

---

**УДК 629.7.072.1**

## **Выбор многоальтернативных маршрутов полета беспилотного летательного аппарата при наблюдении трассы и наземных точечных объектов на этапе планирования полета.**

Г.Н. Лебедев, Л.А. Мирзоян, А.В. Ефимов

### **Аннотация**

Рассматривается задача оптимального наблюдения беспилотным летательным аппаратом (БЛА) трассы и наземных точечных объектов. Найдены оптимальные условия перелета БЛА с трассы на соседний точечный объект для наблюдения. Полученные условия позволяют планировать полет БЛА при комбинированном контроле как протяженных трасс, так и группы одиночных точечных наземных объектов.

### **Ключевые слова**

беспилотный летательный аппарат; маршрутизация полета; контроль трассы; наблюдение точечных объектов.

### **Введение**

На сегодняшний день актуальным является наблюдение участков трасс, по которым движутся объекты, в особенности в труднодоступных местах. Планирование полета беспилотного летательного аппарата (БЛА) для реализации этой задачи не требует привлечения процедур оптимизации. Задача выбора последовательности облета точечных объектов одним и группой БЛА уже решена в [1-3]. Однако, при необходимости наблюдения участка трассы и появившихся вблизи трассы точечных наземных объектов, возникает задача определения момента переключения БЛА с полета над трассой на перелет к точечному объекту с учетом маневренных особенностей БЛА. Для формирования алгоритма автоматического определения этого момента необходимо сформулировать критерий

оптимальности маршрута полёта, рассчитать и проанализировать его зависимость от расположения точечного объекта относительно трассы.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим решение задачи планирования маршрута полета при следующих допущениях:

1. Известен контролируемый участок трассы (КУТ), где с наибольшей вероятностью движется наблюдаемый объект / объекты.
2. Вероятность нахождения объекта на заданном участке трассы подчиняется нормальному закону распределения.
3. Трасса задана направлением по отношению к текущему направлению полета БЛА, важностью  $b$  наблюдения объектов на трассе, длиной КУТ  $L_{mp}=2l=6\sigma$ . Важность  $b$  наблюдения объектов на трассе выше, чем важность наблюдения точечных объектов вне трассы.
4. В окрестности трассы есть точечные объекты, которые также необходимо наблюдать. В качестве примера рассматривается один объект, координаты которого по отношению к середине КУТ есть  $m$  (перпендикулярно трассе) и  $z$  (вдоль трассы), где  $z>0$ .
5. Считается, что вначале осуществляется контроль трассы как более важной для наблюдения, а затем – точечного объекта.
6. Полет БЛА происходит с постоянной скоростью на заданной высоте над трассой.
7. Динамические характеристики БЛА характеризуются постоянной скоростью полета и максимальным радиусом разворота.

При перечисленных допущениях требуется:

- 1) Определить условия оптимального переключения с процесса полета над трассой на перелет к точечному объекту вне трассы.
- 2) Оценить влияние параметров  $m$  и  $z$  близости точечного объекта к трассе на условие переключения программы полета.

### **Формирование критерия оптимальности**

В качестве критерия оптимальности будем рассматривать классическое отношение дохода к затратам [4]. Под доходом понимается суммарная важность наблюдения трассы (объектов на трассе) и точечного объекта вне трассы. Затратами является время выполнения задания, равносильное по смыслу суммарной длине траектории.

$$J = \frac{b \left( 0.5 + \Phi \left( \frac{x}{\sigma} \right) \right) + 1}{L}. \quad (1)$$

Здесь  $x$  - расстояние от центра контролируемого участка трассы до текущего положения БЛА,  $\Phi$  – интеграл Лапласа,  $L$  – суммарная длина траектории полета. Важность наблюдения одиночного точечного объекта вне трассы при этом считается равной 1.

Для проведения дальнейших исследований координата  $z$  выбирается в диапазоне  $-0.5l < z < 0.5l$ . Выбор такого диапазона обусловлен тем, что при  $z < -0.5l$  облет начинается с объекта вне трассы, а затем осуществляется выход на трассу, при  $z > 0.5l$  – сначала полностью пролетается трасса, а затем производится перелет для наблюдения точечного объекта.

