

Труды МАИ. 2025. № 140
Trudy MAI. 2025. No. 140. (In Russ.)

Научная статья

УДК 531.011

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184056>

EDN: <https://www.elibrary.ru/ANAVSB>

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МЕМБРАНЫ И УДАРНИКА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Анатолий Сергеевич Оконечников¹, Григорий Валерьевич Федотенков²,

Елена Сергеевна Феоктистова³✉

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

¹oas.mai@mail.ru

²greghome@mail.ru

³feoktistova0206@mail.ru ✉

Аннотация. Настоящая статья рассматривает контактную задачу мембраны с ударником в нестационарной постановке. Особенностью подхода, предложенного в этой статье, является общность алгоритма, применяемого при решении нестационарных контактных задач в различных постановках – плоской и осесимметричной. В качестве результатов исследования представлены графики, иллюстрирующие зависимость от времени глубины внедрения ударника, изменение области контакта, а также скорость изменения области контакта на разных режимах взаимодействия.

Ключевые слова: нестационарный контакт, ударник, мембрана, прогиб мембраны, область контакта, функция влияния, плоская постановка, осесимметричная постановка

Для цитирования: Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Контактная задача для мембраны и ударника в нестационарной постановке // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184056>

Original article

THE CONTACT PROBLEM FOR THE MEMBRANE AND THE IMPACTOR IN A NONSTATIONARY FORMULATION

Anatoly S. Okonechnikov¹, Grigory V. Fedotenkov², Elena S. Feoktistova³✉

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

¹oas.mai@mail.ru

²greghome@mail.ru

³feoktistova0206@mail.ru✉

Abstract. This paper presents an algorithm for solving problems of contact interaction between an indenter and a membrane at various speeds. A distinctive feature of the algorithm proposed for consideration is its applicability to both axisymmetric and flat problems. This approach significantly simplifies solving contact problems by reducing various settings to a generalized solution. The second feature of the algorithm is its applicability to various speed modes of interaction, namely, at speeds above the speed of sound and at subsonic speeds. The paper introduces two hypotheses that take into account

the features of the subsonic mode of contact interaction. Based on these hypotheses, the paper applies the thesis that the membrane outside the contact area has the form of a linear function, and in the contact area the shape of the membrane coincides with the shape of the indenter itself. Due to the introduction of the above hypotheses, determining the position of the boundaries of the contact area of the stamp and the membrane at any time, with a known displacement of the frontal point of the stamp, becomes mathematically possible. Determining the position of the boundaries of the contact area is the first step in the proposed algorithm. The next step determines the displacement of membrane points under the action of contact pressure from the indenter, as well as the contact pressure itself under the indenter. In the course of solving the problem, the presence of distributed and concentrated loads was revealed, which is reflected in the obtained expression for the contact pressure. It is worth noting that concentrated loads arise only if the rate of expansion of the contact area coincides with the speed of sound. The article first considers the formulation of the problem in the subsonic interaction mode, and after obtaining the first results, moves on to consider the problem in the supersonic interaction mode. In this case, the problem statement will be similar to the subsonic mode. Taking into account the features of contact interaction in the supersonic mode, it is assumed that the deflection of the membrane when the indenter moves at speeds above the speed of sound will be determined by the shape of the indenter itself and the depth of its penetration. The next step of the algorithm determines the pressure under the stamp. The information on the structure of distributed loads under the stamp in the supersonic contact interaction mode obtained during the solution coincides with the results obtained for the subsonic mode. The paper presents an example of calculating the problem of interaction between a convex indenter and a membrane in a flat formulation, and presents

graphs of the obtained results for determining the depth of indenter penetration and the expansion of the contact area depending on time.

Keywords: Non-stationary contact, impactor, membrane, deflection of the membrane, contact area, influence function, flat setting, axisymmetric setting

For citation: Okonechnikov A.S., Fedotenkov G.V., Feoktistova E.S. The contact problem for the membrane and the impactor in a nonstationary formulation. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184056>

Введение

Настоящая статья посвящена разработке алгоритма для решения нестационарных контактных задач, предполагающий обобщенный метод решения, который можно использовать как для задач в плоской постановке, так и в осесимметричной. Такой подход является уникальным в области исследования нестационарных контактных задач. Если обратиться к работам [1] – [7], то можно отследить тенденцию в исследованиях контактных задач в конкретной постановке и разработке алгоритма их решения в рамках выбранных условий. Разработанный и представленный в данной статье алгоритм существенно расширяет рамки исследования контактного взаимодействия, позволяя выбрать наиболее корректную модель описания контактного взаимодействия для заданных условий, рассмотрев одну и ту же задачу в различных подходах.

