УДК 519.24.001:512,643,5

Стационарность потока отказов элементов и систем электроники

Авакян А.А.

Научно-исследовательский институт авиационного оборудования (НИИ авиационного оборудования), ул. Туполева, 18, Жуковский, Московская область, 140182, Россия

e-mail: avakyan@niiao.com

Аннотация

Показано, что теоретически поток отказов элементов и систем электроники не является пуассоновским. В то же время многочисленные статистические данные об отказах элементов и систем электроники, проведенные с помощью строгих методов расчета, подтверждают пуассоновский характер их потока. В статье раскрывается и дается строгое объяснение этому противоречию между практикой и теорией. Показывается, что противоречие происходит из-за того, что период эксплуатации на четыре, пять порядков меньше среднего периода отказов схемотехнического элемента.

Ключевые слова: поток отказов, пуассоновский поток, предел, теория, практика, электроника, схемотехнический элемент, вероятность, закон распределения, нормальный закон, экспоненциальный закон

Современные системы электроники, в частности комплексы бортового оборудования (КБО), конструктивно представляют собой системы, состоящие из некоторой иерархии конструктивных элементов. Наиболее типичной является следующая структура. Элементами верхнего уровня, после КБО в целом, являются отдельные конструктивно-съемные единицы (КСЕ), которые представляют собой легко заменяемые на борту летательных аппаратов (ЛА) блоки или модули крейтов (более крупных не съемных с борта конструкций). Эти элементы конструкций состоят, в свою очередь, из сменно сборочных единиц (ССЕ), заменяемых в процессе ремонта КСЕ. ССЕ могут представлять собой отдельные платы, микросхемы и другие конструктивные элементы электроники, электротехники или механики. Самыми популярными элементами ССЕ в настоящее время являются кристаллы, выполненные по технологии КМОП, в виде микросхем при корпусной сборке, либо в виде бескорпусных сборочных единиц при технологии многокристальных модулей. На последнем уровне конструктивной структуры КБО находятся схемотехнические элементы. Для удобства изложения объединение элементов любого уровня будем называть системой.

В [1 стр. 479] на основе физической модели отказов электроники и с помощью центральной предельной теоремы теории вероятностей была выведена следующая формула усеченно – нормального закона распределения для расчета функции плотности вероятностей усредненного схемотехнического элемента электронных систем:

$$f(t) = \frac{1}{0{,}59*10^{10}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0{,}59*10^{10}}\right)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

В теории надежности [2 стр. 94] известна следующая формула функции интенсивности отказов $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{1-\int\limits_0^t f(t)dt} \qquad \textbf{(2)}$$

Где:

- f(t) – функция плотности распределения отказов;

- t – текущее время;

- P(t) – функция вероятности безотказной работы;

- F(t) - функция вероятности возникновения отказов

Подставив в (2) плотность вероятности из (1), получим следующую формулу для расчета интенсивности отказов:

$$\lambda(t)=\frac{1}{0{,}59*10^{10}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0{,}59*10^{10}}\right)^2}*\left(1-\frac{0{,}59*10^{10}\sqrt{2\pi}}{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0{,}59*10^{10}}\right)^2}dt}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Рассчитанные в [1 стр. 478] плотность вероятности и интенсивность отказов усредненного схемотехнического элемента показали, что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов равны и постоянны, т. е. поток отказов на этом периоде стационарен.

Как известно из [2 стр. 53], пуассоновский поток отказов характеризуется выполнением в нем следующих трех условий:

- Стационарности, то есть независимости интенсивности отказов от времени: **λ(t) = λ= Constantan**
- Ординарности, то есть бесконечной малости вероятности одновременного появления двух и более отказов.

- Отсутствия последействия.

- Двум последним условиям удовлетворяют все потоки редких событий. Действительно, чем реже возникают события «отказ», тем меньше вероятность одновременного возникновения двух и более отказов и тем меньше вероятность влияния каждого отказа на возникновение других отказов, т. е. последействие отказов отсутствует.

