

УДК 629.7

Устранение влияния слабых гравитационных возмущений на группировку formation flying

И.Е. Зараменских, М.Ю. Овчинников, И.В. Ритус

Аннотация

Для существования группировки спутников Formation Flying необходимо отсутствие вековых относительных уходов. При учете несферичности Земли в случае, если спутники находятся на разных орбитах, возникает вековой уход по аргументу восходящего узла и аргументу перигея. В настоящей работе проводится исследование возможности устранения вековых относительных уходов для двух спутников в конфигурации Formation Flying при движении в возмущенном гравитационном поле в случае использования двигателя малой тяги и пассивной магнитной системы ориентации.

Ключевые слова

малый спутник; пассивная магнитная система ориентации; групповой полет спутников; управление относительным положением.

1. Введение

Известно, что в отсутствие внешних возмущений при определенных начальных условиях для формации спутников существуют периодические относительные траектории дочернего спутника относительно главного, движущегося по круговой траектории, даже в отсутствие любого управления. Это следует из уравнений Хилла, которые получаются путем линеаризации уравнений Ньютона при движении спутников в центральном поле тяжести [1].

Реальное гравитационное поле Земли не является центральным. Некоторое приближение модели реального гравитационного поля Земли представляет собой разложение в ряд по полиномам Лежандра, где за первый член разложения отвечает как раз центральное поле, а если предположить, что распределение массы Земли симметричное, то следующим членом разложения является гармоника J_2 [2]. При этом, гармоника J_2 в 1000 раз меньше, чем первая

гармоника разложения, поэтому влияние несферичности Земли на движение в гравитационное поле Земли можно рассматривать как возмущение.

Влияние гармоник J_2 на формацию спутников изучается во многих публикациях. Например, в [3] исследуется влияние возмущения от несферичности Земли на ограниченное движение формации спутников и показывается, что гармонику J_2 при анализе движения учитывать необходимо. В [4] проводится исследование модифицированных уравнений Хилла, включающих в себя J_2 , а в [5] и сопротивление атмосферы. В [6] и [7] предлагаются законы управления, необходимые для поддержания формаций, при этом в работе [7] производится минимизация затрачиваемого топлива. Но во всех работах по построению управления предполагается, что управление трехосное. В [8] приведено ограничение на направление возможного вектора тяги. В рассматриваемой задаче в формации используется двигатель в направлении «вдоль траектории», при этом в работе проводится исследование возможности поддержания ограниченного относительного движения для невозмущенной задачи Хилла в случае ошибок в начальных условиях, в зависимости от размера формации, от эллиптичности траектории главного спутника и т.д. Возможность применения одноосного управления для поддержания необходимой конфигурации рассмотрена также в [9], здесь проведено построение множества возможных траекторий при управлении вдоль одной оси для невозмущенной задачи Хилла. В [10] приведен пример использования малой тяги для поддержания заданной конфигурации.

В настоящей работе проведено исследование возможности устранения относительно векового ухода за период двух спутников при ограниченном управлении.

Относительное движение рассматривается в системе главный и дочерний спутники. Под главным спутником понимается неуправляемый спутник, а под дочерним – спутник с двигателем. В качестве одного из основных требований к системе управления выставляется простота исполнительных элементов.

Ограничения (основные допущения), накладываемые на спутники, следующие: оба спутника движутся в центральном ньютоновском поле, их невозмущенные орбиты кеплеровы, то есть эволюция орбит под действием внешних сил с течением времени рассматривается как эволюция под действием возмущающих воздействий, таких как сжатие Земли. Орбита главного спутника – круговая.

В качестве системы ориентации для дочернего спутника предлагается использовать пассивную магнитную систему ориентации, которая не требует расхода рабочего тела и энергии бортовых батарей и работает только за счет стабилизирующего воздействия моментов внешних сил. Известно, что при использовании такой системы ориентации спутник в ка-

ждой точке своей траектории будет ориентирован практически по вектору напряженности геомагнитного поля. Для создания управления будем использовать двигатель, развивающий тягу вдоль оси ориентации спутника, которая совпадает с одной из его главных осей инерции.

2. Вывод уравнений движения и условия на управление

В рассматриваемом нами случае орбита главного спутника – круговая, а орбита дочернего должна быть слабоэллиптической для сохранения формации. Поэтому, чтобы при изучении движения не возникало вырождения по e (эксцентриситету) и ω (аргументу перицентра), введем новые переменные $k = e \sin \omega$, $q = e \cos \omega$ – проекции вектора Лапласа на линию узлов и линию в плоскости орбиты, перпендикулярную линии узлов.

Введем орбитальную систему координат (ОСК) следующим образом: ось Ox_1 в направлении радиус-вектора спутника в каждой точке орбиты, ось Ox_2 выбрана в плоскости орбиты перпендикулярно Ox_1 и составляет со скоростью острый угол, ось Ox_3 дополняет систему координат до правой тройки.

Запишем уравнения движения каждого спутника в переменных (Ω, i, p, q, k, u) [11]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} F_3, & \frac{di}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \cos u, & \frac{dp}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{2r^3}{\mu} F_2, \\ \frac{dq}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ F_1 \sin u + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} q \right] + F_3 \frac{r}{p} k \sin u \operatorname{ctg} i \right\}, \\ \frac{dk}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ -F_1 \cos u + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} k \right] - F_3 \frac{r}{p} q \sin u \operatorname{ctg} i \right\}, \\ \frac{dt}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{F_1, F_2, F_3\}$ – компоненты вектора возмущения в ОСК, Ω – долгота восходящего узла, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты, P – фокальный параметр, μ – гравитационный параметр Земли;

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega_\pi)} = \frac{p}{1 + q \cos u + k \sin u}, \quad (2)$$

$$\gamma = 1 - \frac{F_3 r^3}{\mu p} \sin u \operatorname{ctg} i \approx 1 \quad \text{при } F \ll \frac{\mu}{r^2}, \quad p = a(1 - e^2),$$

где a – большая полуось орбиты. Уравнения (1) для каждого спутника имеют идентичный вид, в случае их использования для первого спутника в обозначении переменных

появится индекс «1», в случае второго – индекс «2». Возмущение от несферичности Земли действует на оба спутника. Для исследования влияния возмущения на элементы орбиты нужно подставить в уравнения движения (1) возмущение от гармоника J_2 , представимое в ОСК следующим образом [12]:

$$F_1 = \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1), \quad F_2 = -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i, \quad F_3 = -\frac{\delta}{r^4} \sin u \sin 2i. \quad (3)$$

Здесь
$$\delta = \frac{3}{2} J_2 \mu R_e^2,$$
 R_e – радиус Земли.