Опираясь на особенности плоской и осесимметричной постановок, а именно – симметрия плоской задачи и область исследования осесимметричной ($r \geq 0$), введем обобщенную координату $\zeta \in [0, \infty)$, которая в случае плоской постановки задачи

будет принимать значение $\zeta = x$, а в случае осесимметричной принимает вид $\zeta = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Oxy – система координат на плоскости). При этом, в случае осесимметричной постановки задачи уравнение перемещений точек мембраны будет определяться только координатой и временем.

Стоит также отметить, что нестационарные контактные задачи имеют ряд особенностей на различных режимах взаимодействия – сверхзвуковом и дозвуковом. Ряд работ [7]-[10] посвящен исследованию одного из названных режимов. В данной статье представлен подход, позволяющий объединить решение задачи на обоих этапах. Однако, рассматривать их без учета особенностей каждого будет некорректно, в следствие чего рассмотрим задачу последовательно на каждом из этапов.

Постановка задачи

Как сказано выше, нестационарные контактные задачи имеют два скоростных этапа контактного взаимодействия: сверхзвуковой и дозвуковой. Учитывая ряд особенностей, связанных со скоростью погружения ударника в мембрану, будем решать задачу в два этапа. Рассмотрим дозвуковой режим внедрения.

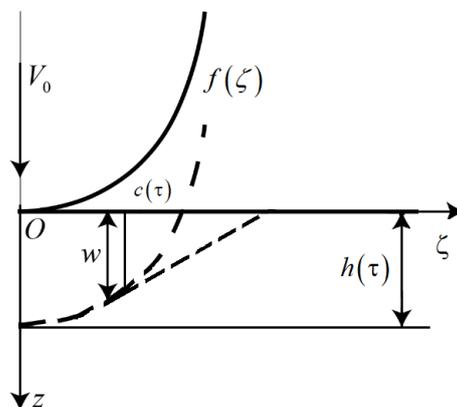


Рис. 1. Постановка задачи

Введем две системы координат: неподвижную – $O\zeta z$, которая связана с состоянием мембраны, находящейся в покое, и подвижную – $O_1\zeta_1 z$ связанную с лобовой точкой ударника O_1 , которая движется по нормали к плоскости мембраны. $f(\zeta)$ – функция, описывающая форму штампа в системе координат $O_1\zeta_1 z$, при этом $f(0) = 0$. Движение лобовой точки ударника O_1 направлено вдоль нормали к мембране по некоторому закону $h(t)$ со скоростью $\frac{dh(t)}{dt}$. Ударник в момент контакта выводит мембрану из состояния покоя. Изменение положения точек мембраны, отстоящих от состояния покоя, обозначим функцией $w(\zeta, t)$. При постоянной координате ζ , функция $w = w(\zeta, t)$ будет определять закон движения точек мембраны. Из этого следует, что кинематические характеристики ударника – скорость и ускорение, определяются частными производными $\frac{\partial w}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ соответственно. Если же значение t остается неизменным, то функция $w = w(\zeta, t)$ будет определять распределение прогиба мембраны в указанный момент времени t .

Опираясь на вышеописанное, уравнение поперечных колебаний мембраны в плоскости $O\zeta z$ можно представить в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 w(\zeta, t)}{\partial t^2} = T \Delta w(\zeta, t) + p(\zeta, t), \quad (0)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2)$$

где ρ – плотность материала мембраны, T – натяжение мембраны, p – давление на мембрану, Δ – оператор Лапласа, определяемый для плоской и осесимметричной постановок в соответствии с уравнениями (1) и (2) соответственно.

Далее, введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\zeta = \frac{\zeta'}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad p = \frac{p'L}{T}, \quad (3)$$

где L – некоторый линейный характерный размер, τ – безразмерное время, $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения колебаний в мембране. Таким образом, уравнение колебаний мембраны в безразмерном виде будет выглядеть согласно формулами (5) и (6) для плоской и осесимметричной постановки соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(\zeta, \tau) &= p(\zeta, \tau), \\ \tilde{L}w(\zeta, \tau) &= \ddot{w}(\zeta, \tau) - w''(\zeta, \tau), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(\zeta, \tau) &= p(\zeta, \tau), \\ \tilde{L}w(\zeta, \tau) &= \ddot{w}(\zeta, \tau) - \left(w''(\zeta, \tau) + \frac{1}{r} w'(\zeta, \tau) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Где $\tilde{L} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$ – дифференциальный оператор. Здесь и далее точкой обозначена производная функции по безразмерному времени τ , штрихом – по безразмерной координате ζ .