Введем следующее обозначение для варьируемой переменной:

$$p = \frac{z - x}{l}.$$

Тогда:

$$x = z - pl \quad (2)$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{3x}{l} = \frac{3z}{l} - 3p \quad (3)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\theta = \left| \frac{z}{l} \right| < 1;$$

$$k = \frac{l}{m}. \quad (4)$$

Рассмотрим физический смысл введенных обозначений. Параметр  $\theta$  определяет относительную продольную удаленность точечного объекта от центра КУТ и равен отношению продольного расстояния от точечного объекта до центра КУТ к половине длины КУТ. Параметр  $k$  представляет собой относительную боковую удаленность точечного объекта от трассы и равен отношению половины длины КУТ к расстоянию от объекта до трассы.

### *Расчёт дохода*

Введем обозначение:

$$\xi = \frac{x}{\sigma} = 3(\theta - p).$$

Разложим числитель в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) &= \Phi(\xi) = \Phi(0) + \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{\xi=0} \xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} (-\xi) \Big|_{\xi=0} \frac{\xi^2}{2} - \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (-1) \Big|_{\xi=0} \frac{\xi^3}{6} = \\ &= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi^3}{6} = 0.4 \left( \xi - \frac{\xi^3}{6} \right) = 0.4 \left( \frac{x}{\sigma} - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{\sigma} \right)^3 \right) = 0.4 \left( 3(\theta - p) - \frac{1}{6} 27(\theta - p)^3 \right) = \\ &= 0.4(3\theta - 3p - 4.5(\theta^3 - 3\theta^2 p + 3\theta p^2 - p^3)) = 0.4(3\theta - 3p - 4.5\theta^3 + 13.5\theta^2 p - 13.5\theta p^2 + 4.5p^3) = \\ &= 0.4((3\theta - 4.5\theta^3) + p(13.5\theta^2 - 3) - 13.5\theta p^2 + 4.5p^3) = (1.2\theta - 1.8\theta^3) + p(5.4\theta^2 - 1.2) - 5.4\theta p^2 + 1.8p^3 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = (1.2\theta - 1.8\theta^3) + p(5.4\theta^2 - 1.2) - 5.4\theta p^2 + 1.8p^3 \quad (5)$$

### *Расчёт затрат*

Суммарная длина траектории полета  $L$  складывается из длины траектории прямолинейного полета над трассой  $L_{np}$  и длины дуги окружности, по которой БЛА подлетает к объекту, расположенному вне трассы  $L_\delta$ .

Определим радиус разворота БЛА для подлета к объекту, расположенному вне трассы. Будем считать, что при совершении этого маневра движение происходит по окружности, проходящей через наблюдаемый объект. Тогда радиус разворота БЛА можно определить следующим образом:

$$R = \frac{r}{2 \sin \alpha},$$

где  $r$  – расстояние от текущего положения БЛА до точечного объекта,  $\alpha$  – направление на точечный объект.

Тогда длину дуги окружности, по которой БЛА подлетает к объекту, расположенному вне трассы, можно записать:

$$L_\delta = 2\alpha R = 2\alpha \frac{r}{2 \sin \alpha} = \frac{\alpha r}{\sin \alpha} = rd,$$

где

$$d = \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad (6)$$

Рассчитаем  $r$ :

$$r = \sqrt{m^2 + (z - x)^2} = m \sqrt{1 + \left( \frac{z - x}{m} \right)^2}.$$

Тогда, учитывая, что:

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

получим:

$$r \approx m \left( 1 + 0.5 \left( \frac{z-x}{m} \right)^2 \right) = m \left( 1 + 0.5 \left( \frac{z-x}{l} \frac{l}{m} \right)^2 \right) = m(1 + 0.5 p^2 k^2).$$

Таким образом:

$$r \approx m(1 + 0.5 p^2 k^2). \quad (7)$$

Разложив  $d$  из (6) в ряд Тейлора получим, что длина дуги траектории подлета к объекту, расположенному вне трассы, может быть определена следующим образом:

$$d = 1 - 0.05\alpha + 0.25\alpha^2 \quad (8)$$

При малых углах получаем:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{z-x} \quad (9)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Из (4) и (9) получим:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{m}{m+z-x} = \frac{\pi}{2} \frac{l}{1 + \frac{z-x}{l} \frac{l}{m}} = \frac{\pi}{2} \frac{l}{1+pk} \approx \frac{\pi}{2} (1-pk).$$

