [8]. Для модели МЗ, эти свободные параметры совпадают со свободными параметрами модели НСФ, чтобы исключить их влияние на несовпадение в полученных решениях. На начальном этапе расчётов, для сравнения различных моделей было использовано экспериментально полученное значение коэффициента трения в интервале чисел Кнудсена –  $Kn$  0.01...10 при постоянном числе Маха  $M=1.4$  [18]. Результаты этого сравнения показаны на рис.3.

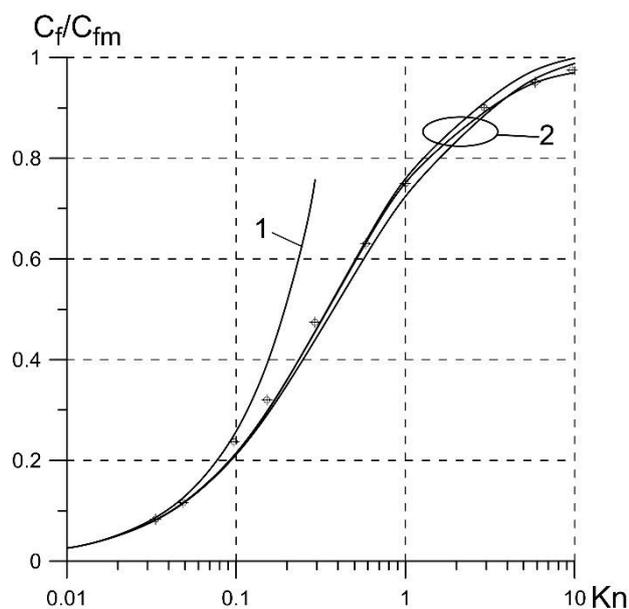


Рис. 3. Значение отношений коэффициента трения к коэффициенту трения в свободномолекулярном пределе. 1 - NSF с условиями прилипания; 2 - NSF, M24 условия скольжения, кинетика и комбинированные модели с кинетическими граничными условиями.

Сравнение коэффициента трения от числа Кнудсена показывает полную несостоятельность модели НСФ с граничными условиями прилипания при увеличении неравновесности течения. Кинетическая модель и комбинированные модели дают примерно одинаковые результаты во всём диапазоне чисел Кнудсена.

Стоит заметить, что коэффициент трения является интегральной величиной. Для сравнения различных моделей лучше использовать распределённую величину. Поэтому дальше приведём сравнение профилей температуры, которые получены различными моделями.

На рис. 4 показаны профили температуры двухатомного газа при  $M=1$  и  $Kn=0.0$ . Здесь и на следующих рисунках: сплошная линия - кинетическое решение;

мелкий пунктир - КИН\_МЗ; крупный пунктир – КИН\_НСФ; штрих-пунктир – НСФ; штрих-пунктир 1 - граничные условия скольжения погранслоя; штрих-пунктир 2 - граничные условия прилипания; темная точка - граничная точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания.

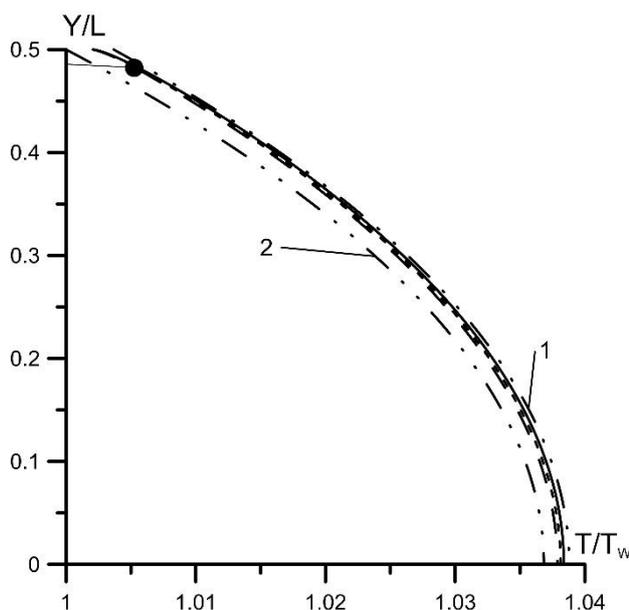
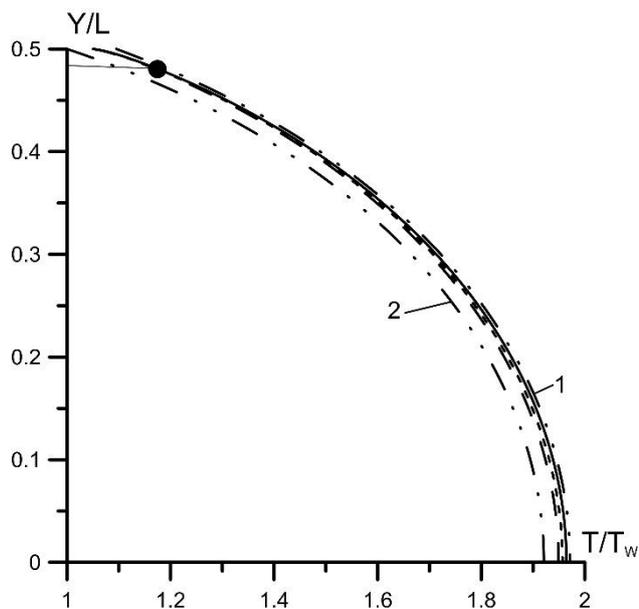
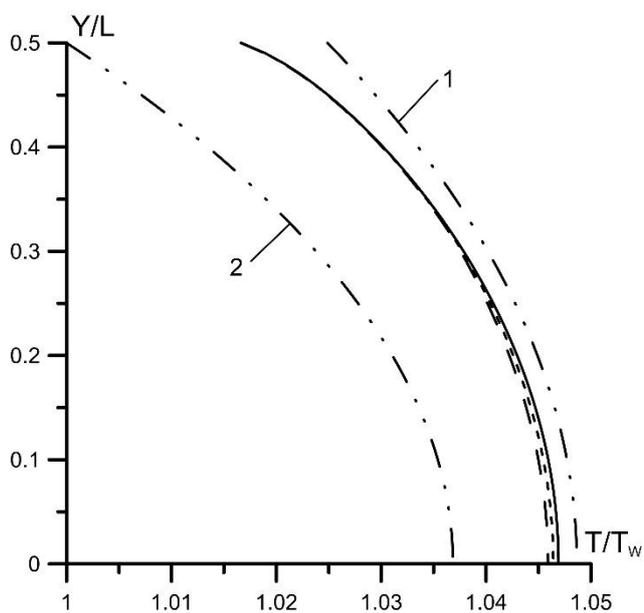


