

Метод формирования режимов управляемого движения тросовых систем для решения практических задач на эллиптических орбитах

Купреев С.А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия
e-mail: kupreevsa@mai.ru*

Аннотация

Предложен эффективный метод формирования режимов управляемого движения тросовых систем для решения практических задач на эллиптических орбитах. Метод базируется на математическом аппарате качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

Установлены все типы качественных структур динамической системы управляемого движения связанных объектов, определены все бифуркации изучаемой системы и бифуркационные значения параметров, которые определяют всю совокупность характеристик управляемого движения ТС на эллиптических орбитах. Это дает возможность составить полное представление о характере возможных траекторий управляемого движения ТС при любых значениях параметра управления, при любых начальных условиях движения и на любом отрезке времени.

В результате анализа всех типов качественных структур фазовых траекторий определена совокупность реализуемых режимов управляемого движения и установлены области начальных условий, в которых они реализуются. Режимы

должны соответствовать устойчивым особым фазовым траекториям системы и совокупности орбитно-устойчивых неособых фазовых траекторий, заполняющих фиксированные области фазовой поверхности.

Ключевые слова: орбитальная тросовая система, режимы относительного движения, управляемое движение связанных объектов на эллиптической орбите.

Введение

Орбитальные тросовые системы (ТС) представляют собой отдельно сформировавшееся направление перспективных технологий [1]. Однако рассмотрение функционирования космических связок на эллиптических орбитах недостаточно освещено в спецлитературе. В известных работах [2-12] решение практических задач с применением ТС рассматривается в условиях функционирования связки на круговых орбитах, в то время как целый ряд задач может решаться только на эллиптических орбитах. К числу таких задач можно отнести: маневрирование, испытание и отработка летательных аппаратов, движущихся по баллистическим траекториям; наблюдение за определенными участками земной поверхности со сравнительно низких высот; обслуживание космических объектов, движущихся по эллиптическим орбитам и др. Решение задач динамики функционирования ТС на эллиптических орбитах оказывается более сложным, чем для круговых и требует специального теоретического обоснования. Научная проблема, решению которой посвящена работа состоит в полном качественном анализе топологических структур динамической системы

управляемого движения ТС и формировании пригодных режимов их движения при функционировании на эллиптических орбитах.

1 Математическая модель управляемого движения связанных объектов

Принимая во внимание, что центр масс (ЦМ) ТС совершает движение по кеплеровой траектории, можно во многих случаях рассматривать только относительное движение связанных объектов. При нахождении ТС на связи, расстояние до центра масс каждого из концевых объектов связки определяется через их соотношение масс, поэтому далее будем рассматривать движение одного из концевых объектов относительно центра масс ТС (рис. 1).

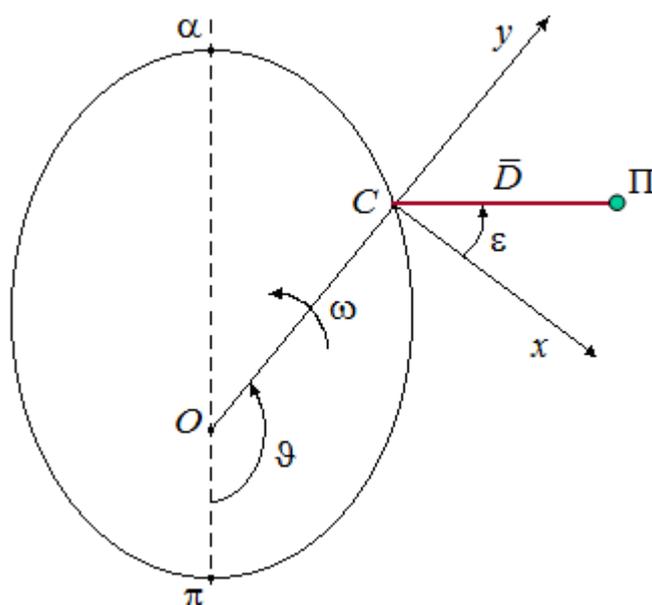


Рис. 1 – Движение центра масс (точка C) тросовой системы по эллиптической орбите (π , α – перигей и апогей орбиты, Π – привязной объект)