В [1 стр.478] было показано, что физическая модель отказа схемотехнического элемента математически описывается дискретным биноминальным законом распределения, имеющим следующий вид:

$$P_n(r)=P(\xi_r(t_r)=r)=C_n^r P^n q^{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}P^r q^{n-r} \qquad \textbf{(4)}$$

где:

- $\mathbf{t_r}$ - непрерывная случайная величина – наработка схемотехнического элемента до отказа;
- **P -** вероятность элементарного события деградации кристалла;
- **q=1-p** вероятность события отсутствия деградации кристалла**;**
- **r = 1, 2, 3 ….. n;**
- C_n^r - число сочетаний из (**n) по (r).**

Под физической моделью схемотехнического элемента [1 стр. 477] будем понимать модель упрощенного процесса её отказов, достаточную для получения усредненной оценки интенсивности отказов.

Интегральная (центральная) предельная теорема Муавра – Лапласа [3 стр. 83] доказывает, что при постоянных значениях вероятности бинарного события **P** ($\mathbf{0<p<1}$) при **n→∞ б**иноминальный закон стремится к нормальному.

В предельном распределении (теореме) Пуассона [4 стр.228] в предельном биноминальном законе при стремлении (**n)** к бесконечности вероятность **P** стремится к нулю т.е. при **n→∞ P → 0**. Для доказательства теоремы Пуассона величина **P** в выражении (3) заменяется на величину **P = (a/n)**, где (а) некоторая положительная величина. При **n→∞** вероятность **P** стремится к нулю.

Вводя указанную замену в выражении (3) и производя предельный переход, получим:

$$
\begin{aligned}
P_r = P(\xi(t)=r) = C_n^r P^n q^{n-r} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{r!(n-r)!}\left(\frac{a}{n}\right)^r\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-r} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)---(n-r+1)}{r!}\left(\frac{a}{n}\right)^r\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-r} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^r}{r!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n * \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)---\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^r} \to \frac{a^r}{r!}e^{-a}
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(5)}
$$

В теории надежности [2 стр. 110, 111] величина (а) равна среднему количеству отказов возникающих за время **t,** которое при пуассоновском потоке отказов, равно интенсивности отказов (λ), помноженной на значение текущего времени (**t).** Подставив в (4) **a = λ*t,** получим принятую в теории надежности формулу Пуассона, которая является вероятностью возникновения ровно **r** отказов на интервале **0 < Δt < t** при интенсивности отказов равном **λ**.

$$P(t) = \frac{(\lambda \bullet t)^r}{r!} e^{-\lambda \bullet t} \qquad \textbf{(6)}$$

Поскольку в физической модели отказов схемотехнического элемента вероятность **P** бинарного события (обрыв или пробой) не может быть равна нулю, на всем временном пространстве ($0 < t < \infty$) поток отказов схемотехнического элемента не может быть пуассоновским. Как показывает статистика отказов элементов и систем электроники [5 стр. 150-305, 6 стр. 27-37] на этапе реальной эксплуатации (десятки лет) с высокой степенью точности поток отказов оценивается как пуассоновский.

Для устранения этого противоречия между теорией и практикой докажем следующую теорему о стационарности потока отказов системы, состоящей из большого количества сверхнадежных схемотехнических элементов.

Теорема.

Интенсивность потока отказов системы, состоящей из (**n**) схемотехнических элементов λ_{cn}, каждая из которых распределена по усечено – нормальному закону $f(t)$ с одинаковыми параметрами, равными $M=T$ и σ, при стремлении этих параметров и количества элементов к бесконечности, стремится к величине $\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot e}}$, то есть поток отказов стремится к стационарному.

В [2 стр. 134] показано, что при одинаковых интенсивностях отказов элементов интенсивность отказов системы, состоящей из (**n**) элементов, равна сумме интенсивностей отказов элементов **λ_{cn}.= n•$\lambda_э$**. Тогда математическая формулировка теоремы имеет следующий вид:

$$\lim_{\substack{T\to\infty,\\ \sigma\to\infty,\\ n\to\infty.}} \lambda_{cn}(t)=\lim_{\substack{T\to\infty,\\ \sigma\to\infty,\\ n\to\infty.}} \frac{n\bullet f_э(t)}{1-F_э(t)}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi * e}}=const \qquad \textbf{(7)}$$

Поскольку все схемотехнические элементы имеют одинаковые параметры T и **σ** и распределены по усеченно-нормальному закону, то справедливы следующие равенства:

$$f_э(t)=f(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T)^2}{\sigma^2}} \qquad (8)$$

$$F_э(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-T)^2}{\sigma^2}}dt \qquad (9)$$