Контактное давление $p_c(\zeta, \tau)$ на мембрану будет распределено по области контакта Ω_c . Свойства p , содержащейся в выражениях (0), (4) и (5), описываются следующим образом:

$$p(\zeta, \tau) = p_c(\zeta, \tau), \zeta \in \Omega_c \quad (6)$$

Со стороны мембраны на ударник будет действовать сила, которую будем идентифицировать как реакцию мембраны:

$$R_c(\tau) = - \int_{\Omega_c} p_c(\zeta, \tau) J(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

Уравнение (7) содержит множитель $J(\zeta) = J_{1,2}(\zeta)$ учитывающий якобиан, принимающий значения $J_1(\zeta) = 1$ для плоской задачи и $J_2(\zeta) = 2\pi\zeta$ для осесимметричной.

Уравнение движения ударника под действием внешних сил описывается следующим образом:

$$m\ddot{h} = R_c(\tau) \quad (8)$$

где $h(\tau)$ – перемещение лобовой точки ударника.

Решение задачи будет строиться из предположения, что в начальный момент времени $\tau = 0$ мембрана находится в состоянии покоя (10), а ударник имеет некоторую начальную скорость отличную от нуля ($V_0 > 0$). Начальный зазор между ударником и мембраной отсутствует (11):

$$w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ \dot{h}(0) &= V_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Решение данной задачи предполагает, что точки мембраны, находящиеся на достаточном удалении от области контакта с ударником, находятся в недеформируемом состоянии, что описывается следующими граничными условиями:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w(\zeta; \tau) = 0 \quad (11)$$

Условие контакта определяется как равенство перемещений точек ударника и мембраны при наличии контактного давления больше нуля:

$$\begin{aligned} \Omega_c : w(\zeta, \tau) &= w_c(\zeta, \tau), p_c(\zeta, \tau) > 0, r \in \Omega_c, \\ w_c(\zeta, \tau) &= h(\tau) + f(\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

где $w_c(\zeta, \tau)$ функция определяет распределение перемещений точек ударника по координате ζ в момент времени τ , $c(\tau)$ – граница области контакта в момент времени τ , которая неявно определяется из уравнения:

$$c(\tau) : w(c, \tau) + h(\tau) + f(c) = 0, p_c(c, \tau) = 0 \quad (13)$$

В области контакта Ω_c предполагается отсутствие касательных напряжений:

$$\mathbf{p} = (0, p(r, \tau))^T \quad (14)$$

Таким образом, уравнения (0)-(2) и (4)-(14) описывают постановку задачи и процесс протекания нестационарного контакта ударника и мембраны.

Решение задачи

Для решения задачи введем предположение, что область контакта мембраны и ударника является непрерывной:

$$\Omega_c : \zeta \in [0, c(\tau)] \quad (15)$$

Границу области контакта, учитывая отсутствие зазора между ударником и мембраны в начальный момент времени, будем определять согласно формуле (13).

Таким образом, учитывая предположение (15), представляется возможным связать прогиб мембраны $w(\zeta, \tau)$ с глубиной внедрения ударника $h(\tau)$ и его формой $f(\zeta)$ в области контакта следующим образом:

$$w_c(\zeta, \tau) = h(\tau) + f(\zeta), \zeta \in [0, c(\tau)] \quad (16)$$

Далее, для решения задачи на дозвуковом этапе контактного взаимодействия ($\dot{c}(\tau) < 1$), представим возможным существование следующих гипотез:

Гипотеза 1. На режиме дозвукового контактного взаимодействия вне зоны контакта отклонения точек мембраны от состояния покоя имеют вид линейной функции. Носитель данной функции полностью определяется скоростью распространения волн в мембране.

Принимая во внимание данную гипотезу, перемещения точек мембраны на дозвуковом режиме взаимодействия можно описать согласно следующему выражению:

$$w(\zeta, \tau) = w_c(\zeta, \tau)H(c(\tau) - \zeta) + w_M(\zeta, \tau)\{H(\tau - \zeta) - H(c(\tau) - \zeta)\}. \quad (17)$$

Второе слагаемое в данном выражении описывает перемещения мембраны за пределами зоны контакта исследуемых тел. Помимо этого, гипотеза 1, позволяет определить перемещение точек мембраны в любой точке области определения с точностью до неизвестной границы контакта.

Чтобы определить границу области контакта, предлагается воспользоваться гипотезой 2, представленной ниже.

