

## **МЕХАНИКА**

Научная статья

УДК 621.833.65

DOI: [10.34759/trd-2021-120-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-01)

### **Комбинированные вращения в технических системах**

**Игорь Павлович Попов**

Курганский государственный университет, Курган, Россия

[ip.popov@yandex.ru](mailto:ip.popov@yandex.ru)

*Аннотация.* Цель исследования состоит в обобщении принципа комбинации движений на круговые движения. Актуальность работы обусловлена тем, что в технических системах, в том числе в авиационной и космической технике, в частности, в авиационных трансмиссиях, подшипниках, орбитальных системах, вертолетных механизмах и многих других широко распространены комбинированные вращательные движения, и при конструировании важно представлять характер суммарного движения. Установлено, что при вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс. При вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность. При круговых движениях с кратными скоростями траектории суммарного движения представляет собой улитки. Практический аспект исследования определяется тем, что полученные формулы могут непосредственно использоваться в САПР при выполнении конструкторских работ.

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

**Ключевые слова:** комбинация движений, круговые движения, эллиптическая траектория, круговая траектория, кратные скорости

**Для цитирования:** Попов И.П. Комбинированные вращения в технических системах // Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-01)

## MECHANICS

Original article

### **Combined rotations in technical systems**

**Igor P. Popov**

Kurgan State University, Kurgan, Russia

[ip.popow@yandex.ru](mailto:ip.popow@yandex.ru)

**Abstract.** The purpose of the research consists in generalizing the principle of a combination of movements to the circular movements. The relevance of the work is stipulated by the fact that in technical systems, including aviation and space technology, particularly, in aircraft transmissions, bearings, orbital systems, helicopter mechanisms and many others, combined rotational movements are widespread, and it is important to represent the nature of the total movement when designing. The author considers an  $x'O'y'$  coordinate system, which rotates in an  $xOy$  one without angular acceleration with the velocity of  $\omega$ . The radius of rotation is  $\rho_1$ . Wherein  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$ . The object  $a$  rotates in a  $x'O'y'$  coordinate system without angular acceleration at a speed  $\pm\omega$ . The

radius of rotation is  $\rho_2$ . It has been established that when rotating in opposite directions, the trajectory of the total motion represents an ellipse. All standard characteristics of the ellipse were determined in relation to the case under consideration. The elliptical trajectory inclination is set. The article shows that in the case of the trajectory of the total motion is elliptical and the semiaxes are equal to  $(\rho_1 + \rho_2)$  and  $|\rho_1 - \rho_2|$ , the object  $a$  performs circular motion in the coordinate system  $x'O'y'$  without angular acceleration with velocity  $-\omega$ . Just as the result of the two nonaccelerated movements superposition is also an nonaccelerated movement, i.e. it is uniform and rectilinear movement, at rotations in the same direction the trajectory of the total movement represents a circumference. At circular motions with multiple speeds, the trajectory of the total motion represents spirals. The practical aspect of the study is being determined by the fact that the formulas obtained can be directly used in CAD when performing design work.

**Keywords:** combination of movements, circular movements, elliptical trajectory, circular trajectory, multiples of speed

**For citation:** Popov I.P. Combined rotations in technical systems. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-01)

Результатом суперпозиции двух неускоренных движений является также неускоренное, т.е. равномерное и прямолинейное движение (рис. 1).