Тогда математическая модель компланарного управляемого движения ТС в безразмерных переменных может быть записана в виде:

$$\frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\vartheta} = \frac{1+e\cos\vartheta}{(1-e^2)^{3/2}} \left(2e\sin\vartheta + \frac{3}{2}\sin 2\varepsilon \right) - 2k \left[1 + \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}}.$$

где ϑ – угол истинной аномалии, определяющий текущее положение центра масс ТС на орбите;

ε – угол между осью x орбитальной системы координат и вектором дальности \bar{D} ;

$\Omega_{\text{оп}} = \dot{\varepsilon}/n$ – безразмерная угловая скорость вращения вектора \bar{D} относительно орбитальной системы координат;

$k = \frac{\dot{D}}{nD}$ – параметр управления;

D – удаление привязного объекта (ПО) от начала орбитальной системы координат Cxy ;

$n = \sqrt{\frac{\pi_0}{p}} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{p}$ – средняя орбитальная угловая скорость центра масс ТС;

e, p – соответственно эксцентриситет и фокальный параметр орбиты центра масс связки; $\pi_0 = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная Земли.

Условие нахождения ТС на связи в случае невесомого троса

$$\left[(1-e^2)^{3/2} \Omega_{\text{оп}} + (1+e\cos\vartheta)^2 \right]^2 - (1-3\sin^2\varepsilon)(1+e\cos\vartheta)^3 > (1-e^2)^3 k^2. \quad (2)$$

Продольное движение связанных объектов определяется через параметр управления:

$$\dot{D} = knD \quad \text{или} \quad D = D_0 \exp(knt), \quad (3)$$

где D_0 – начальное значение D . При переменном параметре управления k экспоненциальный закон регулирования длины троса (3) позволяет реализовать любой класс возможных траекторий относительного движения связанных объектов.

Из первого уравнения (1) можно получить требуемый закон изменения параметра k , при котором реализуются прямолинейные траектории относительного движения связанных объектов под углом ε к оси x ($\Omega_{op} = 0$):

$$k = \frac{1 + e \cos \vartheta}{(1 - e^2)^{3/2}} \left(e \sin \vartheta + \frac{3}{4} \sin 2\varepsilon \right). \quad (4)$$

Реализации движения связки с постоянной угловой скоростью ($\Omega_{op} = \text{const}$) достигается за счет изменения параметра k по закону:

$$k = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3 \left(e \sin \vartheta + \frac{3}{4} \sin 2\varepsilon \right)}{(1 - e^2)^{3/2} \left[(1 + e \cos \vartheta)^2 + (1 - e^2)^{3/2} \Omega_{op} \right]}. \quad (5)$$

2 Качественное исследование управляемого движения связанных объектов

Изучение относительного движения связки при натянутом тросе, описываемого динамической системой (1) и уравнением (3), имеет наибольший практический интерес. Запишем (1) в следующем виде:

$$\frac{d\Omega_{op}}{d\vartheta} = A + B \sin 2\varepsilon - 2k(1 + C \Omega_{op}); \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = C \Omega_{op}; \quad (6)$$

где $A = \frac{2e \sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)}{(1 - e^2)^{3/2}}; \quad B = \frac{3(1 + e \cos \vartheta)}{2(1 - e^2)^{3/2}}; \quad C = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}.$

При $e \neq 0$ параметры A, B, C являются переменными, а при $e = 0$ параметры A, B, C и система (6) преобразуется в известную динамическую систему движения связанных объектов на круговых орбитах [3-6]. По мере увеличения эксцентриситета диапазоны изменения параметров A, B, C возрастают. Однако для каждого конкретного значения $e < 1$ изменение параметров с течением времени происходит весьма плавно. Учитывая, что рассматриваемые параметры являются медленно меняющимися, для исследования системы (6) можно использовать обычный аппарат качественной теории динамических систем второго порядка [13] и теории бифуркаций на плоскости [14].