Гипотеза 2. Производная функции формы ударника равна производной нормальных перемещений мембраны на границе контакта в этой же точке:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=c(\tau)} = \left. \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=c(\tau)} \quad (18)$$

Таким образом, допущение существования гипотез 1 и 2 позволяет при известном значении перемещения лобовой точки ударника ($h(\tau)$) найти положение границы $\zeta = c(\tau)$ в любой момент времени.

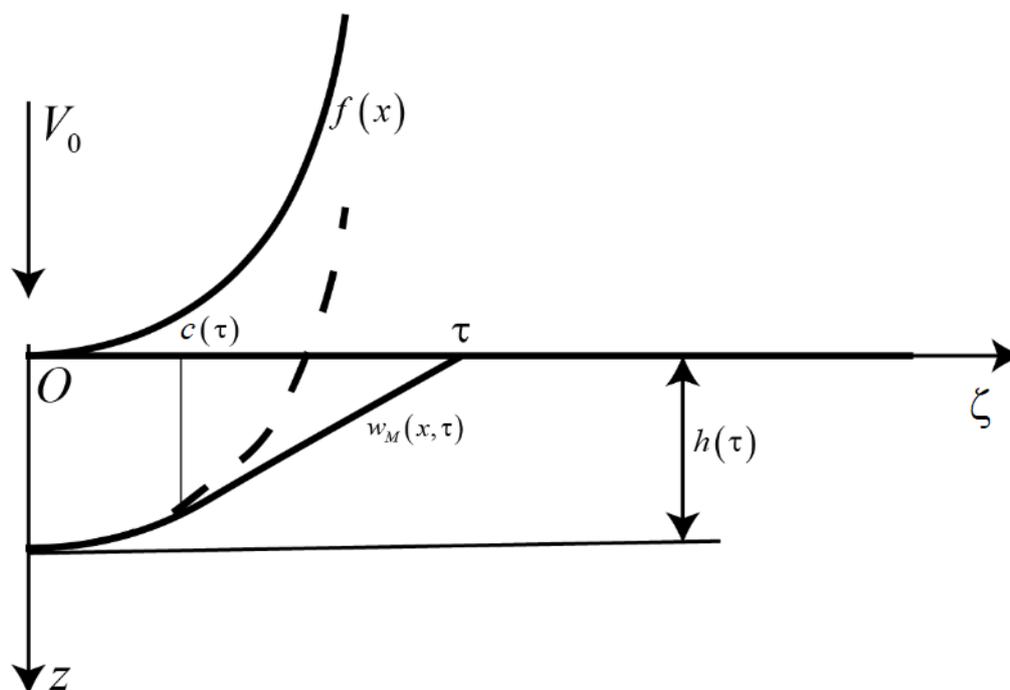


Рис. 2. Механический контакт ударника и мембраны.

Исследуя случай только вертикального внедрения ударника, представляется достаточным определить только $c(\tau)$ из уравнения, полученного графическим путем (Рис. 2) из геометрических соотношений:

$$f'(c) = -\frac{h(\tau) + f(c)}{\tau - c} \quad (20)$$

Учитывая возможность множества решений уравнения (20), необходимо учесть:

$$c(\tau) < \tau \quad (21)$$

Это условие вытекает из особенностей дозвукового режима контактного взаимодействия ударника с мембраной.

Также, опираясь на гипотезы 1 и 2, появляется возможность определить функцию $w_M(\zeta, \tau)$:

$$w_M(\zeta, \tau) = f'[c(\tau)][\zeta - c(\tau)] + h(\tau) + f[c(\tau)]. \quad (22)$$

Принимая во внимание структуру функции, описывающей перемещение точек мембраны (17), (20)-(22), а также структуру контактного давления, действующего на мембрану согласно (6), запишем выражение (5) как представлено ниже:

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(\zeta, \tau) &= p_c(\zeta, \tau)H[c(\tau) - \zeta] \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}w(\zeta, \tau) = p_c(\zeta, \tau), & \zeta < c(\tau); \\ \tilde{L}w(\zeta, \tau) = 0, & \zeta > c(\tau). \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Для дальнейшего решения задачи определяются производные функций $w_c(\zeta, \tau)$ и $w_M(\zeta, \tau)$ по координате и по времени, входящие в (23), для плоского и осесимметричного случая.