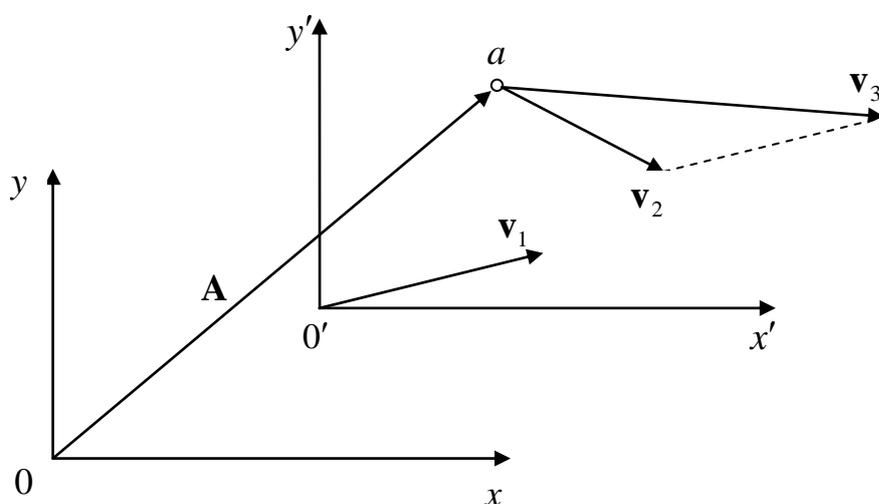


Рис. 1 – Сложение неускоренных движений

Здесь  $\mathbf{v}_1$  – скорость координатной системы  $x'O'y'$  в координатной системе  $xOy$ ,  $\mathbf{v}_2$  – скорость объекта  $a$  в координатной системе  $x'O'y'$ ,  $\mathbf{v}_3$  – скорость объекта  $a$  в координатной системе  $xOy$ . Очевидно, что конец вектора  $\mathbf{A}$  описывает отрезок прямой линии.

Цель исследования состоит в обобщении принципа комбинации движений на круговые движения.

Актуальность работы обусловлена тем, что в технических системах, в том числе в авиационной и космической технике, в частности, в авиационных трансмиссиях [1, 2], подшипниках [3, 4], орбитальных системах [5–7], вертолетных механизмах [8–11] и многих других [12–20] широко распространены комбинированные вращательные движения, и при конструировании важно представлять характер суммарного движения.

Пусть координатная система  $x'O'y'$  вращается в координатной системе  $xOy$  без углового ускорения со скоростью  $\omega$ . Радиус вращения равен  $\rho_1$ . При этом  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$ . Объект  $a$  вращается в координатной системе  $x'O'y'$  без углового ускорения со скоростью  $\pm\omega$ . Радиус вращения равен  $\rho_2$ .

### Вращения в противоположные стороны

**Теорема 1.** При вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс.

*Доказательство.*

В координатной системе  $xOy$  начало  $O'$  координатной системы  $x'O'y'$  определяется следующим образом.

$$x_1 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y_1 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (1)$$

В координатной системе  $x'O'y'$  объект  $a$  определяется, соответственно,

$$x_2 = \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2),$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – начальные фазы.

В координатной системе  $xOy$  объект  $a$  определяется следующим образом.

$$x = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2),$$

$$y = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2).$$

$$x = \cos \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - \sin \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2),$$

$$y = \sin \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2).$$

Из этих выражений определяются

$$\sin \omega t = \frac{y(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} - \frac{x(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2},$$

$$\cos \omega t = \frac{x(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \frac{y(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1,$$

$$\begin{aligned} & \frac{y^2(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + x^2(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \\ & - \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\ & + \frac{x^2(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + y^2(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\ & + \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1, \\ & \frac{x^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\ & + \frac{y^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее выражение представляет собой формулу эллипса.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Полуоси фигуры (2) определяются как  $(\rho_1 + \rho_2)$  и  $|\rho_1 - \rho_2|$ .

*Доказательство.*

При условии  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  выражение (2) приводится к канонической форме

$$\frac{x^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \frac{y^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{y^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1. \quad (3)$$

Теорема доказана.

**Следствие 2-1.** Если  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , то траектория суммарного движения является прямолинейной. Ее длина равна  $4\rho$ .

Далее в следствиях 2-2 – 2-4 представлены стандартные характеристики эллипса применительно к рассматриваемому случаю.