Подставим в (8):

$$d = 1 - 0.05 \frac{\pi}{2} (1-pk) + 0.25 \left( \frac{\pi}{2} (1-pk) \right)^2 = 1.54 - 1.14pk + 0.6 p^2 k^2.$$

### Расчет критерия оптимальности

Подставим полученные выражения в параметрический критерий  $J$ :

$$J = \frac{b(0.5 + (1.2\theta - 1.8\theta^3)) + p(5.4\theta^2 - 1.2) - 5.4\theta p^2 + 1.8p^3}{l + z - pl + m(1 + 0.5 p^2 k^2) (1.54 - 1.14pk + 0.6 p^2 k^2)}. \quad (10)$$

Пренебрегая старшими степенями  $p$ , начиная с 4-ой, получим:

$$J = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}, \quad (11)$$

где:

$$a_0 = 1 + b(0.5 + 1.2\theta - 1.8\theta^3)$$

$$a_1 = b(5.4\theta^2 - 1.2)$$

$$a_2 = -5.4b\theta$$

$$a_3 = 1.8b$$

$$b_0 = l + z + 1.54m = l \left( 1 + \theta + \frac{1.54}{k} \right)$$

$$b_1 = -l - 1.14mk = -l - 1.14 \frac{m}{l} \frac{l}{m} = -2.14l$$

$$b_2 = m(0.6k^2 + 0.5 \cdot 1.54k^2) = 1.37k^2m = 1.37k^2 \frac{m}{l}l = 1.37kl$$

$$b_3 = m(-0.5 \cdot 1.14k^3) = -0.57k^3 \frac{m}{l}l = -0.57k^2l$$

### Решение задачи оптимизации

Для нахождения максимума критерия (10) потребуем выполнения условия:

$$\frac{\partial J}{\partial p} = 0.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial J}{\partial p} = \frac{(a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)(b_0 + b_1p + b_2p^2 + b_3p) - (a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)(b_0 + b_1p + b_2p^2 + b_3p)}{(b_0 + b_1p + b_2p^2 + b_3p)^2}.$$

Пренебрегая старшими степенями  $p$ , начиная с 3-ей, получим:

$$(a_1b_0 - a_0b_1) + p(2(a_2b_0 - a_0b_2)) + p^2(3a_3b_0 - 3a_0b_3 + a_2b_1 - a_1b_2) = 0. \quad (12)$$

Решение квадратного уравнения (12) показало, что один из его корней с необходимой точностью (погрешность не превышает 1%) совпадает с корнем соответствующего линейного уравнения:

$$(a_1b_0 - a_0b_1) + p(2(a_2b_0 - a_0b_2)) = 0;$$

$$p = \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)}{2(a_0b_2 - a_2b_0)}. \quad (13)$$

Второй корень уравнения (12) имеет недопустимое значение ( $p > 3$ ), т.к. не отражает физического смысла параметра  $p$ .

### Исследование влияния различных параметров на момент схода с трассы

#### Исследование влияния важности $b$

Расчет проводился при следующих зафиксированных значениях параметров:

$$\theta = \frac{z}{l} = 0.5$$

$$k = \frac{l}{m} = 1.$$

Тогда:

$$a_0 = 1 + b(0.5 + 1.2\theta) = 1 + 1.1b$$

$$a_1 = b(5.4\theta^2 - 1.2) = 0.15b$$

$$a_2 = -5.4b\theta = -2.7b$$

$$b_0 = l \left( 1 + \theta + \frac{1.54}{k} \right) = 3l$$

$$b_1 = -2.14l$$

$$b_2 = 1.37kl$$

Подставим полученные выражения в (13):

$$p = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{2(a_0 b_2 - a_2 b_0)} = \frac{0.15b \cdot 3l - (1 + 1.1b)(-2.14l)}{2((1 + 1.1b)1.37kl - (-2.7b)3l)} = \frac{1.4b + 1.1}{9.61b + 1.37}$$

Результаты представлены на рис.1.