Это обстоятельство позволяет при изучении относительного движения связки вместо (6) рассматривать автономную динамическую систему сравнения

$$\frac{d\Omega_{\text{ор}}}{d\vartheta} = a + b \sin 2\varepsilon - 2k(1 + c\Omega_{\text{ор}}); \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = c\Omega_{\text{ор}}; \quad (7)$$

Параметры этой системы a, b, c будем считать постоянными, а их значения принимаются из диапазона, соответствующих возможным изменениям параметров A, B, C . Для всех эллиптических орбит при любых значениях угла ϑ выполняются условия $b > 0$ и $c > 0$. Для того чтобы получить представления о поведении исходной системы (6) при конкретном значении эксцентриситета, необходимо определить качественные структуры разбиения развертки фазового цилиндра $\varepsilon, \Omega_{\text{ор}}$ системы сравнения (7) на траектории для бесконечного множества возможных значений истинной аномалии $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Иными словами, требуется поставить в соответствие исходной системе бесконечное множество систем сравнения с

фиксированными параметрами и рассматривать движение исходной системы как непрерывный переход от одной системы сравнения к другой, сколь угодно близкой. Тогда движение изображающей точки по фазовой поверхности будет происходить с непрерывно изменяющимся видом разбиения на траектории.

Система сравнения (7) имеет конечное число качественных структур, смена которых происходит только при бифуркационных значениях параметров. Между соседними бифуркационными значениями параметров качественная структура системы, а следовательно, и характер относительного движения связки, меняться не будут. На фазовом цилиндре с непрерывно изменяющимся видом разбиения на траектории будут преобладать качественные структуры, определяемые параметрами, числовые величины которых находятся между бифуркационными значениями. Указанное обстоятельство существенно облегчает решение задачи выявления возможных движений исходной системы (6).

Перейдем к качественному исследованию системы сравнения (7).

Приравняв нулю правые части (7), получим выражения, определяющие положение состояний равновесия на фазовом цилиндре

$$a + b \sin 2\varepsilon^* - 2k = 0; \quad \Omega_{\text{op}}^* = 0; \quad (8)$$

где ε^* , Ω_{op}^* – координаты состояний равновесия системы.

Рассмотрение (8) показывает, что состояния равновесия системы (7) располагаются на оси ε , а координаты их на этой оси определяются выражением

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2k - a}{b}\right). \quad (9)$$

Анализ (9) свидетельствует о том, что у системы (7) может быть не более четырех состояний равновесия. При отношении параметров $-1 < (2k - a)/b < 1$ система имеет четыре состояния равновесия, при $(2k - a)/b = \pm 1$ – два, а при $|(2k - a)/b| > 1$ состояния равновесия отсутствуют.

Тип состояний равновесия зависит от значений характеристических корней особой точки. Для системы (7) характеристическое уравнение состояний равновесия

$$\lambda^2 + 2k\lambda - 2bc \cos 2\varepsilon^* = 0. \quad (10)$$

Решая (10) получаем характеристические корни состояния равновесия:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + 2bc \cos 2\varepsilon^*} \quad \text{или} \quad \lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + \frac{3 \cos 2\varepsilon^*}{1 + e \cos \vartheta}}. \quad (11)$$

1. При $k = k_1$ (расчет значений параметра k_1 приведен в табл. 1 и 3), где

$$k_1 = (a - b)/2, \quad (12)$$

система (7) имеет два состояния равновесия O_1 и O_2 , соответствующие значениям $\varepsilon_1^* = 3\pi/4$ и $\varepsilon_2^* = -\pi/4$. Характеристические корни для O_1 и O_2 будут $\lambda_1 = b - a$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, O_1 и O_2 – сложные изолированные состояния равновесия.

Значения параметров a и b определяют знак параметра k_1 и величину λ_1 . Тогда при $a = b$ получаем равенство для бифуркационных значений параметров орбиты e_δ и ϑ_δ :

$$e_\delta \sin \vartheta_\delta = 0,75. \quad (13)$$

Минимальное бифуркационное значение $e_{\delta \min} = 0,75$ при $\vartheta_\delta = \pi/2$.