Далее, найденные производные подставляются в выражение (23), что позволяет записать выражение для контактного давления и для плоского и осесимметричного случаев соответственно.

$$p_c(\zeta, \tau) = (\ddot{w}_c(\zeta, \tau) - w_c''(\zeta, \tau))H(c - \zeta) + w_M'(c, \tau)\delta(\tau - \zeta) \quad (24)$$

$$p_c(\zeta, \tau) = \left(\ddot{w}_c(\zeta, \tau) - w_c''(\zeta, \tau) - \frac{1}{\zeta} w_c'(\zeta, \tau) \right) H(c - \zeta) + w_M'(c, \tau)\delta(\tau - \zeta) \quad (25)$$

Приняв во внимание свойства функции $w_c(\zeta, \tau)$ запишем уравнения (24) и (25) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 p_c(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau) H(c - \zeta) \\
 Q(\zeta, \tau) &= (\ddot{h}(\tau) - f''(\zeta))
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 p_c(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau) H(c - \zeta) \\
 Q(\zeta, \tau) &= \left(\ddot{h}(\tau) - f''(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{\zeta} \right)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Обратим внимание, что из выражений (24) и (25) следует, что на границах ударника образуются сосредоточенные силы в том случае, когда скорость расширения области контакта совпадает со скоростью звука. Приняв во внимание указанную особенность, соответствующее слагаемое будет выглядеть согласно выражению (29).

$$P_c(\zeta, \tau) = f'(c) \delta(c(\tau) - \zeta) \tag{28}$$

Характер контактного взаимодействия ударника и мембраны на сверхзвуковом режиме ($c(\tau) \geq 1$) дает возможность говорить о наличии таких сосредоточенных нагрузок. Скорость расширения пятна контакта на сверхзвуковом режиме значительно выше, чем скорость распределения возмущений в мембране. Такие рассуждения дают возможность предположить, что перемещение точек мембраны на сверхзвуковом режиме контактного взаимодействия будет зависеть только от формы ударника. При этом, появляется равенство носителей контактного давления $p_c(\zeta, \tau)$ и перемещений точек мембраны $w(\zeta, \tau)$.

Далее рассмотрим задачу о взаимодействии ударника с мембраной на сверхзвуковом режиме взаимодействия, в которой необходимо определить

контактное давление $p_c(\zeta, \tau)$. При решении задачи будем учитывать предположения, изложенные выше.

Постановка такой задачи описывается аналогично соотношениям для дозвукового этапа контактного взаимодействия: (0)-(2) и (4)-(14).

В этом случае границу контакта будем определять в соответствии с выражением (30), а перемещения точек мембраны в области контакта – в соответствии с выражением (31).

$$\begin{aligned} h(\tau) + f(c(\tau)) &= 0 \\ c(\tau) &= -f^{-1}(h) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} w(\zeta, \tau) &= h(\tau) + f(\zeta), \zeta \in [0, c(\tau)] \\ w(\zeta, \tau) &= w_c(\zeta, \tau)H(c(\tau) - \zeta) \end{aligned} \quad (30)$$

Затем, как и в случае дозвукового режима, необходимо определить частные производные для $w_c(\zeta, \tau)$ и $w_M(\zeta, \tau)$ по координате и по времени, а после перейти к определению $p_c(\zeta, \tau)$, опираясь на равенство носителей прогиба мембраны и контактного давления $p_c(r, \tau)H(c(\tau) - r)$. Выражение описывает плоскую постановку задачи, а – осесимметричную.

$$\begin{aligned} p_c(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P_c(\zeta, \tau)\delta(c - \zeta), \\ Q(\zeta, \tau) &= \ddot{w}_c(\zeta, \tau) - w_c''(\zeta, \tau) = \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta), \\ P_c(\zeta, \tau) &= \dot{w}_c(c, \tau)\dot{c}(\tau) + w_c'(c, \tau) = \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c). \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
p_c(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P_c(\zeta, \tau)\delta(c - \zeta), \\
Q(\zeta, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{\zeta}, \\
P_c(\zeta, \tau) &= \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c).
\end{aligned} \tag{32}$$

Как видно из выражений (31)-(32) – структура нагрузки $Q(\zeta, \tau)$ совпадает с нагрузкой, полученной для дозвукового режима контактного взаимодействия (26)-(27).

Если в уравнениях (31)-(32) пренебречь ускорением ($\dot{c}(\tau) = 0$), то получится слагаемое аналогичное выражению (28).

Таким образом, приходим к выводу, что структура распределенного давления на сверхзвуковом и дозвуковом режимах контактного взаимодействия не меняется. При этом, контактное давление на границе области контакта при сверхзвуковом режиме взаимодействия содержит сосредоточенные нагрузки.

Метод и алгоритм решения нестационарных контактных задач

В данном разделе представлен разработанный подход к решению контактных задач мембраны и ударника, предполагающих нестационарную постановку осесимметричных и плоских задач. Алгоритм, рассматривающий только осесимметричную постановку нестационарных контактных задач подробно рассмотрен в работе [5]. В данной работе будет рассмотрен случай, учитывающий оба возможных режима контактного взаимодействия: сверхзвуковой и дозвуковой. Предполагается, что механический контакт начинается на сверхзвуковом режиме, а затем, с течением времени переходит на дозвуковой.