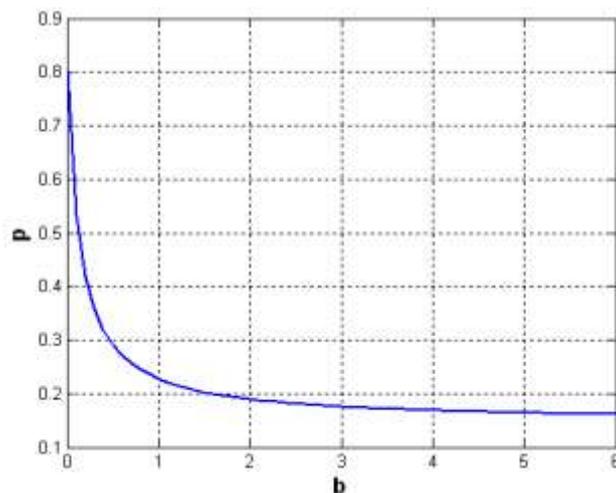


Рис.1. Влияние важности объектов на трассе на момент схода с трассы.

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что момент схода с трассы слабо зависит от важности наблюдения расположенных на ней объектов.

*Исследование влияния боковой удаленности k точечного объекта от трассы.*

Расчет проводится при следующих зафиксированных значениях параметров:

$$\theta = \frac{z}{l} = 0.5$$

$$b = 4.$$

$$a_0 = 1 + b(0.5 + 1.2\theta) = 5.4$$

$$a_1 = b(5.4\theta^2 - 1.2) = 0.6$$

$$a_2 = -5.4b\theta = -10.8$$

$$b_0 = l \left( 1 + \theta + \frac{1.54}{k} \right) = l \left( 1.5 + \frac{1.54}{k} \right)$$

$$b_1 = -2.14l$$

$$b_2 = 1.37kl$$

Подставим полученные выражения в (13):

$$p = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{2(a_0 b_2 - a_2 b_0)} = \frac{0.6 \left( 1.5 + \frac{1.54}{k} \right) - 5.4(-2.14l)}{2 \left( 5.4 \cdot 1.37kl - \left( -10.8 \left( 1.5 + \frac{1.54}{k} \right) \right) \right)} = \frac{6.2k + 0.46}{7.4k^2 + 16.2k + 16.6}$$

Результаты представлены на рис.2.

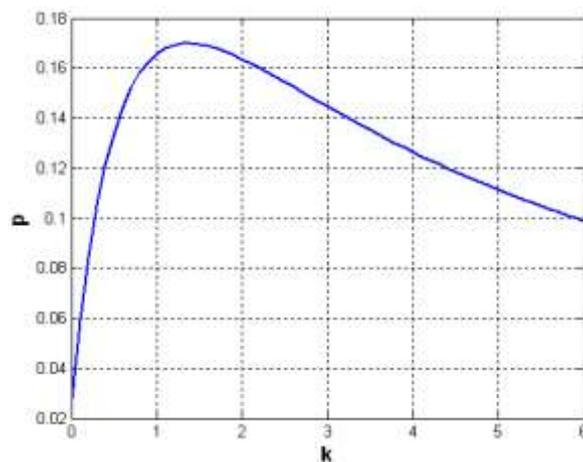


Рис.2 Влияние боковой удаленности точечного объекта на момент схода с трассы.

*Исследование влияния продольной удаленности  $\theta$  точечного объекта от середины КУТ.*

$$k = 1;$$

$$b = 4.$$

$$a_0 = 1 + b(0.5 + 1.2\theta) = 3 + 4.8\theta$$

$$a_1 = b(5.4\theta^2 - 1.2) = 21.6\theta^2 - 4.8$$

$$a_2 = -5.4b\theta = -21.6\theta$$

$$b_0 = l \left( 1 + \theta + \frac{1.54}{k} \right) = l(2.54 + \theta)$$

$$b_1 = -2.14l$$

$$b_2 = 1.37kl = 1.37l$$

Подставим полученные выражения в (13):

$$p = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{2(a_0 b_2 - a_2 b_0)} = \frac{(21.6\theta^2 - 4.8)l(2.54 + \theta) - (3 + 4.8\theta)(-2.14l)}{2((3 + 4.8\theta)1.37l - (-21.6\theta)l(2.54 + \theta))} = \frac{10.8\theta^3 + 27.4\theta^2 + 2.7\theta - 2.9}{21.6\theta^2 + 61.4\theta + 4.1}.$$

Результаты представлены на рис.3.