**Следствие 2-2.**

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)/2}.$$

**Следствие 2-3.** Для формы (3) справедливо

$$f_{1,2} = (\pm 2\sqrt{\rho_1\rho_2}, 0).$$

**Следствие 2-4.**

$$\lambda_1 = (\rho_1 + \rho_2)^2, \quad \lambda_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2.$$

**Теорема 3.** В координатной системе  $xOy$  эллиптическая траектория имеет наклон  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ .

*Доказательство.*

Если форму (3) повернуть на  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ , она преобразуется следующим образом.

$$\frac{\left(x \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{\left(-x \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{y^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1.$$

Это выражение идентично формуле (2).

Теорема доказана.

**Пример.** Если  $\varphi_1 = 120^\circ$ ,  $\varphi_2 = -30^\circ$ , то эллиптическая траектория имеет наклон  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2 = (120 - 30)/2 = 45^\circ$  (рис. 2).

Нетрудно доказать теорему, обратную первой.

**Теорема 4.** Если траектория суммарного движения является эллиптической и полуоси равны  $(\rho_1 + \rho_2)$  и  $|\rho_1 - \rho_2|$ , то объект  $a$  совершает круговое движение в координатной системе  $x'O'y'$  без углового ускорения со скоростью  $-\omega$ .

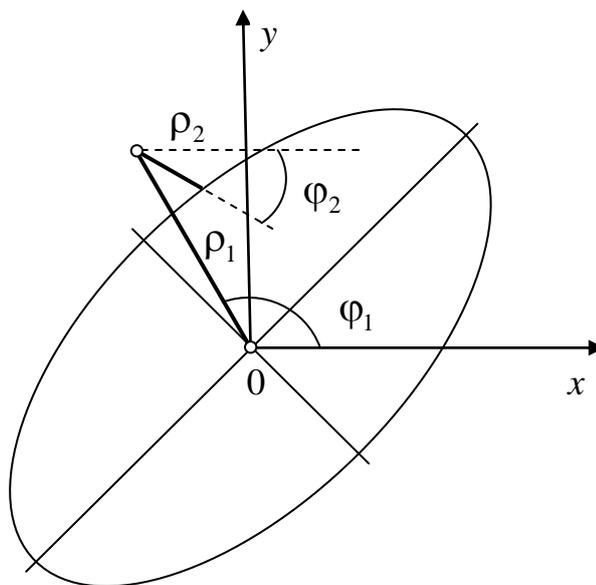


Рис. 2 – Эллиптическая траектория

### Вращения в одну сторону

**Теорема 5.** При вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность.

*Доказательство.*

В координатной системе  $xOy$  начало  $O'$  координатной системы  $x'O'y'$  описывается формулой (1).

В координатной системе  $x'O'y'$  объект  $a$  определяется следующим образом.

$$x_2 = \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

В координатной системе  $xOy$  объект  $a$  определяется, соответственно,

$$x_a = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$y_a = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Для радиус-вектора  $\mathbf{A}$  справедливо преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = x_a^2 + y_a^2 &= \rho_1^2 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \cos(\omega t + \varphi_2) + 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ \rho_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \sin(\omega t + \varphi_2) + 2\rho_1\rho_2 \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &\dots \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Величина радиус-вектора  $\mathbf{A}$  не меняется. Это возможно лишь в том случае, если траектория суммарного движения является круговой.

Теорема доказана.

**Следствие 5-1.** Объект  $a$  вращается в координатной системе  $xOy$  без углового ускорения со скоростью  $\omega$ .

**Следствие 5-2.** Радиус вращения равен  $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .

Нетрудно доказать теорему, обратную пятой.

**Теорема 6.** Если траектория суммарного движения является круговой, то объект  $a$  совершает круговое движение в координатной системе  $x'O'y'$  без углового ускорения со скоростью  $+\omega$ .