Если возмущение гравитационного поля мало по сравнению с величиной центрального гравитационного поля, то из (1) видим, что производные орбитальных элементов в таком случае малы, то есть, скорость изменения орбитальных элементов также мала. Отсюда можно сделать вывод о том, что на периоде вращения элементы орбиты мало меняются, и можно считать их на одном периоде вращения константами. Поэтому можно усреднить уравнения на периоде и найти среднее изменение орбитальных элементов за период по каждому спутнику. Несложный расчет показывает [13]

$$\frac{d\Omega}{dN} = -\frac{2\delta \cos i}{\gamma \mu p^2} \pi, \quad \frac{di}{dN} = 0, \quad \frac{dp}{dN} = 0,$$

$$\frac{dq}{dN} = \frac{\pi \delta}{\gamma \mu p^2} (5 \sin^2 i - 4) k, \quad \frac{dk}{dN} = -\frac{\pi \delta}{\gamma \mu p^2} (5 \sin^2 i - 4) q.$$

Видим, что вековые уходы за период существуют только по восходящему узлу и аргументу перицентра Ω, ω . Несферичность Земли не влияет на форму и размеры орбиты, а только на ее положение.

Заметим, что в уравнениях движения присутствуют уходы для каждого спутника, а нам необходимо проследить за разницей в уходах. Разница в уходах за счет несферичности Земли равна

$$\Delta \Omega_J = -\frac{2\delta \pi}{\gamma \mu} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad \Delta i_J = 0, \quad \Delta p_J = 0,$$

$$\Delta q_J = \frac{\pi \delta}{\gamma \mu} \left[\frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) k_2}{p_2^2} - \frac{(5 \sin^2 i_1 - 4) k_1}{p_1^2} \right], \quad (4)$$

$$\Delta k_J = -\frac{\pi \delta}{\gamma \mu} \left[\frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) q_2}{p_2^2} - \frac{(5 \sin^2 i_1 - 4) q_1}{p_1^2} \right].$$

Из системы (4) видим, например, что в случае одинаковых наклонений, эксцентриситетов и фокальных параметров, управление для поддержания формации не требуется, так как

относительные вековые уходы отсутствуют. Такое движение реализуется, например, в формации leader-follower, то есть движения по одной орбите с разницей в аргументе широты. В остальных случаях для поддержания относительной траектории и устранения вековых уходов необходимо управлять, таким образом, чтобы изменение всех орбитальных элементов за период было равно нулю.

В общем случае, чтобы менять элементы Ω, ω , не изменяя при этом форму и размеры орбиты, нужно прикладывать бинормальное управление, как это видно из (1). Нужно учесть, что при наличии бинормального ускорения будет меняться и наклонение. При этом если выбрать функцию управления, ортогональную функции $\sin u$, то наклонение за период в среднем не изменится.

Далее построим такое управление, которое позволит устранить вековые уходы. Для этого сначала опишем используемое управление. Как было сказано во введении, основным требованием для системы управления спутника является простота исполнительных органов, поэтому в качестве системы управления выбран двигатель, размещенный вдоль оси инерции спутника, которая в свою очередь при наличии пассивной магнитной системы стабилизации, ориентирована вдоль вектора напряженности магнитного поля в каждой точке орбиты. Такая конструкция системы позволяет создавать простые спутники.

Если в качестве модели магнитного поля Земли выбрать модель прямого диполя, то вектор магнитного поля в ОСК будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{H}_X = \frac{\mu_m}{r^3} \begin{pmatrix} -2 \sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

Здесь μ_m – магнитный параметр Земли.

Так как управление реализуется только вдоль орта напряженности магнитного поля, то управление в ОСК выглядит так

$$\mathbf{U}_X(t) = \frac{\mu_m}{r^3} \begin{pmatrix} -2 \sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix} h(t), \quad (5)$$

где $h(t)$ – искомая скалярная функция величины тяги. Заметим, что тяга будет найдена с точностью до множителя равного модулю вектора напряженности.

Оценим среднее значение модуля вектора напряженности за период. Модуль вектора напряженности магнитного поля равен

$$E(|\mathbf{H}_x(u)|) \approx \frac{\mu_m}{\bar{r}_2^3} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{3 \sin^2 u \sin^2 i + 1} du,$$

где \bar{r}_2 – среднее значение радиус-вектора второго спутника при движении по орбите за период. Для оценки используем неравенство Коши-Буняковского [14]

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt. \quad (6)$$

Положим $x(u) = \sqrt{3 \sin^2 u \sin^2 i + 1}$, $y(u) = 1$, тогда интеграл будет оценен сверху как

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{3 \sin^2 u \sin^2 i + 1} du \leq \left(2\pi \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 u \sin^2 i + 1) du \right)^{1/2} = \left(2\pi * (3\pi \sin^2 i + 2\pi) \right)^{1/2} \leq \pi\sqrt{10}.$$

В этом случае

$$E(|\mathbf{H}_x(u)|) \leq \frac{\mu_m}{r_{2MIN}^3} \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.6 \cdot \frac{\mu_m}{r_{2MIN}^3}.$$

При этом оценка снизу среднего значения модуля вектора магнитного поля следующая:

$$E(|\mathbf{H}_x(u)|) \geq \frac{\mu_m}{\bar{r}_2^3} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot du = \frac{\mu_m}{\bar{r}_2^3}.$$

А так как для получения значения управления нам необходимо умножить найденное $h(u)$ на модуль вектора напряженности, то для оценки управления сверху логично взять оценку модуля напряженности сверху. Тогда реальное управление имеет вид

$$\tilde{h}(u) \approx 1.6 \cdot \frac{\mu_m}{r_{2MIN}^3} h(u). \quad (7)$$

Исследуем влияние управления (5) на орбиту при разных наклонениях (без учета J2) при подстановке в дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов (1). Вычислим изменение орбитальных элементов за период при наличии только такого управления в предположении малости возмущающего ускорения

$$\frac{d\Omega}{dN} = \frac{\mu_m}{\gamma\mu p} \frac{\cos i}{\sin i} \int_0^{2\pi} h(u) \sin u du, \quad \frac{di}{dN} = \frac{\mu_m}{\gamma\mu p} \cos i \int_0^{2\pi} h(u) \cos u du, \quad \frac{dp}{dN} = \frac{2\mu_m}{\gamma\mu} \sin i \int_0^{2\pi} h(u) \cos u du,$$

$$\frac{dq}{dN} = \frac{\mu_m}{\gamma\mu p} \sin i \int_0^{2\pi} h(u) \left[-2 + 4 \cos^2 u - q \cos u + 3q \cos^3 u - 2k \sin u + 3k \sin u \cos^2 u + k \operatorname{ctg}^2 i \sin u \right] du,$$

$$\frac{dk}{dN} = \frac{\mu_m}{\gamma\mu p} \sin i \int_0^{2\pi} h(u) \left[4 \sin u \cos u + 3q \sin u \cos^2 u + 4k \cos u - 3k \cos^3 u - q \operatorname{ctg}^2 i \sin u \right] du.$$

Так как управляется дочерний спутник, то уход за счет управления возникает только для его орбитальных элементов. Для того чтобы за счет управления компенсировать вековые уходы

из-за нецентральности гравитационного поля Земли, необходимо приравнять нулю сумму уходов по каждой переменной за период из-за гармоник J_2 и из-за управления. Тогда получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(u) \sin u du &= \frac{2\delta\pi p_2}{\mu_m} \frac{\sin i_2}{\cos i_2} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), & \int_0^{2\pi} h(u) \cos u du &= 0, \\ \int_0^{2\pi} h(u) \left[-2 + 4 \cos^2 u - q_2 \cos u + 3q_2 \cos^3 u - 2k_2 \sin u + 3k_2 \sin u \cos^2 u + k_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 \sin u \right] du &= \\ &= -\Delta q_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2}, \\ \int_0^{2\pi} h(u) \left[4 \sin u \cos u + 4k_2 \cos u - 3k_2 \cos^3 u + 3q_2 \sin u \cos^2 u - q_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 \sin u \right] du &= -\Delta k_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

с помощью которой необходимо найти искомое управление $h(u)$. На следующем этапе необходимо разрешить систему (8), чтобы найти одну неизвестную скалярную функцию $h(u)$. При этом следует учесть, что, так как требуется устранить уходы с помощью двигателей малой тяги, то интеграл от функции $h(u)$ на периоде должен принимать минимальное значение из всех возможных.