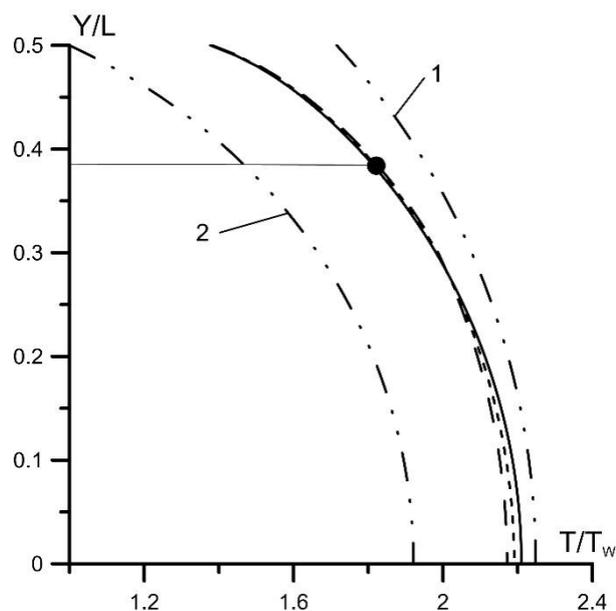
Рис. 4. Профили температуры,  $M=1$ ,  $Kn=0.01$ .

При данном числе Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения погранслоя теоретически обоснована. Профили всех моделей практически совпадают. Наибольшее отклонение имеет модель НСФ с граничными условиями прилипания.

Рис. 5. Профили температуры,  $M=5$ ,  $Kn=0.01$ .

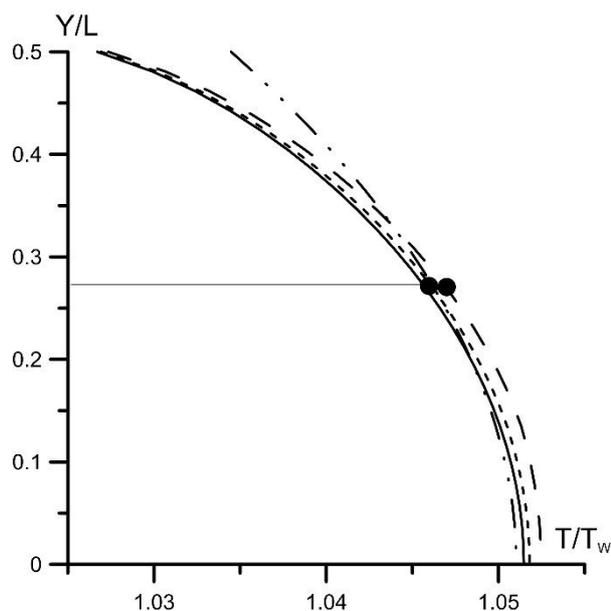
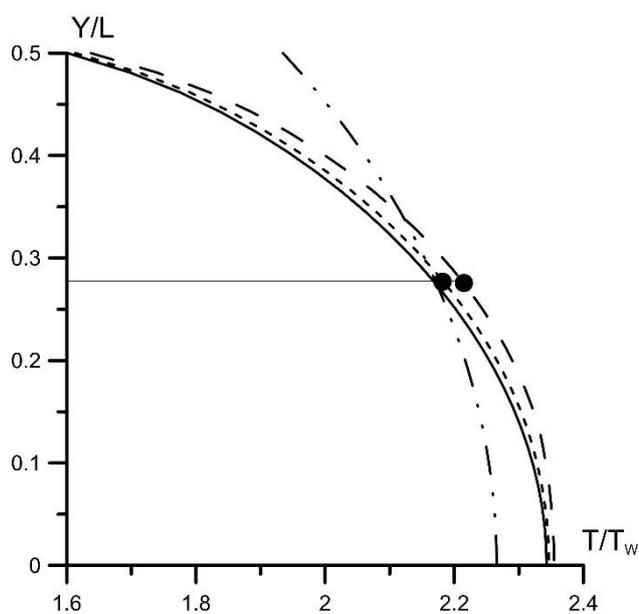
На рис. 5 видно, что увеличение числа Маха до гиперзвуковых значений не существенно влияет на погрешность гидродинамических моделей, пока число Кнудсена находится в континуальной области течения.