Найдем выражения, связывающие интенсивность отказов системы, состоящей из (**n**) элементов, синтезированной по условиям поставленной теоремы, с законами распределения вероятностей отказов схемотехнических элементов (формулы (8) и (9)). После несложных преобразований получим:

$$\lambda_{cn}(t)=\frac{nf(t)}{1-F(t)}=\frac{\frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{\sigma^2}-\frac{2tT}{\sigma^2}+\frac{T^2}{\sigma^2})}}{1-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{\sigma^2}-\frac{2tT}{\sigma^2}+\frac{T^2}{\sigma^2})}dt} \qquad \textbf{(10)}$$

Относительно рассмотренной физической системы предельный переход в выражении (10) означает:

– множество схемотехнических элементов предельной системы стремится к бесконечности $\mathbf{n} \to \infty$**;**

– множество математических ожиданий **T** и вероятных отклонений $\boldsymbol{\sigma}$ случайной величины продолжительности работы схемотехнического элемента до отказа стремится к бесконечности $\mathbf{T} \to \infty$, $\boldsymbol{\sigma} \to \infty$**;**

Множество значений (**n**) является целочисленным счетным множеством, а множества **T** и $\boldsymbol{\sigma}$ являются непрерывными множествами, которые кроме целочисленного счетного множества включают в свой состав всё множество рациональных и иррациональных чисел. Для того чтобы выполнить одновременный предельный переход этих множеств, как это сформулировано в теореме, необходимо их привести к одному классу множеств. Это можно сделать двумя способами: либо множество (**n**) расширить по методу Бореля [4 стр. 27] до непрерывного множества, либо множества **T** и $\boldsymbol{\sigma}$ ограничить до подмножества целочисленных чисел.

Первый подход неприменим, так как количество схемотехнических элементов (**n**) физически не может быть ни дробным, ни иррациональным числом. Рассмотрим применение второго способа с точки зрения результата предельного перехода. При стремлении к бесконечности значений **T** и $\boldsymbol{\sigma}$ мы будем получать все большую и большую часть целочисленной части величин **T** и $\boldsymbol{\sigma}$. Округление дробной части чисел **Т** и **σ** до целого числа будет все меньше и меньше отличать иррациональные и дробные числа от целочисленных значений, а при стремлении к бесконечности это отличие исчезнет вообще, т. е. отношение непрерывного числа к целочисленному при стремлении непрерывного и целочисленного чисел к бесконечности будет стремиться к единице. Докажем это утверждение. Обозначим дробную (иррациональную и рациональную) часть непрерывного числа Т через Δ, а его целочисленную часть через $T_ц$. Тогда непрерывное число запишется следующим образом: Н= $T_ц$ +Δ. Найдем предел отношения непрерывного числа к целочисленному числу при стремлении этих чисел к бесконечности. Поскольку имеет место неравенство 0<Δ<1, то

$$\lim_{\substack{T_ц \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{T_ц + \Delta}{n} = \lim \frac{T_ц}{n} + \frac{\Delta}{n} \to 1 \tag{11}$$

В предельном выражении (11) целочисленная часть $T_ц$ непрерывного числа Т и целочисленное число могут рассматриваться как одно переменное **x**. Тогда предельное выражение (11) примет следующий вид:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} + \frac{\Delta}{x} \to 1 \tag{12}$$

Утверждение доказано. Для доказательства теоремы найдем предел выражения (10) при стремлении Т→∞, σ→∞.

$$\lim_{\substack{T\to\infty,\\ \sigma\to\infty,\\ n\to\infty.}} \lambda_{cn}(t) = \lim_{\substack{T\to\infty,\\ \sigma\to\infty,\\ n\to\infty.}} \frac{nf(t)}{1-F(t)} = \lim_{\substack{T\to\infty,\\ \sigma\to\infty,\\ n\to\infty.}} \frac{\dfrac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{2tT}{\sigma^2} + \frac{T^2}{\sigma^2}\right)}}{1 - \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{2tT}{\sigma^2} + \frac{T^2}{\sigma^2}\right)} dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi * e}} \; \frac{1}{час} \tag{13}$$

На основании (11), (12) переменные **n, T** и **σ** обозначим символом **x**. Тогда выражение (13) примет следующий вид:

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\lambda_{cn}(t)=\frac{\frac{x}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}-\frac{2tx}{x^2}+\frac{x^2}{x^2})}}{1-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}-\frac{2tx}{x^2}+\frac{x^2}{x^2})}dt}\ \frac{1}{час}=\underset{x\to\infty}{Lim}\ \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}-\frac{2t}{x}+1)}}{1-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}-\frac{2t}{x}+1)}dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\bullet e}} \quad (14)$$

Теорема доказана.