Табл. 1 – Значения параметра k_1 для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов ϑ

e	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
0°	-0,750000	-0,837532	-0,956832	-1,123162	-1,732051	-4,535574	-6,250000
45°		-0,738370	-0,738509	-0,751041	-0,826168	-1,161686	-1,336012
90°		-0,659873	-0,584731	-0,518383	-0,384900	0,000000	0,231481
135°		-0,640845	-0,555508	-0,488165	-0,394571	-0,35653	-0,370604
180°		-0,685253	-0,637888	-0,60478	-0,57735	-0,647939	-0,694444
225°		-0,774263	-0,813685	-0,873225	-1,098333	-2,07801	-2,645469
270°		-0,862911	-1,009989	-1,209559	-1,924501	-5,183513	-7,175926
315°		-0,892092	-1,081738	-1,343453	-2,29973	-6,770800	-9,536803

Для k_1 (13) можно записать

$$k_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{(2e \sin \vartheta - 1,5)(1 + e \cos \vartheta)}{(1 - e^2)^{3/2}} \right) \quad (14)$$

и для заданного эксцентриситета e определить значения угла истинной аномалии ϑ соответствующие экстремальным значениям параметра k_1 приравняв нулю значение производной (14) по ϑ :

$$2e^2 \cos 2\vartheta + 2e \cos \vartheta + 1,5e \sin \vartheta = 0. \quad (15)$$

2. При $k_1 < k \leq k_{y\phi 1}$ (расчет значений параметра $k_{y\phi 1}$ приведен в табл. 2 и 3), где

$k_{y\phi 1}$ есть решение уравнения

$$k_{y\phi 1}^2 - 2bc \sqrt{1 - ((2k_{y\phi 1} - a)/b)^2} = 0, \quad (16)$$

у (7) имеются четыре состояния равновесия: для O_1 и O_2 , соответствующих интервалу $-\pi/2 < \varepsilon^* < \pi/2$, характеристические корни действительны и имеют разные знаки, поэтому O_1 и O_2 – седловые точки. Для точек O_3 и O_4 , соответствующих интервалу $\pi/2 < \varepsilon^* < 3\pi/2$, корни при $b > a$ ($k_{y\phi 1} < 0$)

действительны и положительны. Следовательно, O_3 и O_4 – неустойчивые узлы. При $0 < k_1$ ($b < a$) корни действительны и отрицательны, т.е. O_3 и O_4 – устойчивые узлы. (Случай $k = 0$ рассматривается отдельно).

Табл. 2 – Значения параметра $k_{y\phi 1}$ для разных эксцентриситетов орбиты и углов ϑ

e	ϑ	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
-0,737566	0°		-0,812611	-0,904215	-1,008294	-1,200633	-1,282320	-1,277298
	45°		-0,723979	-0,720573	-0,726905	-0,769391	-0,863535	-0,877570
	90°		-0,652204	-0,579733	-0,515000	-0,383512	0,000000	0,232048
	135°		-0,635296	-0,552883	-0,486845	-0,394155	-0,356290	-0,370307
	180°		-0,678682	-0,634208	-0,602605	-0,576464	-0,647543	-0,694086
	225°		-0,762684	-0,801994	-0,860258	-1,074834	-1,876389	-2,206848
	270°		-0,841406	-0,969792	-1,128002	-1,514318	-1,675147	-1,529368
	315°		-0,862792	-1,010303	-1,169207	-1,413468	-1,350509	-1,279856

В табл. 3 приведен расчет по (15) значений угла истинной аномалии и соответствующих им экстремальных значений параметров k_1 и параметра $k_{y\phi 1}$.