**Теорема 7.** Если скорость вращения объекта  $a$  в координатной системе  $x'O'y'$  равна нулю, то траектория суммарного движения является круговой с центром в точке с координатами  $x_{\rho_1} = \rho_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_{\rho_1} = \rho_2 \sin \varphi_2$  и с радиусом  $\rho_1$ .

*Доказательство.*

В координатной системе  $xOy$  начало  $O'$  координатной системы  $x'O'y'$  описывается формулой (1).

В координатной системе  $x'O'y'$  объект  $a$  определяется следующим образом.

$$x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

В координатной системе  $xOy$  объект  $a$  определяется, соответственно,.

$$x_a = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos \varphi_2,$$

$$y_a = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin \varphi_2,$$

$$x_a - \rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_a - \rho_2 \sin \varphi_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$(x_a - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (y_a - \rho_2 \sin \varphi_2)^2 = \rho_1^2.$$

Теорема доказана.

### **Круговые движения с кратными скоростями**

Объект  $a$  вращается в координатной системе  $x'O'y'$  без углового ускорения со скоростью  $+2\omega$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

В координатной системе  $xOy$  начало  $O'$  координатной системы  $x'O'y'$  определяется следующим образом.

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega t, \quad y_1 = \rho_1 \sin \omega t.$$

В координатной системе  $x'O'y'$  объект  $a$  определяется, соответственно,

$$x_2 = \rho_2 \cos 2\omega t, \quad y_2 = \rho_2 \sin 2\omega t.$$

В координатной системе  $xOy$  объект  $a$  определяется следующим образом.

$$x_a = \rho_1 \cos \omega t + \rho_2 \cos 2\omega t ,$$

$$y_a = \rho_1 \sin \omega t + \rho_2 \sin 2\omega t .$$

На рис. 3 показана траектория объекта  $a$  ( $\rho_1 = \rho_2$ ).

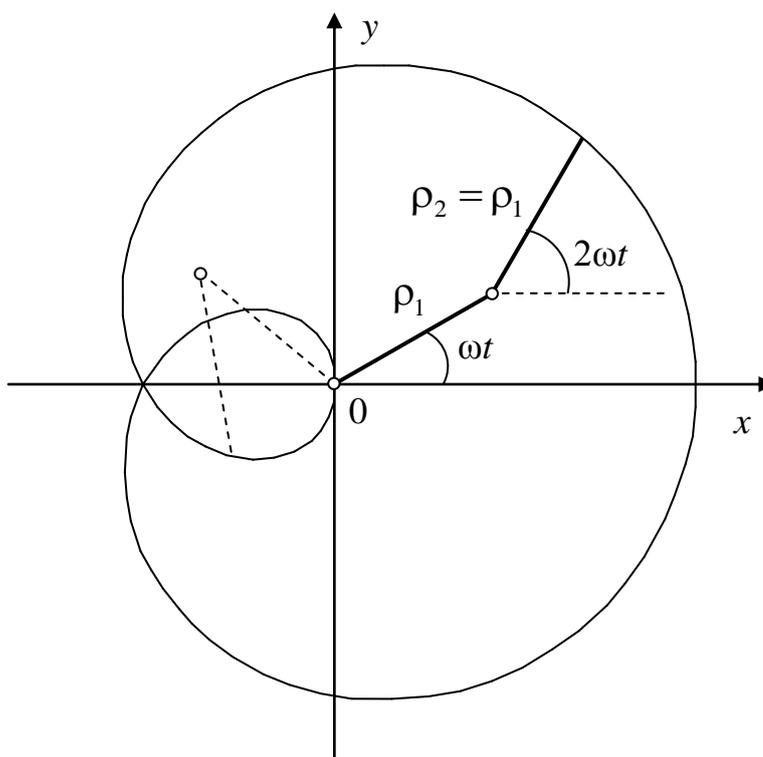


Рис. 3 – Траектория типа улитки

В полярных координатах эта траектория представима в виде

$$\rho = \rho_1 \sqrt{2 + 2 \cos \frac{2}{3} \varphi} .$$

Петля в траектории появляется при выполнении соотношений

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 \sin 2\omega t ,$$

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 2 \sin \omega t \cos \omega t ,$$

$$\rho_1 < 2\rho_2 \cos \omega t .$$

Если  $\rho_1 \geq 2\rho_2$  петля не образуется. Такая траектория показана на рис. 4.