Найдем реакцию мембраны $R_c(\tau)$ из уравнения (7) для плоского случая:

$$\begin{aligned}
 R_c(\tau) &= R_Q(\tau) + R_P(\tau), \\
 R_Q(\tau) &= -2 \int_0^{c(\tau)} Q(\zeta, \tau) d\zeta = -2(\ddot{h}(\tau)c(\tau) - f'(c(\tau))) \\
 R_P(\tau) &= -2 \int_0^{\infty} P(\zeta, \tau) \delta(c(\tau) - \zeta) d\zeta = -2(\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c(\tau)))
 \end{aligned} \tag{33}$$

Таким образом, уравнение движения ударника и краевая задача Коши, при учете структуры $R_c(\tau)$, принимает вид для плоского случая согласно (35)-(38).

– сверхзвуковой режим (плоский случай)

$$\begin{aligned}
 R_c(\tau) &= -2(\ddot{h}(\tau)c(\tau) + \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau)) = -2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\dot{h}(\tau)c(\tau)) \\
 m\ddot{h}(\tau) &= -2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\dot{h}(\tau)c(\tau))
 \end{aligned} \tag{34}$$

Проинтегрировав нижнее уравнение из (34) с учетом (10), получаем:

$$m(\dot{h}(\tau) - V_0) = -2\dot{h}(\tau)c(\tau) \tag{35}$$

Тогда для ударника задача Коши принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{h}(\tau) &= \frac{mV_0}{m + 2c(\tau)} \\
 h(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{36}$$

– дозвуковой режим (плоский случай)

$$\begin{aligned}
R_c(\tau) &= 2(f'(c(\tau)) - \ddot{h}(\tau)c(\tau)), \\
\ddot{h}(\tau) &= \frac{2}{m + 2c(\tau)} f'(c(\tau)), \\
\dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0.
\end{aligned} \tag{37}$$

Аналогичным образом определим реакцию мембраны $R_c(\tau)$ для осесимметричного случая:

$$\begin{aligned}
R_c(\tau) &= R_Q + R_P, \\
R_Q &= -2\pi \left(\frac{\ddot{h}(\tau)c(\tau)}{2} - f'(c(\tau)) \right) c(\tau) \\
R_P &= -2\pi (\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c(\tau))) c(\tau)
\end{aligned} \tag{38}$$

В этом случае уравнение движения ударника и краевая задача Коши, при учете структуры $R_c(\tau)$, принимает вид (40)-(41).

– сверхзвуковой режим (осесимметричный случай)

$$\begin{aligned}
m\ddot{h}(\tau) &= R_c(\tau), \\
R_c(\tau) &= -2\pi \left(\frac{\ddot{h}(\tau)c(\tau)}{2} + \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) \right) c(\tau), \\
\ddot{h}(\tau) &= -2\pi \frac{\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau)c(\tau)}{(m + \pi c^2(\tau))} \\
\dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

– дозвуковой режим (осесимметричный случай)

$$R_c(\tau) = 2\pi \left(f'(c(\tau)) - \frac{\ddot{h}(\tau)c(\tau)}{2} \right) c(\tau),$$

$$\ddot{h}(\tau) = \frac{2\pi}{m + \pi c^2(\tau)} f'(c(\tau)) \quad (40)$$

$$\dot{h}(0) = V_0, h(0) = 0.$$

Таким образом, задача по определению закона внедрения ударника $h(\tau)$ начинается с анализа сверхзвукового режима контактного взаимодействия, где решается задача Коши (36) либо (39). Граница области контакта исследуемых тел определяется согласно выражению (29).

Затем находится момент времени τ , при наступлении которого скорость расширения области контакта переходит в область дозвукового режима взаимодействия ($\dot{c}(\tau) < 1$). После прохождения указанного момента времени начинается анализ дозвукового режима контактного взаимодействия согласно (37) и (40). Для этого случая граница области контакта будет определяться при помощи (20) и (21).