Табл. 3 – Экстремальные значения k_1 и $k_{y\phi 1}$ для разных эксцентриситетов орбиты

e	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
ϑ_{\max}	$125,36^\circ$	$123,20^\circ$	$119,96^\circ$	$107,98^\circ$	$90,00^\circ$	$87,29^\circ$
$k_{1\max}$	-0,639329	-0,551603	-0,479980	-0,357285	0,000000	0,235938
$k_{y\phi 1}$	-0,633623	-0,548743	-0,478433	-0,356657	0,000000	0,236613
ϑ_{\min}	$307,98^\circ$	$308,83^\circ$	$309,50^\circ$	$310,48^\circ$	$311,30^\circ$	$311,43^\circ$
$k_{1\min}$	-0,893191	-1,083763	-1,346387	-2,305101	-6,785586	-9,557190
$k_{y\phi 1}$	-0,864427	-1,014253	-1,176925	-1,430629	-1,35571	-1,275006

3. При $k_{y\phi 1} < k < 0$ ($b > a$) у (7) четыре состояния равновесия: O_1 и O_2 из интервала $-\pi/2 < 2\varepsilon^* < \pi/2$ представляют собой седловые точки, состояния O_3 и

O_4 из интервала $\pi/2 < 2\varepsilon^* < 3\pi/2$ – неустойчивые фокусы. В случае $b < a$ и $0 < k < k_{\text{уф1}}$ состояния O_3 и O_4 – устойчивые фокусы.

4. При $k = 0$ (7) преобразуется в консервативную динамическую систему:

$$\frac{d\Omega_{\text{ор}}}{d\vartheta} = a + b \sin 2\varepsilon; \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = c \Omega_{\text{ор}}. \quad (17)$$

Для (17) можно найти однозначный аналитический интеграл

$$c \Omega_{\text{ор}}^2 + b \cos 2\varepsilon - 2a\varepsilon = cL, \quad (18)$$

где L – некоторая константа, определяемая выражением

$$L = \Omega_{\text{ор}}^2 + \frac{1}{c} (b \cos 2\varepsilon_0 - 2a\varepsilon_0). \quad (19)$$

Составим функцию

$$H = -\frac{1}{2} (c \Omega_{\text{ор}}^2 + b \cos 2\varepsilon - 2a\varepsilon). \quad (20)$$

Продифференцируем H по ε и по $\Omega_{\text{ор}}$

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = b \sin 2\varepsilon + a, \quad \frac{\partial H}{\partial \Omega_{\text{ор}}} = -c \Omega_{\text{ор}}. \quad (21)$$

В результате сравнения (17) и (20) можно записать

$$\frac{\partial \Omega_{\text{ор}}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial H}{\partial \Omega_{\text{ор}}}. \quad (22)$$

Следовательно, (22) является гамильтоновой системой, которая имеет интегральный инвариант с положительной плотностью. Поэтому рассматриваемая система сравнения является консервативной.

(20) выражает закон сохранения энергии. Выражения $c \Omega_{\text{ор}}^2$ и $(b \cos 2\varepsilon - 2a\varepsilon)$ представляют собой соответственно удвоенные значения кинетической и

потенциальной энергии системы. Вид кривой потенциальной энергии консервативной системы определяет характер состояний равновесия этой системы.

Состояния равновесия системы (17) располагаются на оси ε , а координаты их на этой оси определяются выражением

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{a}{b}\right). \quad (23)$$

Диапазон возможных значений отношения параметра a/b зависит от эксцентриситета и оказывается достаточно узким

$$-\frac{3}{4}e \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{4}e. \quad (24)$$

Анализ (23) свидетельствует о том, что система (17) при отношении параметров $-1 < a/b < 1$ имеет четыре состояния равновесия, при $a/b = \pm 1$ – два, а при $|a/b| > 1$ состояния равновесия отсутствуют.

Выражение $(b \cos 2\varepsilon - 2a\varepsilon)$ показывает, что минимальная потенциальная энергия изучаемой системы имеет место при $\cos 2\varepsilon < 0$, а максимальная при $\cos 2\varepsilon > 0$. Следовательно, состояния равновесия, координаты которых удовлетворяют условию $\cos 2\varepsilon^* < 0$, представляют собой устойчивые особые точки типа «центр», а состояния равновесия, для которых $\cos 2\varepsilon^* > 0$ – седловые точки. При $a/b = \pm 1$ состояниям равновесия на кривой потенциальной энергии соответствуют точки перегиба с горизонтальной касательной. Поэтому при $a/b = \pm 1$ состояния равновесия являются точками возврата первого рода. Координаты этих точек для $a/b = 1$ определяются значениями $\varepsilon_1^* = -\pi/4$, $\varepsilon_2^* = 3\pi/4$, а для $a/b = -1$ – значениями $\varepsilon_1^* = -3\pi/4$, $\varepsilon_2^* = \pi/4$.