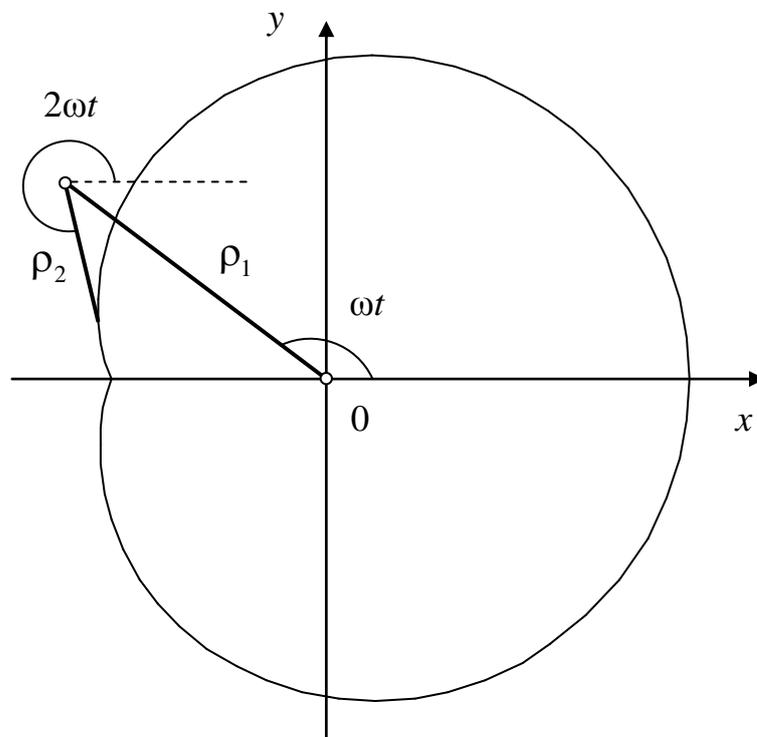


Рис. 4 – Улитка без петли

### Заключение

Установлено, что при вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс.

При вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность.

При круговых движениях с кратными скоростями траектории суммарного движения представляет собой улитки.

Практический аспект исследования определяется тем, что полученные формулы могут непосредственно использоваться в САПР при выполнении конструкторских работ.

### Список источников

1. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В., Дегтярев С.А. Разработка пространственной модели зубчатой передачи с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для решения нелинейных задач динамики авиационных трансмиссий // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=116336>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-7](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-7)
2. Касумов Е.В. О разработке комплекса математических моделей проекторочного расчета механических систем летательных аппаратов // Труды МАИ. 2012. № 52. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29426>
3. Нахатакян Ф.Г. Влияние зазора в роликовых подшипниках на силовой контакт между его элементами // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119901>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-04)
4. Сорокин Ф.Д., Чжан Х., Попов В.В., Иванников В.В. Экспериментальная верификация энергетической модели роликового подшипника для моделирования опорных узлов авиационных двигателей. Часть 2. Исследование влияния изгиба колец на нагрузочную характеристику в случае не закрепленного в обойме

<http://trudymai.ru/published.php?ID=102114>

5. Ледков А.С., Соболев Р.Г. Стабилизация электродинамической тросовой системы на круговой орбите // Труды МАИ. 2019. № 107. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=107856>

6. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=72568>

7. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58455>

8. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Анализ расчетно-экспериментальных исследований по системам индивидуального управления лопастями винта вертолета // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65452>

9. Павленко Н.С. Выбор параметров втулки несущего винта вертолета из условий обеспечения потребного демпфирования в плоскости вращения // Труды МАИ. 2015. № 81. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=57765>

10. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование интерференции между несущим и рулевым винтами вертолета при вертикальном

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

снижении, включая режим «вихревого кольца» несущего винта // Труды МАИ. 2013.