3. Построение искомого управления

Будем искать решение уравнений (8) в виде ряда Фурье

$$h(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku + b_k \sin ku. \quad (9)$$

Чтобы найти коэффициенты разложения в (9), требуется вычислить интегралы, входящие в систему интегральных уравнений. Воспользуемся свойством ортогональности базисных функций ряда Фурье на периоде, а также известными табличными значениями квадратов каждой базисной функции. Тогда все слагаемые – интегралы в (8) – определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(u) du &= a_0 \pi, & \int_0^{2\pi} h(u) \sin u du &= b_1 \pi, & \int_0^{2\pi} h(u) \cos u du &= a_1 \pi, \\ \int_0^{2\pi} h(u) \cos^2 u du &= \int_0^{2\pi} h(u) \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2} \right) du = \frac{a_0 \pi}{2} + \frac{a_2 \pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} h(u) \cos^3 u du = \int_0^{2\pi} h(u) \left(\frac{3 \cos u + \cos 3u}{4} \right) du = \frac{3a_1\pi}{4} + \frac{a_3\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\pi} h(u) \sin u \cos^2 u du = \int_0^{2\pi} h(u) (\sin u - \sin^3 u) du = \int_0^{2\pi} h(u) \left(\frac{1}{4} \sin u + \frac{1}{4} \sin 3u \right) du = \frac{b_1\pi}{4} + \frac{b_3\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\pi} h(u) \sin u \cos u du = \int_0^{2\pi} h(u) \frac{\sin 2u}{2} du = \frac{b_2\pi}{2}.$$

После подстановки значений интегралов в (8) получаем систему равенств

$$b_1 = \frac{2\delta p_2}{\mu_m} \frac{\sin i_2}{\cos i_2} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad a_1 = 0,$$

$$\pi \left(-2a_0 + 4 \frac{a_0}{2} + 4 \frac{a_2}{2} - q_2 a_1 + 3q_2 \frac{3a_1}{4} + 3q_2 \frac{a_3}{4} - 2k_2 b_1 + 3k_2 \frac{b_1}{4} + 3k_2 \frac{b_3}{4} + k_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 b_1 \right) = -\Delta q_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2},$$

$$\pi \left(4 \frac{b_2}{2} + 4k_2 a_1 - 3k_2 \frac{3a_1}{4} - 3k_2 \frac{3a_3}{4} + 3q_2 \frac{b_1}{4} + 3q_2 \frac{b_3}{4} - q_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 b_1 \right) = -\Delta k_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2}.$$

После некоторого упрощения находим

$$b_1 = \frac{2\delta p_2}{\mu_m} \frac{\sin i_2}{\cos i_2} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad a_1 = 0,$$

$$\pi \left(2a_2 + \frac{3a_3}{4} q_2 - \frac{5b_1}{4} k_2 + \frac{3b_3}{4} k_2 + k_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 b_1 \right) = -\Delta q_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2}, \quad (10)$$

$$\pi \left(2b_2 - \frac{3a_3}{4} k_2 + \frac{3b_1}{4} q_2 + \frac{3b_3}{4} q_2 - q_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 b_1 \right) = -\Delta k_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \sin i_2}.$$

Таким образом, получили систему (10) из 4-х алгебраических уравнений для определения шести коэффициентов: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. Эта система является переопределенной и определяет двумерное подпространство в шестимерном пространстве всех возможных коэффициентов. Остальные коэффициенты из системы интегральных уравнений (8) найти не удастся, но так как требуется найти минимальную функцию управления, то можно положить найденные коэффициенты равными нулю, так как

$$\int_0^{2\pi} |h(u)|^2 du = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_k a_k^2 + b_k^2 \right).$$

Вообще, интегральное управление, а значит, и суммарный расход топлива равен

$$\int_0^{2\pi} |h(u)| du, \text{ но работать с квадратом функции намного удобнее, чем работать с ее модулем.}$$

Поэтому для обоснования использования квадрата от функции вместо модуля обратимся к неравенству Коши-Буняковского (6). Если $x(t) = |h(t)|$, $y(t) = 1$, а интервал равен 2π , то неравенство (6) принимает следующий вид:

$$\int_0^{2\pi} |h(u)| du \leq \left(2\pi \int_0^{2\pi} h^2(u) du \right)^{1/2}.$$

Таким образом, рассматривая интеграл по норме L_2 , найдем верхнюю оценку потребления топлива. Преобразуем полученную систему (10),

$$b_1 = \frac{2\delta p_2 \sin i_2}{\mu_m \cos i_2} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad 2a_2 + \frac{3q_2}{4}a_3 + \frac{3k_2}{4}b_3 = A, \quad 2b_2 - \frac{3k_2}{4}a_3 + \frac{3q_2}{4}b_3 = B, \quad (11)$$

введя обозначения

$$-\Delta k_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \pi \sin i_2} - \left(k_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 - \frac{5k_2}{4} \right) b_1 = A, \quad -\Delta k_J \frac{\gamma \mu p_2}{\mu_m \pi \sin i_2} - \left(\frac{3q_2}{4} - q_2 \operatorname{ctg}^2 i_2 \right) b_1 = B.$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (11). Уравнения описывают переопределенную систему алгебраических уравнений, которую в матричном виде можно записать так

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{3q_2}{4} & \frac{3k_2}{4} \\ 0 & 2 & -\frac{3k_2}{4} & \frac{3q_2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Известно, что система алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг исходной матрицы A равен рангу расширенной матрицы. В нашем случае ранг исходной матрицы равен двум, так как существует ненулевой минор размерности два

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Таким образом, присоединение к матрице столбца $(A, B)^T$ никак не влияет на ранг, а значит, система совместна. Так как уравнений два, а неизвестных четыре, то можно выразить две переменные через две другие. Выразим, например, a_2 и b_2 через a_3 и b_3 .

$$a_2 = -\frac{3q_2}{8}a_3 - \frac{3k_2}{8}b_3 + \frac{A}{2}, \quad b_2 = \frac{3k_2}{8}a_3 - \frac{3q_2}{8}b_3 + \frac{B}{2}. \quad (12)$$

Таким образом, получено решение системы (11) в общем виде с произвольными переменными a_3 и b_3 .