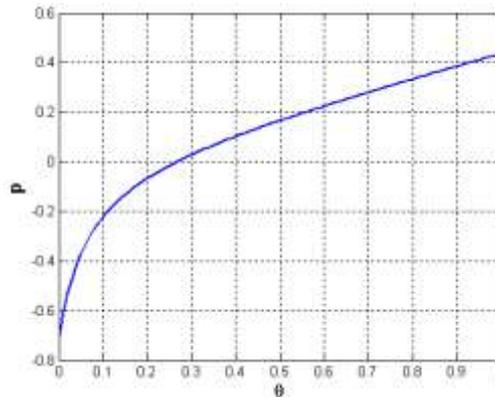


Рис. 3. Влияние продольной удаленности точечного объекта на момент схода с трассы.

### Оценка погрешности математических расчётов.

Оценим погрешность, связанную с пренебрежением старшими степенями в полиномах. Оценку будем производить на примере расчёта значения коэффициента  $a_0$  критерия (11).

Рассмотрим наибольшее значение возможной погрешности. Оно будет достигаться при  $\theta=0.5$ ,  $b=4$ . Значение пренебрегаемого слагаемого составляет:

$$4 \cdot 1.8\theta^3 = 0.88.$$

При этом  $a_0 = 7.8$ .

Тогда относительная погрешность составляет:

$$\frac{7.8 - 0.88}{7.8} = 0.11 = 11\%..$$

Теперь рассмотрим среднее значение возможной погрешности. Оно будет достигаться при  $\theta=0.2$ ,  $b=4$ . Значение пренебрегаемого слагаемого составляет:

$$4 \cdot 1.8\theta^3 = 0.0576.$$

При этом  $a_0 = 3.96$ .

Тогда относительная погрешность составляет:

$$\frac{3.96 - 0.0576}{3.96} = 0.014 = 1.4\%..$$

Таким образом, погрешность математических расчётов является допустимой.

Следует также отметить, что в традиционных подходах оптимальная траектория полета к цели состоит из трех участков, на двух из которых БЛА движется по окружности с

максимально допустимым радиусом разворота, третий, прямолинейный, участок расположен между двумя другими [5]. Вычислительный эксперимент, проведенный в этой работе, показал, что длина траектории полета БЛА при его движении по дуге окружности с максимально допустимым радиусом разворота для совершения маневра к цели, близко расположенной к трассе, незначительно отличается от длины траектории при движении по окружности, проходящей через наблюдаемый объект. Связано это прежде всего с оговоренными допущениями близости расположения точечного объекта к трассе. Кроме того, чем больше расстояние между объектом и трассой, тем ближе длина траектории, учитывающая динамические характеристики БЛА, к длине прямолинейной траектории, их не учитывающей.

### **Выводы**

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Найдены оптимальные условия перелета БЛА с трассы на соседний точечный объект для наблюдения. Показано, что это возможно лишь после пролёта половины контролируемого участка трассы.
2. Момент перелёта БЛА с трассы на соседний точечный объект прежде всего зависит от продольной удаленности этого объекта.
3. Полученные условия позволяют планировать полет БЛА при комбинированном контроле как протяженных трасс, так и группы одиночных точечных наземных объектов.

### **Список литературы**

1. Лебедев Г.Н., Фирсов С.П., Мирзоян Л.А. «Интеллектуальная система самообучения при управлении маршрутным полетом» // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, 2001. № 9. с.12-14.
2. Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А. «Нейросетевое планирование действий по облету наземных объектов группой летательных аппаратов» // Авиакосмическое приборостроение, 2005. №12. с.41-47.
3. Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А., Ефимов А.В. «Нейросетевое планирование групповых действий летательных аппаратов при наблюдении заданной группы подвижных наземных объектов» // Мехатроника, автоматизация, управление, 2009. - № 11.с.60-65.

4. Лебедев Г.Н., Гришанин Ю.С., Липатов А.В., Степаньянц Г.А. Теория оптимальных систем. М.: МАИ, 1999.-317 с.
5. L. E. Dubins. «On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents» // American Journal of Mathematics, 1957. №79. 497–516.

\* работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (ГК №П787 от 24.05.2010)

Сведения об авторах:

Лебедев Георгий Николаевич, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

тел.: (499) 158-45-56, 8-916-306-92-84; e-mail: [kaf301@mai.ru](mailto:kaf301@mai.ru)

Мирзоян Лолита Артуровна, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

тел.: (499) 158-45-95, 8-916-520-19-10; e-mail: [mirzoyan@mai.ru](mailto:mirzoyan@mai.ru)

Ефимов Алексей Витальевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

тел.: 8-903-660-98-90; e-mail: [astroline@inbox.ru](mailto:astroline@inbox.ru)