Учитывая выражения для отношения параметров

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} e \sin \vartheta, \quad (25)$$

можно установить зависимость количества и типа состояний равновесия системы (17) от величины эксцентриситета центра масс связки. Из (25) следует, что условие $a/b > 1$ выполняется только при $e \geq 0,75$. При $e < 0,75$ всегда $a/b < 1$. Поэтому система сравнения в случае $e < 0,75$ имеет четыре состояния равновесия. В случае $e \geq 0,75$ могут иметь место два состояния равновесия, или состояния равновесия вообще могут отсутствовать.

В случае $a/b = 0$ система сравнения (7) имеет изученную ранее качественную структуру для круговых орбит [5]. Отношение $a/b = 0$ может быть при $e = 0$ или при $e \neq 0$ для $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$. Как только отношение a/b становится больше или меньше нуля, поведение сепаратрис изменяется. Из четырех сепаратрис образуется шесть, две из которых идут из седла в то же седло и образуют петли, охватывающие состояния равновесия типа «центр», а четыре – спирали, охватывающие фазовый цилиндр. При этом для положительных и отрицательных значений отношения a/b петли и спирали меняются местами. Следовательно, параметры $e = 0$ или $e \neq 0$ для $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$, т.е. при которых $a = 0$, являются бифуркационными для системы (17), а значит и для системы сравнения (7).

5. При $0 < k < k_{\text{yf4}}$ ($b > a$) у (7) четыре состояния равновесия: O_1 и O_2 из интервала $-\pi/2 < 2\varepsilon^* < \pi/2$ представляют собой седловые точки, состояния O_3 и O_4 из интервала $\pi/2 < 2\varepsilon^* < 3\pi/2$ – устойчивые фокусы. В случае $b < a$ и $k_{\text{yf4}} < k < 0$

состояния O_3 и O_4 – неустойчивые фокусы. Значения $k_{y\phi 4}$ приведены в табл. 4 и 6 и определяются при решении уравнения

$$k_{y\phi 4}^2 - 2bc\sqrt{1 - ((2k_{y\phi 4} - a)/b)^2} = 0 \quad (26)$$

Табл. 4 – Значения параметра $k_{y\phi 4}$ для разных эксцентриситетов орбиты и углов ϑ

ϑ	e	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
0°	0,737566		0,812611	0,904215	1,008294	1,200633	1,282320	1,277298
45°		0,862792	1,010303	1,169207	1,413468	1,350509	1,279856	
90°		0,841406	0,969792	1,128002	1,514318	1,675147	1,529368	
135°		0,762684	0,801994	0,860258	1,074834	1,876389	2,206848	
180°		0,678682	0,634208	0,602605	0,576464	0,647543	0,694086	
225°		0,635296	0,552883	0,486845	0,394155	0,356290	0,370307	
270°		0,652204	0,579733	0,515000	0,383512	0,000000	-0,232048	
315°		0,723979	0,720573	0,726905	0,769391	0,863535	0,877570	

6. При $k_{y\phi 4} \leq k < k_4$ (расчет значений параметра k_4 приведен в табл. 5 и 6), где

$$k_4 = (a + b)/2, \quad (27)$$

у (7) имеются четыре состояния равновесия: для O_1 и O_2 , соответствующих интервалу $-\pi/2 < \varepsilon^* < \pi/2$, характеристические корни действительны и разных знаков, поэтому O_1 и O_2 – седловые точки. Для точек O_3 и O_4 , соответствующих интервалу $\pi/2 < \varepsilon^* < 3\pi/2$, корни при $b > a$ ($k_{y\phi 4} > 0$) действительны и отрицательны. Следовательно, O_3 и O_4 – устойчивые узлы. При $k_4 < 0$ ($b < a$) корни действительны и положительны, т.е. O_3 и O_4 – неустойчивые узлы.