№ 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43135>

11. Желонкин А.А. Построение и исследование в MSC.ADAMS динамической модели вертолѐта // Труды МАИ. 2013. № 65. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=35856>

12. Кочетов В.И., Лазарев С.И., Соколов М.В., Ломакина О.В., Шестаков К.В. Методика расчета геометрических параметров и прочностных характеристик валкового оборудования // Труды МАИ. 2020. № 110. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=112813>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-1)

13. Юдинцев В.В. Модель пространственного движения механизма Йо-Йо // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=83566>

14. Однокурцев К.А., Власевский А.А., Лукин П.А. Расчет перемещений приводов манипуляторов при использовании различных методов позиционирования // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=40286>

15. Крылов Н.В. О прочностном расчѐте волновых передач с телами качения с вращательным движением выходного звена // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35922>

16. Ефромеев А.Г. Микропроцессорная система управления исполнительным двигателем с вращающимся статором // Труды МАИ. 2012. № 62. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35509>

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

17. Крылов Н.В., Самсонович С.Л., Степанов В.С. Автоматизированное проектирование волновых редукторов с телами качения // Труды МАИ. 2012. № 62.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35524>

18. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 667 – 671. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)

19. Попов И.П. Моделирование триинертного осциллятора // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 4. С. 73 – 79. DOI: [10.15593/2499-9873/2018.4.04](https://doi.org/10.15593/2499-9873/2018.4.04)

20. Попов И.П. Использование инертного триплетного маятника в вибрационных сортировальных машинах // Вестник Вологодского государственного университета. 2020. № 3(9). С. 11 – 13.

### References

1. Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V., Degtyarev S.A. *Trudy MAI*, 2020, no.

112. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116336>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-7](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-7)

2. Kasumov E.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 52. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29426>

3. Nakhatkanyan F.G. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119901>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-04)

4. Sorokin F.D., Chzhan Kh., Popov V.V., Ivannikov V.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 104.

URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102114>

5. Ledkov A.S., Sobolev R.G. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107856>

6. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568>

7. Bezglasnyi S.P., Krasnov M.V., Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82.

URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58455>

8. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 85.

URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65452>

9. Pavlenko N.S. *Trudy MAI*, 2015, no. 81. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=57765>

10. Ignatkin Yu.M., Makeev P.V., Shomov A.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43135>

11. Zhelonkin A.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35856>

12. Kochetov V.I., Lazarev S.I., Sokolov M.V., Lomakina O.V., Shestakov K.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112813>. DOI:

[10.34759/trd-2020-110-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-1)

13. Yudintsev V.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=83566>

Труды МАИ. 2021. Выпуск № 120

Trudy MAI. 2021. Issues no.120

14. Odnokurtsev K.A., Vlasevskii A.A., Lukin P.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 66. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=40286>

15. Krylov N.V. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35922>

16. Efromeev A.G. *Trudy MAI*, 2012, no. 62. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35509>

17. Krylov N.V., Samsonovich S.L., Stepanov V.S. *Trudy MAI*, 2012, no. 62. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35524>

18. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 667 – 671. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)

19. Popov I.P. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya*, 2018, no. 4, pp. 73 – 79.

DOI: [10.15593/2499-9873/2018.4.04](https://doi.org/10.15593/2499-9873/2018.4.04)

20. Popov I.P. *Vestnik Vologodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2020, no. 3 (9), pp. 11 – 13.

Статья поступила в редакцию 01.09.2021; одобрена после рецензирования 10.09.2021; принята к публикации 22.10.2021

The article was submitted 01.09.2021; approved after reviewing 10.09.2021; accepted for publication 22.10.2021