Пример расчетов

Рассмотрим задачу для взаимодействия выпуклого ударника с мембраной в плоской постановке. Пусть форма ударника определяется уравнением $f(\zeta) = -k\zeta^2$. Предполагается, что взаимодействие начинается на сверхзвуковом режиме – решается задача (36). Определяем границу области контакта и скорость ее расширения из (29):

$$\begin{aligned}
c(\tau) &= \sqrt{\frac{h(\tau)}{k}}, \\
\dot{c}(\tau) &= \frac{\dot{h}(\tau)}{2\sqrt{h(\tau)k}}
\end{aligned}
\tag{41}$$

Решив задачу Коши (36), находим:

$$\tau = \frac{h(\tau)}{V_0} + \frac{4(kh(\tau))^{3/2}}{3mV_0k^2}
\tag{42}$$

Из выражения (42) находим момент времени $\tau = \tau_D$, в который осуществляется переход на дозвуковой режим взаимодействия:

$$\tau_D : \dot{c}(\tau) < 1
\tag{43}$$

Перепишем условие (43) в следующем виде:

$$\dot{h}(\tau_D) < 2\sqrt{h(\tau_D)k}
\tag{44}$$

На конечный момент времени сверхзвукового режима, таким образом, становятся известны $h(\tau_D)$ и $\dot{h}(\tau_D)$, которые будут являться начальными условиями для задачи Коши дозвукового режима взаимодействия:

$$\begin{aligned}
R_c(\tau) &= -2(\ddot{h}(\tau)c(\tau) + 2kc(\tau)), \\
\ddot{h}(\tau) &= -\frac{4kc(\tau)}{m + 2c(\tau)}, \\
\dot{h}(0) &= \dot{h}(\tau_D), h(0) = h(\tau_D).
\end{aligned}
\tag{44}$$

Где $c(\tau) = \frac{k\tau + \sqrt{k^2\tau^2 - h(\tau)k}}{k}$.

Задача (44) решалась с помощью метода Рунге-Кутты.

Для числового решения задачи были приняты следующие параметры:

$$V_0 = 2, k = 1, m = 1.$$

Процесс погружения ударника в мембрану $h(\tau)$, учитывающий оба режима взаимодействия – сверхзвуковой и дозвуковой, принимает вид согласно рис. 3, а расширение пятна контакта – согласно рис. 4.



Рис. 3. Глубина внедрения ударника в мембрану в зависимости от времени

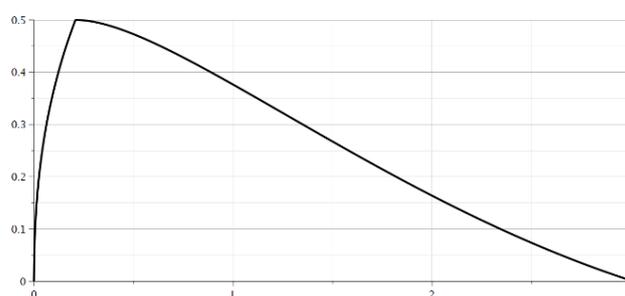


Рис. 4. Расширение пятна контакта в зависимости от времени

Для заданной формы ударника решение найдено аналитически. Момент времени перехода со сверхзвукового режима взаимодействия на дозвуковой $\tau = 0.2083$ был получен с помощью численных методов. Значения закона погружения ударника и скорости погружения при найденном моменте времени:

$$h(\tau_D) = 0.25, \dot{h}(\tau_D) = 0.9999999998.$$

Стоит отметить, что согласно рис. 3, внедрение ударника в мембрану происходит без отрыва, что согласуется с физическими законами. Перелом на рис. 4 объясняется точкой перехода со сверхзвукового режима взаимодействия на дозвуковой.

Список источников

1. Краснюк П.П. Плоская контактная задача взаимодействия наклоненного прямоугольного штампа и упругого слоя при стационарном фрикционном тепловыделении // Трение и износ. 2005. Т. 26, № 2. С. 117-127.
2. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная контактная задача для абсолютно твердого штампа и упругого полупространства с полостью // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=117958>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-02](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-02)
3. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
4. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Осесимметричная контактная задача о углублениях конического штампа в полупространстве с монохромным покрытым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 5. С. 710-716.
5. Киреенков А.А., Оконечников А.С., Феоктистова Е.С. Нестационарная контактная задача для штампа и мембраны в осесимметричной постановке // Труды МАИ. 2024. № 138. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=182658>
6. Буланов Э.А. Осесимметричная контактная задача // Трение и износ. 2006. Т. 27, № 6. С. 587-591.
7. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по

глубине покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 5. С.710-716.

8. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 98-108.