Табл. 5 – Значения параметра k_4 для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов ϑ

ϑ	e	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80

0°	0,750000	0,837532	0,956832	1,123162	1,732051	4,535574	6,250000
45°		0,892092	1,081738	1,343453	2,299730	6,770800	9,536803
90°		0,862911	1,009989	1,209559	1,924501	5,183513	7,175926
135°		0,774263	0,813685	0,873225	1,098333	2,078010	2,645469
180°		0,685253	0,637888	0,604780	0,577350	0,647939	0,694444
225°		0,640845	0,555508	0,488165	0,394571	0,356530	0,370604
270°		0,659873	0,584731	0,518383	0,384900	0,000000	-0,231481
315°		0,738370	0,738509	0,751041	0,826168	1,161686	1,336012

Для заданного эксцентриситета e можно определить значения угла истинной аномалии ϑ соответствующие экстремальным значениям параметра k_4 :

$$2e^2 \cos 2\vartheta + 2e \cos \vartheta - 1,5e \sin \vartheta = 0. \quad (28)$$

В табл. 6 приведен расчет по (28) значений угла истинной аномалии и соответствующих им экстремальных значений параметров k_4 и параметра $k_{y\varphi 4}$.

Табл. 6 – Экстремальные значения k_4 и $k_{y\varphi 4}$ для разных эксцентриситетов орбиты

e	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
ϑ_{\min}	234,64°	236,80°	240,04°	252,02°	270,00°	272,71°
$k_{4\min}$	0,639329	0,551603	0,479980	0,357285	0,000000	-0,235938
$k_{y\varphi 4}$	0,633623	0,548743	0,478433	0,356657	0,000000	-0,236613
ϑ_{\max}	52,02°	51,17°	50,50°	49,52°	48,70°	48,57°
$k_{4\max}$	0,893191	1,083763	1,346387	2,305101	6,785586	9,557190
$k_{y\varphi 4}$	0,864427	1,014253	1,176925	1,430629	1,35571	1,275006

7. При $k = k_4$ система (7) имеет два состояния равновесия O_1 и O_2 , соответствующие значениям $\varepsilon_1^* = \pi/4$ и $\varepsilon_2^* = -3\pi/4$, являющиеся сложными изолированными состояниями равновесия.

При $a = -b$ для бифуркационных значений параметров орбиты e_6 и ϑ_6

$$e_6 \sin \vartheta_6 = -0,75. \quad (29)$$

Для определения условий существования предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, в случае системы (7) могут быть сформулированы и доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Система (7) при $k \neq 0$ не имеет замкнутых траекторий, охватывающих состояния равновесия, и может иметь не более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Предельный цикл, если он существует, не может пересекать линию $\Omega_{op} = 0$ и целиком лежит в области $\Omega_{op} < 0$ или $\Omega_{op} > 0$ в зависимости от значений параметров a и k .

ТЕОРЕМА 2. Система (7) имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр, в том и только в том случае, когда:

1) $a < 0$ (рис. 1):

при $k \in]-\infty, k_2 [\cup]0, \infty [$ в области $\Omega_{op} < 0$, при $k \in]k_3, 0 [$ в области $\Omega_{op} > 0$;

2) $a = 0$ при $k \in]-\infty, k_2 [\cup]k_3, \infty [$ в области $\Omega_{op} < 0$;

3) $a > 0$:

при $k \in]-\infty, 0 [\cup]k_3, \infty [$ в области $\Omega_{op} < 0$, при $k \in]0, k_2 [$ в области $\Omega_{op} > 0$;

где величины $k_2 \neq 0$ и $k_3 \neq 0$ соответствуют бифуркационным значениям параметра k , при котором система (7) имеет предельный континуум, охватывающий цилиндр и состоящий из двух седловых точек и двух сепаратрис, идущих из седла в седло.