Теперь учтем, что управление должно быть минимально возможным за период, поэтому сумма квадратов коэффициентов должна принимать минимально возможное значение. Запишем это в виде цепочки соотношений

$$\int_0^{2\pi} |h(u)|^2 du = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_k a_k^2 + b_k^2 \right) = \pi (b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2) \rightarrow \min.$$

Так как b_1 константа, зависящая только от начальных условий, а a_2 и b_2 выражаются через a_3 и b_3 , то минимизация функционала может быть проведена только по переменным a_3 и b_3 , а именно

$$\begin{aligned} a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 &= \frac{9q_2^2}{64} a_3^2 + 2 \frac{9q_2 k_2}{64} a_3 b_3 + \frac{9k_2^2}{64} b_3^2 - A \left(\frac{3q_2}{8} a_3 + \frac{3k_2}{8} b_3 \right) + \frac{A^2}{4} + \\ &+ \frac{9k_2^2}{64} a_3^2 - 2 \frac{9q_2 k_2}{64} a_3 b_3 + \frac{9q_2^2}{64} b_3^2 + B \left(\frac{3k_2}{8} a_3 - \frac{3q_2}{8} b_3 \right) + \frac{B^2}{4} + a_3^2 + b_3^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (13)$$

Видим, что перекрестные члены в виде $a_i b_j$ в (13) сокращаются и после преобразований (13) приводится к виду

$$a_3^2 \left(1 + \frac{9q_2^2}{64} + \frac{9k_2^2}{64} \right) + a_3 \left(\frac{3k_2}{8} B - \frac{3q_2}{8} A \right) + b_3^2 \left(1 + \frac{9q_2^2}{64} + \frac{9k_2^2}{64} \right) - b_3 \left(\frac{3q_2}{8} B + \frac{3k_2}{8} A \right) + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \rightarrow \min.$$

Известно, что если квадратичная форма имеет вид $A_1 x^2 + A_2 x + B_1 y^2 + B_2 y + C$, то к сумме квадратов она приводится следующим образом:

$$\begin{aligned} &A_1 \left(x^2 + 2 \frac{A_2/2}{A_1} x + \frac{B_2^2}{4A_1^2} \right) + B_1 \left(y^2 + 2 \frac{B_2/2}{B_1} y + \frac{B_2^2}{4B_1^2} \right) + C - \frac{A_2^2}{4A_1} - \frac{B_2^2}{4B_1} = \\ &= A_1 \left(x + \frac{A_2}{2A_1} \right)^2 + B_1 \left(y + \frac{B_2}{2B_1} \right)^2 + C - \frac{A_2^2}{4A_1} - \frac{B_2^2}{4B_1}. \end{aligned}$$

Минимальное значение форма принимает при значениях $x = -A_2/2A_1$, $y = -B_2/2B_1$ и это минимальное значение равно $C - A_2^2/4A_1 - B_2^2/4B_1$. В нашем случае минимум достигается при следующих значениях параметров a_3 и b_3 :

$$a_3 = - \frac{\left(\frac{3k_2}{16} B - \frac{3q_2}{16} A \right)}{\left(1 + \frac{9q_2^2}{64} + \frac{9k_2^2}{64} \right)}, \quad b_3 = \frac{\left(\frac{3k_2}{16} A + \frac{3q_2}{16} B \right)}{\left(1 + \frac{9q_2^2}{64} + \frac{9k_2^2}{64} \right)}.$$

Значение функционала $a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2$ равно $\frac{A^2 + B^2}{4 \left(1 + \frac{9q_2^2}{64} + \frac{9k_2^2}{64} \right)}$

С учетом соотношений $k = e \sin \omega$, $q = e \cos \omega$, получаем искомое значение для квадрата управления

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |h(u)|^2 du = b_1^2 + \frac{A^2 + B^2}{4 \left(1 + \frac{9e^2}{64} \right)}. \quad (14)$$

4. Оценка величины управления

Произведем оценку получившегося выражения (14), учитывая то, что орбита главного спутника круговая, а значит $k_1=0$ и $q_1=0$. Тогда с учетом выражения из (4)

$$b_1 = \frac{2\delta p_2}{\mu_m} \frac{\sin i_2}{\cos i_2} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad \delta q_J = \frac{\pi\delta (5 \sin^2 i_2 - 4) k_2}{\gamma\mu p_2^2}, \quad \delta k_J = -\frac{\pi\delta (5 \sin^2 i_2 - 4) q_2}{\gamma\mu p_2^2},$$

и после подстановки их в (11) получим значения для коэффициентов A и B

$$A = -\delta q_J \frac{\gamma\mu p_2}{\mu_m \pi \sin i_2} - k_2 b_1 \left(\text{ctg}^2 i_2 - \frac{5}{4} \right) = -\frac{\delta}{\mu_m \sin i_2} \frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) k_2}{p_2} - k_2 b_1 \left(\text{ctg}^2 i_2 - \frac{5}{4} \right),$$

$$B = -\delta k_J \frac{\gamma\mu p_2}{\mu_m \pi \sin i_2} - q_2 b_1 \left(\frac{3}{4} - \text{ctg}^2 i_2 \right) = \frac{\delta}{\mu_m \sin i_2} \frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) q_2}{p_2} - q_2 b_1 \left(\frac{3}{4} - \text{ctg}^2 i_2 \right).$$
(15)

Отдельно квадраты коэффициентов определяются выражениями

$$b_1^2 = \left(\frac{\delta}{\mu_m p_2} \right)^2 \left(2 \tan i_2 \left(\cos i_2 - \frac{p_2^2 \cos i_1}{p_1^2} \right) \right)^2,$$

$$A^2 = \left(\frac{\delta}{\mu_m p_2} \right)^2 \left(\frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) k_2}{\sin i_2} + 2k_2 \tan i_2 \left(\cos i_2 - \frac{p_2^2 \cos i_1}{p_1^2} \right) \left(\text{ctg}^2 i_2 - \frac{5}{4} \right) \right)^2,$$

$$B^2 = \left(\frac{\delta}{\mu_m p_2} \right)^2 \left(\frac{(5 \sin^2 i_2 - 4) q_2}{\sin i_2} - 2q_2 \tan i_2 \left(\cos i_2 - \frac{p_2^2 \cos i_1}{p_1^2} \right) \left(\frac{3}{4} - \text{ctg}^2 i_2 \right) \right)^2.$$
(16)

Используя формулу (14), соотношения (7) и (16), оценим интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{h}(u)| du \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}^2(u) du = \left(\frac{1}{p_2^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{p_2} \right)^2 W,$$
(17)

где

$$W = \left(\frac{\delta}{\mu_m p_2} \right)^{-2} \left(b_1^2 + \frac{A^2 + B^2}{4 \left(1 + \frac{9e_2^2}{64} \right)} \right).$$
(18)

Чтобы возмущение было мало и можно было использовать метод усреднения, необходимо

$$\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{h}(u)| du \right)^2 \ll \frac{\mu^2}{p_2^4} \quad \text{либо} \quad \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{h}(u)| du \right)^2 \approx \left(\frac{\delta}{p_2^4} \right)^2.$$

С учетом выражения (3), для δ это условие выполнено, если выражение (18) не превышает, например, 100. А это выполнено в том случае, если тангенс и котангенс угла наклона в (16) ограничены.