9. Калинин В.В., Митин А.Ю., Федотенков Г.В. Трехмерное нестационарное движение круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко // Математический журнал им. Н.И. Лобачевского. 2019. Т. 40, № 3. С. 311-320. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>

10. Mikhailova E.Yu., Fedotkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // Mechanics of Solids. 2011. V. 46, No. 2. P. 239-247. DOI: [10.3103/S0025654411020129](https://doi.org/10.3103/S0025654411020129)

11. Аверьянов И.О. Зинин А.В. Математическая модель процесса приземления недеформируемого груза с амортизирующим устройством на жесткую площадку // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)

12. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=58464>

13. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

14. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. - 472 с.
15. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. - М.: Наука. Физматлит, 1995. - 352 с.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2014. V. 43, No 2. P. 145-152.
17. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общие соотношения и вариационные принципы теории упругости. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – 144 с.
18. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
19. Фирсанов В.В., Фам В.Т., Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2021. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
20. Davydov S.A., Akhmetova E.R., Zemskov A.V. Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations // Mathematical and Computational Applications. 2019. V. 24 (1), P. 26. DOI: [10.3390/mca24010026](https://doi.org/10.3390/mca24010026)

References

1. Krasnyuk P.P. The planar contact problem of interaction between a tilted rectangular die and an elastic layer under stationary frictional heat generation. *Trenie i iznos*. 2005. V. 26, No. 2. P. 117-127. (In Russ.)
2. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Plane unsteady contact problem for a rigid stamp and an elastic half-space with a cavity. *Trudy MAI*. 2020. No. 113. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117958>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-02](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-02)
3. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D.V. Axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with pseudo-elastic Cosserat medium. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267>
4. Aizikovich S.M., Vasil'ev A.S., Volkov S.S. An axisymmetric contact problem about the recesses of a conical die in a half-space with a monochrome surface covering. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2015. V. 79, No. 5. P. 710-716. (In Russ.)
5. Kireenkov A.A., Okonechnikov A.S., Feoktistova E.S. A nonstationary contact problem for a stamp and a membrane in an axisymmetric formulation. *Trudy MAI*. 2024. No. 138. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=182658>
6. Bulanov E.A. An axisymmetric contact problem. *Trenie i iznos*. 2006. V. 27, No. 6. P. 587-591. (In Russ.)
7. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S., Volkov S.S. The axisymmetric contact problem of pressing a conical die into a half-space with a coating that is inhomogeneous in depth. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. V. 79, No. 5. P. 500-505.

8. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Unsteady axisymmetric problem of impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction). *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2011. No. 2. P. 98-108. (In Russ.)
9. Kalinchuk V.V., Mitin A.Yu., Fedotenkov G.V. Three-dimensional unsteady motion of a circular cylindrical shell of the Timoshenko type. *Matematicheskii zhurnal im. N.I. Lobachevskogo*. 2019. V. 40, No. 3. P. 311-320. (In Russ.). URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>
10. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction). *Mechanics of Solids*. 2011. V. 46, No. 2. P. 239-247. DOI: [10.3103/S0025654411020129](https://doi.org/10.3103/S0025654411020129)
11. Aver'yanov I.O. Zinin A.V. Mathematical model of non-deformed cargo landing system with dampers to rigid plane landing process. *Trudy MAI*. 2022. No. 124. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)
12. Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Unsteady motion of a concentrated load, applied to the boundary of the half-space. *Trudy MAI*. 2015. No. 82. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58464>
13. Slepyan L.I., Yakovlev YU.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki* (Integral transformations in nonstationary problems of mechanics). Leningrad: Sudostroenie Publ., 1980. 344 p.
14. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media). Moscow: Fizmatlit Publ., 2004. 472 p.

15. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* (Dynamic contact problems with movable boundaries). Moscow: Nauka. Fizmatlit Publ., 1995. 352 p.
16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. V. 43, No. 2. P. 145-152.
17. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchie sootnosheniya i variatsionnye printsipy teorii uprugosti* (General relations and variational principles of elasticity theory). Moscow: Izd-vo MAI-PRINT Publ., 2009. 144 p.
18. Lokteva N.A., Ivanov S.I. Noise-absorbing properties of a homogeneous plate with arbitrary boundary conditions under the impact of a plane acoustic wave in acoustic medium. *Trudy MAI*. 2021. No. 117. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
19. Firсанov V.V., Fam V.T., Chan N.D. Strain-stress state analysis of multilayer composite spherical shells based on the refined theory. *Trudy MAI*. 2021. No. 114. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
20. Davydov S.A., Akhmetova E.R., Zemskov A.V. Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations. *Mathematical and Computational Applications*. 2019. V. 24 (1), P. 26. DOI: [10.3390/mca24010026](https://doi.org/10.3390/mca24010026)

Статья поступила в редакцию 25.09.2024

Одобрена после рецензирования 25.12.2025

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 25.09.2024; approved after reviewing on 25.12.2025; accepted for publication on 25.02.2025