Рис. 6. Профили температуры,  $M=1$ ,  $Kn=0.1$ .

Рис. 7. Профили температуры,  $M=5$ ,  $Kn=0.1$ .

Сравнение с рис. 4 и рис. 5 показывает существенные отклонения профиля моделей НСФ и МЗ в верхней части рисунка, соответствующей пристеночной области. Это свидетельствует о том, что в переходной области течения, при больших скоростях, граничные условия скольжения пограничного слоя перестают адекватно описывать процесс взаимодействия газ с твёрдой поверхностью. Комбинированные модели показывают довольно хорошее совпадение с результатами расчёта кинетической модели, которую можно считать эталонной.

На рис. 8 и рис. 9 показаны расчётные профили температуры для числа Кнудсена  $Kn=0.2$  и чисел Маха  $M=1, 2$ , соответственно.

Рис. 8. Профили температуры,  $M=1$ ,  $Kn=0.2$ .Рис. 9. Профили температуры,  $M=5$ ,  $Kn=0.2$ .

Увеличение чисел Маха и Кнудсена означает повышение степени неравновесности течения, оцениваемой как произведение числа Маха на число Кнудсена. Модель НСФ теоретически обоснована только в слаборавновесных течениях. Комбинированные модели помогают получить результаты близкие к

кинетическим. Модель КИН\_МЗ даже при высокой неравновесности даёт решение, слабо (в пределах вычислительной погрешности) отличающееся от кинетического.

### Заключение

Для комбинированных моделей КИН\_НСФ и КИН\_МЗ стоит отметить то, что в точке сшивания областей отсутствует излом профилей газодинамических параметров, который наблюдался в методах сшивания других авторов (см., например [19, 20]).

Сравнение полученных результатов позволяет выделить следующие преимущества комбинированных моделей:

- Точность комбинированных моделей сравнима с точностью кинетической модели;
- Существенно повышена экономичность, в смысле количества вычислительных операций, этих моделей, по сравнению с кинетической моделью;
- Комбинированные модели позволяют выставить физически адекватные граничные условия, которые учитывают молекулярные процессы, в отличие от гидродинамических моделей.

При числе Кнудсена  $Kn < 0.1$ , модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя обеспечивает удовлетворительную точность. Комбинированная модель КИН\_НСФ даёт удовлетворительные результаты во всей рассмотренной области параметров течения.

Основной вывод настоящей работы заключается в следующем. При описании пристеночных течений уточнение гидродинамической составляющей

комбинированной модели выше третьего порядка не приведёт к повышению точности. Для практических приложений вполне достаточно неполного второго приближения, т. е. модели КИН\_НСФ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 9.7170.2017/8.9.*

### **Библиографический список**

1. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: перевод с английского // Механика. 1952. № 4. С. 71 - 97.
2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967 - 440 с.
3. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. - М.: Наука, 1975. - 343 с.
4. Сакабеков А.С. Начально-краевые задачи для систем моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении // Математический сборник. 1992. Т. 183. № 9. С. 67 - 88.
5. Becker M., Boyland D.E. Flow field and surface pressure measurements in the fullymerged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate // Rarefied Gas Dynamics, Suppl. 4, 1967, vol. 2, pp. 993 - 1014.
6. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonicrarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // AIAA Journal, 1973, <https://doi.org/10.2514/6.1973-200>

7. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=83571>
8. Березко М.Э., Никитченко Ю.А., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>
9. Никитченко Ю.А., Попов С.А., Тихоновец А.В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 2. С. 18 - 32.
10. Никитченко Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=52938>
11. Никитченко Ю.А. Модели неравновесных течений. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
12. Никитченко Ю.А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 11. С. 1882 – 1894.
13. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. Т. 1– 502 с.
14. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. Т. 1. - 384 с.

15. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики. - М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
16. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>
17. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. - М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.
18. Alofs H., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // The Physics of Fluids, 1971, vol. 14, no. 2, pp. 298 - 305.
19. Degond P., Jin S., Mieussens L. A smooth transition model between kinetic hydrodynamic equations // Journal of Computational Physics, 2005, vol. 209, pp. 665 – 694.
20. Crouseilles N., Degond P., Lemou M. A hybrid kinetic/fluid model for solving the gas dynamics Boltzmann–BGK equation // Journal of Computational Physics, 2004, vol. 199, pp. 776 – 808.