Если ввести обозначение $di=i_1-i_2$, то для (18) можно построить график зависимости от наклонения дочернего спутника и разницы наклонений дочернего и главного спутников (рис.1). Для построения сумма квадратов была оценена сверху: $q_2=1, k_2=1, p_1=p_2$. Видим, что область параметров, необходимых для реализации малой тяги, существует.

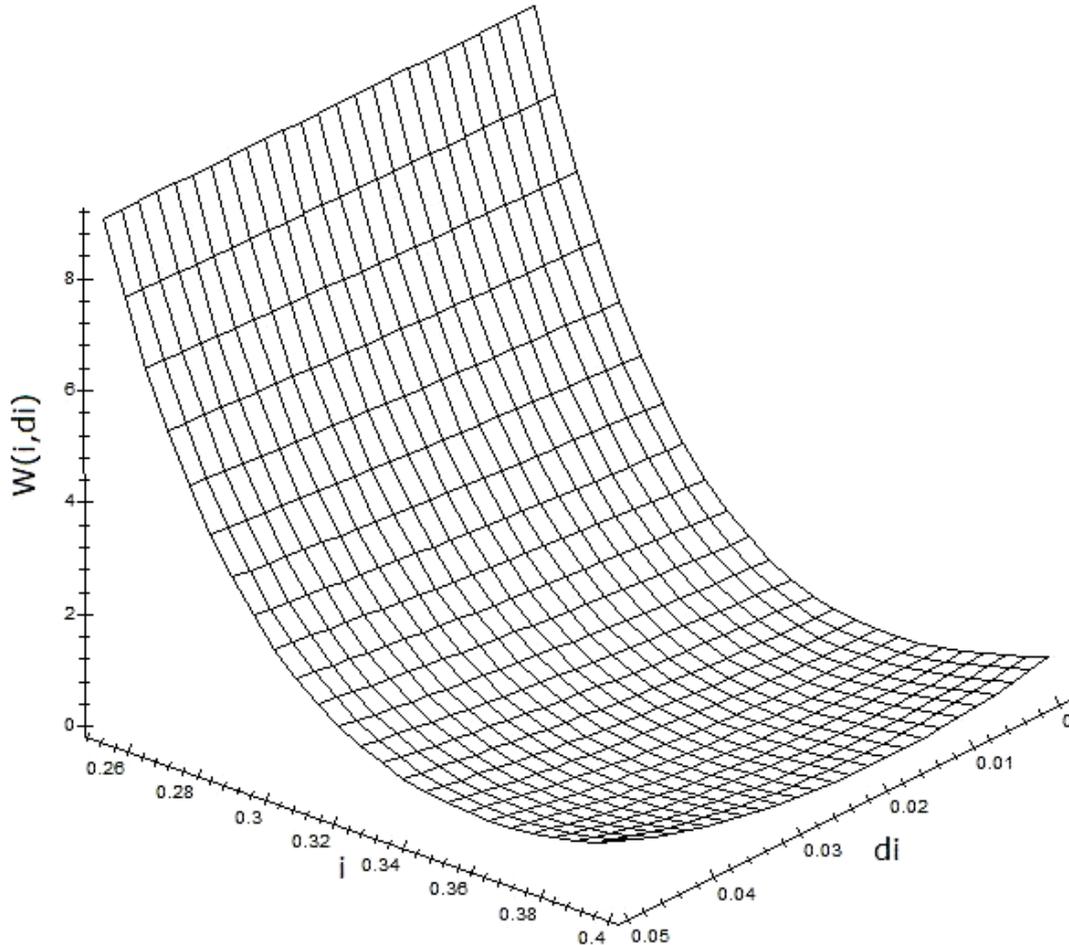


Рис. 1: 3D график для определения области параметров, углы в радианах.

5. Численная верификация результатов

Построим траектории относительного движения при найденном управлении при помощи MatLab. Для этого воспользуемся тем, что [12] в геоцентрической экваториальной системе координат координата центра масс каждого спутника связана с орбитальными элементами при помощи следующих соотношений:

$$X_j = r_j (\cos u_j \cos \Omega_j - \sin u_j \sin \Omega_j \cos i_j), \quad Y_j = r_j (\cos u_j \sin \Omega_j + \sin u_j \cos \Omega_j \cos i_j), \\ Z_j = r_j \sin u_j \sin i_j.$$

Таким образом, рассчитав численно изменение орбитальных элементов по (1) с учетом выражений (3) и (5), в каждый момент времени можно найти координаты каждого из спутников в ОСК при наличии и отсутствии управления. На всех последующих рисунках главный спутник находится в точке с координатами (0,0,0).

Рассмотрим в первую очередь случай, когда орбита дочернего спутника также круговая. Заметим, что уход возникает только, если фокальные параметры орбит или наклонения разные. Если разные фокальные параметры, то уход наблюдается даже в отсутствии гармоника J_2 , так как в этом случае периоды обращения спутников различаются.

Построим относительную траекторию и управление для одинаковых фокальных параметров и разных наклонений. Разницу в наклонениях выберем такую, что максимальное расхождение спутников (при прохождении наивысшей точки орбиты) не превосходит 1000 м, а значит, величина разницы в наклонениях должна быть не более чем $1000/7000000 \sim 0.025^\circ$. На рис.2 и 3 показана относительная траектория при отсутствии управления в проекциях на разные орбитальные плоскости. Видим, что уход по направлению «вдоль траектории» равен примерно 25 м на пяти витках. При этом наклонение траектории главного спутника равно 30° , а дочернего отличается на 0.01° . Радиус орбиты равен 6600 км. На рис.4 и 5 показана относительная траектория при наличии управления, на рис.6 построен график с управлением в зависимости от времени. Видим, что управление значительно уменьшило вековой уход с 25 м на пяти витках до 25 см.

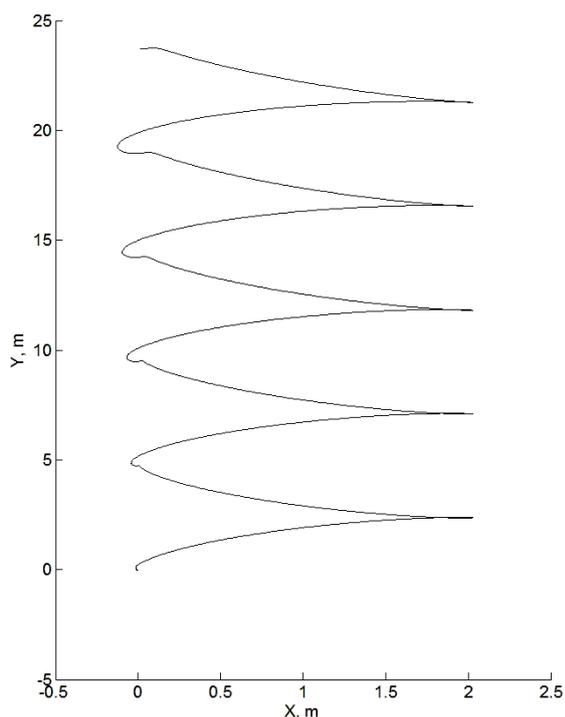


Рис.2: Относительное движение в плоскости орбиты при разности в наклонениях без управления.