Заметим, что средний период между отказами элементов такой предельно сложной гипотетической системы будет равен:

$$T_{cp}=\frac{1}{\lambda(t)}=\sqrt{2\pi * e}=4{,}132 час$$

Доказанная выше теорема показывает, что невозможно существенно повысить безотказность сложной системы с большим количеством элементов, каким является КБО, путем повышения безотказности ее элементов. Это утверждение подтверждается на практике. Действительно, у различных систем бортового оборудования воздушных судов гражданской авиации, состоящих из миллиардов схемотехнических элементов, средний период между отказами имеет порядок десятков часов [5 стр. 150-305, 6 стр. 27-37].

Физический смысл доказанной теоремы заключается в том, что если бы поток отказов схемотехнических элементов системы на всем бесконечном периоде был бы пуассоновским, то закон распределения отказов был бы экспоненциальным. В этом случае повышение надежности схемотехнического элемента, при любом их количестве в системе, приводило бы к повышению надежности системы. Но поскольку закон распределения отказов схемотехнического элемента является нормальным, двухпараметрическим, то при стремлении среднего периода между отказами элементов к бесконечности (абсолютная надежность схемотехнического элемента) и стремлении их количества к бесконечности происходит также бесконечное увеличение дисперсии распределения, что в пределе приводит интенсивность отказов и средний период между отказами системы к конечной величине.

Выводы:

1. В современной технологии создания систем электроники первичным конструктивным элементом (элементом системы может рассматриваться любая её часть) является микросхема, которая представляет собой корпус, к контактам которого присоединены входы или выходы одного кристалла или многих кристаллов. Микросхема, содержащая много кристаллов, соединенных между собой в некоторую функциональную схему, называется многокристальным модулем. Внутри каждого кристалла, по технологии КМОП, из множества (многих миллионов) схемотехнических элементов создаются сложные функциональные схемы. Согласно доказанной выше теоремы повышение надежности микросхемы путем резервирования схемотехнического элемента не приведет к существенному повышению надежности микросхемы. При этом неоправданно увеличится число элементов и возрастет стоимость микросхемы.

2. Резервирование функциональных узлов внутри кристалла может привести к повышению его расчетной надежности, так как их количество не превышает десятков-сотен элементов. При таких количествах закон больших чисел не работает и надежность системы будет существенно зависеть от надежности её элементов. Суммарная интенсивность отказов системы будет равна сумме интенсивностей отказов её элементов. Однако возникновение отказов в кристалле, в подавляющем количестве случаев, бывает связано с деградацией его физических характеристик. Следовательно, такое резервирование не приведет к повышению надежности кристалла. Резервирование функциональных узлов внутри кристалла эффективно только при создании схем парирования сбоев путем реконфигурации в системе управляющей избыточности. При этом сбои, как правило, возникают по различному ряду причин при нормальных физических характеристиках кристалла.
3. Наиболее эффективными методами создания систем с управляемой избыточностью (в частном случае резервированных систем) является резервирование кристаллов в многокристальном модуле и резервирование многокристальных модулей в целом. Эффективность этих методов заключается в том, что современная технология изготовления кристаллов и многокристальных модулей позволяет создать многофункциональную систему в малых габаритах. Так, например, широко применяемая в электронных системах мощная вычислительная система nanoETXexpress-SP, включающая в свой состав: процессор общего назначения, графический и

звуковой процессоры, современную периферию к ним и мощные запоминающие устройства имеет габаритные размеры 55х84х15мм.

Библиографический список

1.Авакян А.А. Закон распределения отказов элементов и систем электроники. Тезисы докладов международного симпозиума «Надежность и качество».- П.: 2012.- 477- 480 с.

2.Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. - М.: Наука, 1965.-524 с.

3.Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматлит, издание третье, переработанное, 1962 .- 408 с.

4.Крамер Г. Математические методы статистики, под редакцией А.Н. Колмогорова, М.: Мир, 1973 .- 496 с.