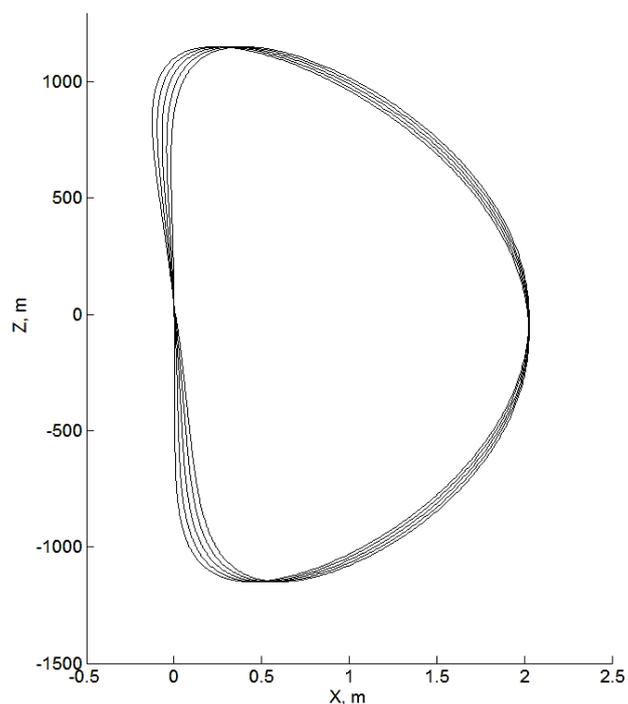


Рис.3: Относительное движение в плоскости перпендикулярной плоскости орбиты при разности в наклонениях без управления.

Последним рассмотрим случай слабой эксцентрисичности орбиты дочернего спутника. Параметры орбиты возьмем следующими: радиус орбиты главного спутника 6600 км, дочер-

него плюс 100 м к радиусу орбиты главного, наклонения орбит одинаковы и равны 30° , эксцентриситет орбиты дочернего спутника равен 0.01, направление на перигей составляет 90° . На рис.7 и 8 показаны проекции траектории относительного движения при отсутствии управления. Видим, что в относительном движении есть незначительный уход. На рис.9 и 10 показан результат применения управления к такой формации. Видим, что хотя размеры формации увеличились, исчез вековой уход. Величина управления построена на рис.11. Все траектории также построены на пяти витках.

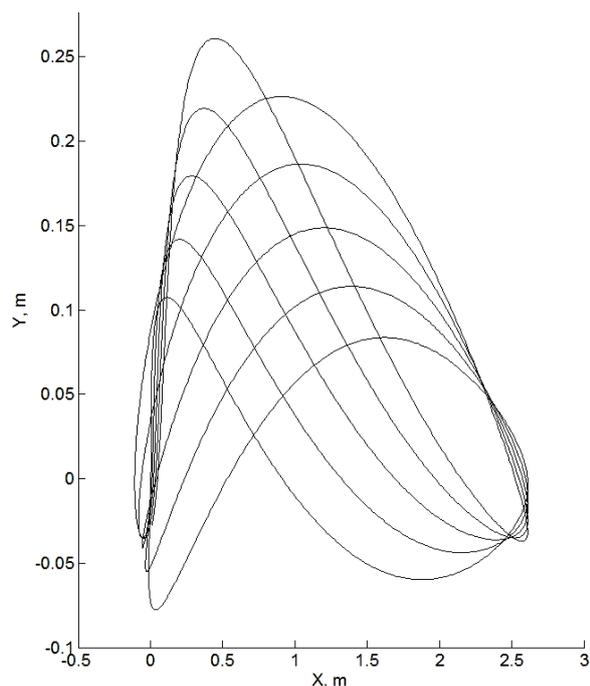


Рис.4: Относительное движение в плоскости орбиты при разности в наклонениях с управлением.

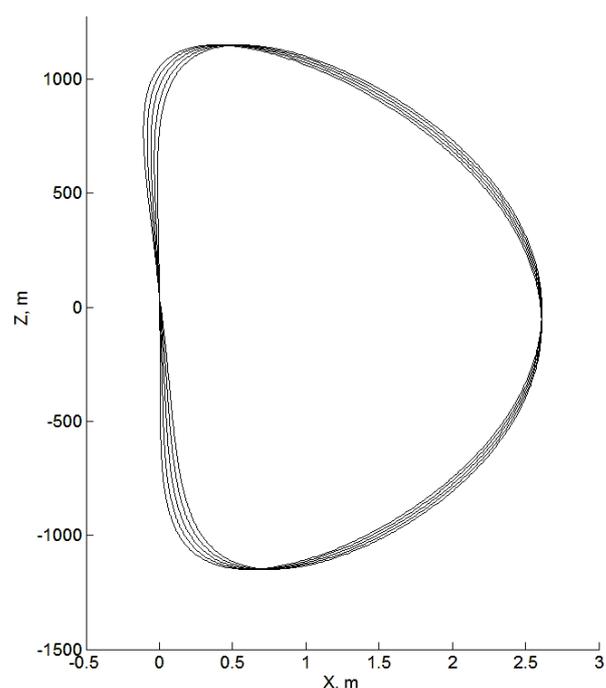


Рис.5: Относительное движение в плоскости перпендикулярной плоскости орбиты при разности в наклонениях с управлением.

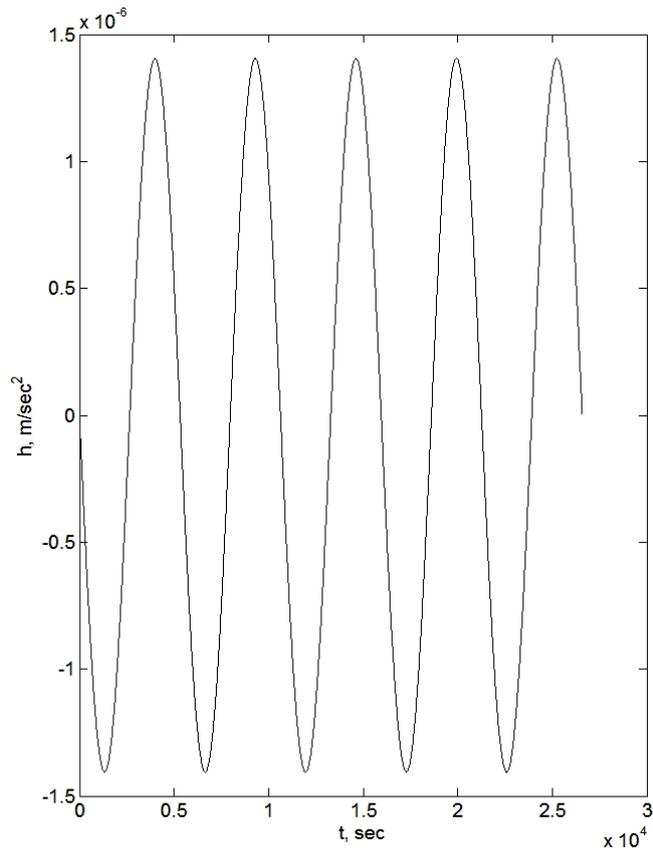


Рис.6: Управление для устранения вековых уходов при разности в наклонениях.

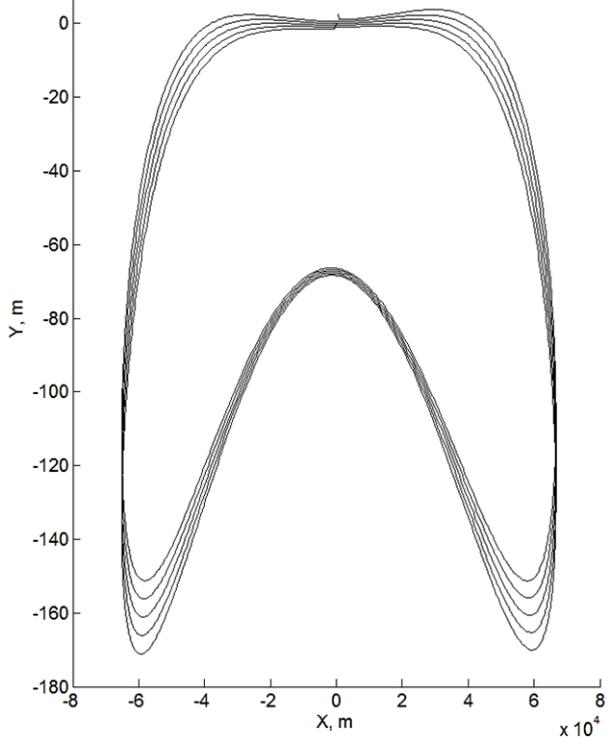


Рис.7: Относительное движение в плоскости орбиты при слабозксцентрической орбите дочернего спутника без управления.

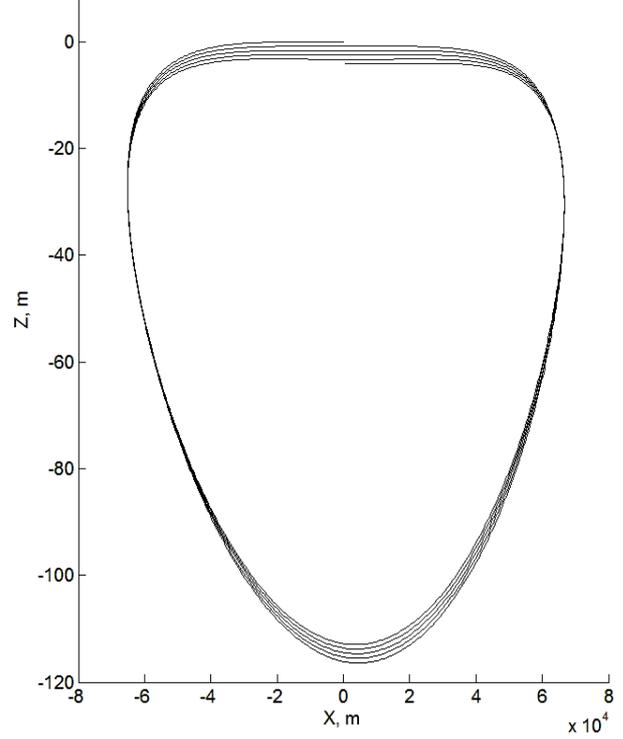


Рис.8: Относительное движение в плоскости перпендикулярной плоскости орбиты при слабозксцентрической орбите дочернего спутника без управления.

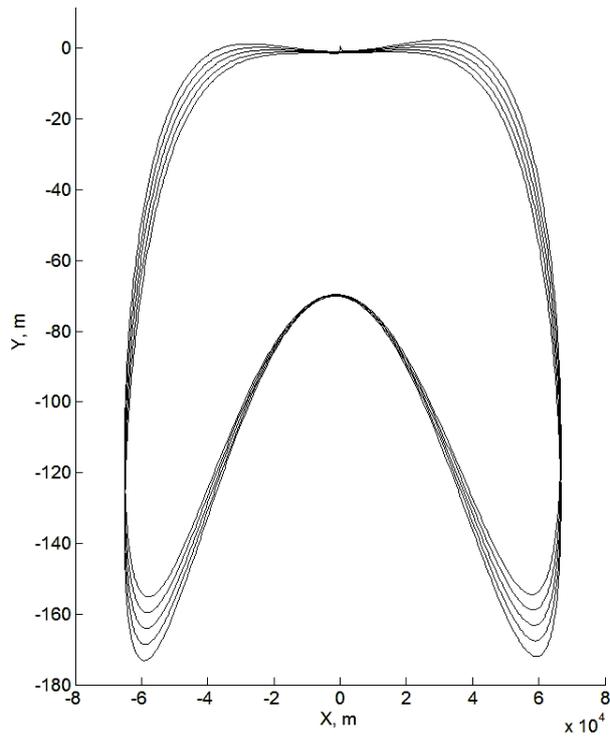


Рис.9: Относительное движение в плоскости орбиты при слабэксцентрической орбите дочернего спутника без управления.

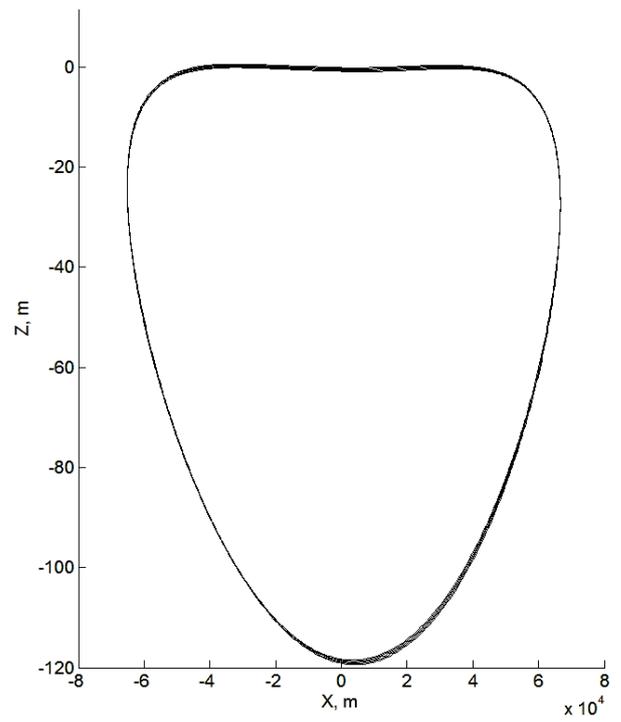


Рис.10: Относительное движение в плоскости перпендикулярной плоскости орбиты при слабэксцентрической орбите дочернего спутника без управления.

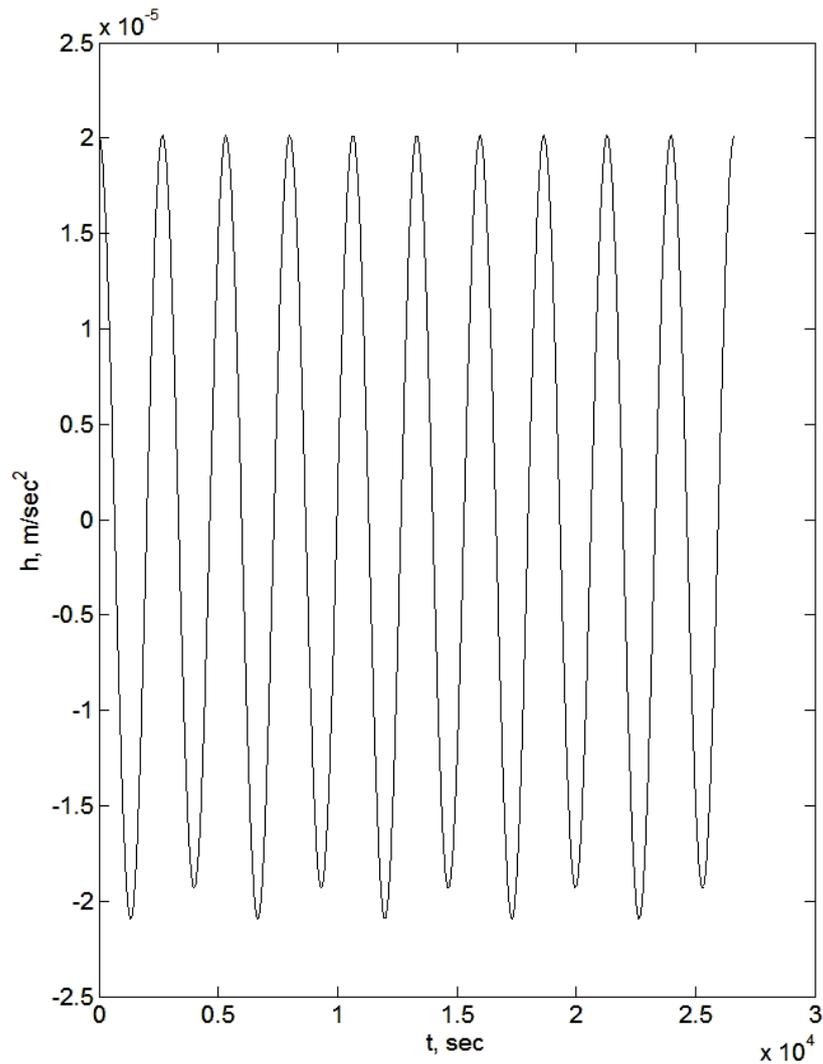


Рис.11: Управление для устранения вековых уходов при эксцентрической орбите дочернего спутника.

6. Заключение

В работе проверена возможность устранения вековых уходов, возникающих из-за не-сферичности Земли, с помощью малого ограниченного управления.

Выведены уравнения движения в орбитальных элементах, учитывающие как несфе-ричность, так и создаваемое управление. Проведено усреднение уравнений в предположении малости возмущений. Кроме того, непосредственно указаны аналитические выражения для управления, устраняющего вековые уходы в зависимости от начальных условий. Также по-казано, что существует область значений параметров, в которой величина управления срав-нима с величиной возмущающего ускорения от не-сферичности Земли.

Для некоторых типичных примеров проведено численное моделирование относитель-ного движения при помощи MATLAB без использования методов усреднения. Показана со-стоятельность метода получения управления для устранения вековых уходов из-за гравита-ционного возмущения.

7. Благодарности

Работа поддержана РФФИ (N 06-01-00389, N 07-01-92001), Агентством по науке и инновациям (Контракт N 02.514.11.4068), FCT-Portuguese Fondation for Science and Technology.

Библиографический список

1. В.В.Белецкий. Очерки о движении космических тел. -М.: Наука, 1972, 360с.
2. David A.Vallado with contribution by Wayne D.MacClain. Fundamentals of Astrodynamics and Applications (Second Edition) / Space Technology Library, Microcosm Press, 2006.
3. Edwin Wnuk and Justyna Golebiewska. The relative motion of Earth orbiting satellites // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2005, v.91, №3-4, p.373-389.
4. C. Xu, R. Tsoi, N. Sneeuw. Analysis of J2-Perturbed Relative Orbits for Satellite Formation Flying. 2005, www.springerlink.com/index/n61013nw77q23627.pdf.
5. Dario Rocco Izzo. Formation Flying linear modeling. 2005, <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/882>.
6. Hans-Peter Schaub, Srinivas R. Vadali, John L. Junkins, Kyle T. Alfriend. Spacecraft Formation Flying Control using Mean Orbit Elements // Journal of the Astronautical Sciences, 2000, v.48, №1, Jan.–March, p.69–87.
7. Kyle T. Alfriend, Srinivas R. Vadali, Hans-Peter Schaub. Formation flying satellites: control by an astrodynamist // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, v.81, №1–2, p.57–62.
8. K.D. Kumara, H.C. Bangb, M.J. Tahkb. Satellite formation flying using along-track thrust // Acta Astronautica, 2007, v.61, №7-8, p.553-564.
9. И.Е. Зараменских. Множество достижимых траекторий относительного движения двух спутников при управлении вдоль вектора магнитного поля / Сборник трудов V Научно-практической конференции "Микротехнологии в авиации и космонавтике", - М.: 2007, 17-19 сентября, 10 с.
10. G.V. Smirnov, M. Ovchinnikov, A. Guerman. Use of solar radiation pressure to maintain a spatial satellite formation // Acta Astronautica, 2007, v 61, №6-7, Academy Transactions Note, p.724–728.
11. Haspeter Schaub. Relative orbit geometry through classical orbit element differences // Journal of Guidance, Navigation and Control, 2004, v.27, №5, Sept.-Oct., p.839–848.

12. М.Ф. Решетнев, А.А. Лебедев, В.А. Бартенев, М.Н. Красильщиков, В.А. Малышев, В.В. Малышев. Управление и навигация искусственных спутников Земли на около-круговых орбитах. -М.: Машиностроение, 1988, 336с.
13. Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полета. -М.: Наука, 1990, 448с.
14. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Учебник для вузов, 6-е издание, испр. -М.: Наука, 1989, 624с.

Сведения об авторах

Зараменских Ирина Евгеньевна, МФТИ, аспирант.

Контакты: flice@mail.ru.

Овчинников Михаил Юрьевич, Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, заведующий сектором, д.ф.-м.н., профессор.

Контакты: +7 495 250-78-13, ovchinni@keldysh.ru.

Ритус Ирина Владимировна, Институт математического моделирования РАН, старший научный сотрудник.

Контакты: ritus@imamod.ru.