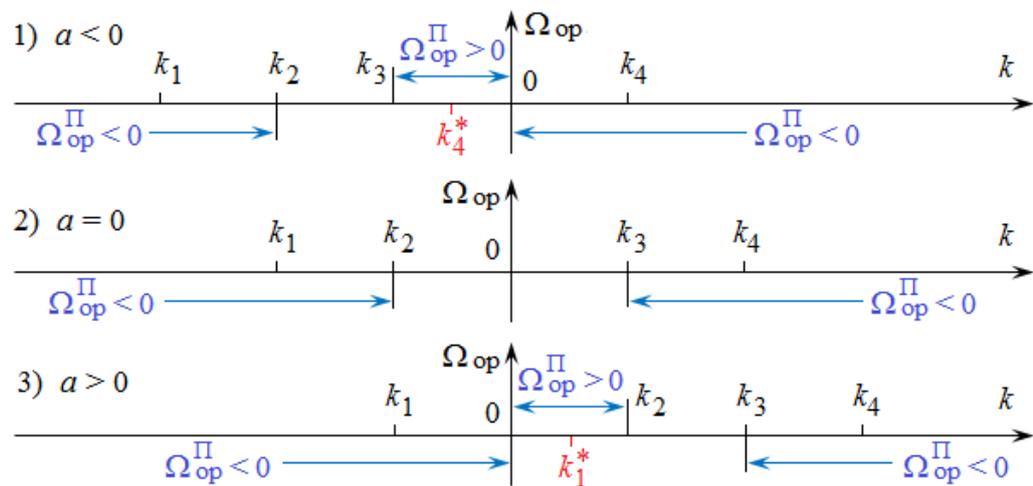


Рис. 1 – Области существования предельных циклов в зависимости от параметров k и a

В результате математического моделирования с учетом установленной качественной картины поведения особых фазовых траекторий (сепаратрис) системы (7) определены бифуркационные значения параметров k_2 (табл. 7) и k_3 (табл. 8).

Табл. 7 – Значения параметра k_2 для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов ϑ

ϑ	e	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
0°	-0,532815	-0,451233	-0,196750	-0,000000	-0,000000	-0,000000	-0,000000	-0,000000
45°		0,037217	0,084513	0,148217	0,379764	1,494963	2,199614	
90°		0,048301	0,101283	0,164943	0,369796	1,258306	1,809096	
135°		0,031123	0,058996	0,086043	0,149376	0,336157	0,435177	
180°		-0,566704	-0,579689	-0,582560	-0,577350	-0,647939	-0,694444	
225°		-0,724792	-0,808313	-0,873225	-1,098333	-2,078010	-2,645469	
270°		-0,810130	-1,001329	-1,209559	-1,924501	-5,183513	-7,175926	
315°		-0,774536	-1,007272	-1,295123	-2,282619	-6,770800	-9,536803	

Табл. 8 – Значения параметра k_3 для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов ϑ

ϑ	e	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	0,75	0,80
0°	0,532815	0,451233	0,196750	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
45°		0,774536	1,007272	1,295123	2,282619	6,770800	9,536803	
90°		0,810130	1,001329	1,209559	1,924501	5,183513	7,175926	
135°		0,724792	0,808313	0,873225	1,098333	2,078010	2,645469	
180°		0,566704	0,579689	0,582560	0,577350	0,647939	0,694444	
225°		-0,031123	-0,058996	-0,164943	-0,149376	-0,336157	-0,435177	
270°		-0,048301	-0,101283	-0,164943	-0,369796	-1,258306	-1,809096	
315°		-0,037217	-0,084513	-0,148217	-0,379764	-1,494963	-2,199614	

Сравнение данных табл. 7 и 8 с данными табл. 1 и 5 позволяет утверждать, что при увеличении эксцентриситета орбиты центра масс ТС e значения бифуркационных параметров $k_2 \rightarrow k_1$ и $k_3 \rightarrow k_4$ во всех точках орбиты за исключением перигея ($\vartheta = 0$), где $k_2 \rightarrow 0$ и $k_3 \rightarrow 0$.

Изучение состояний равновесия и условий существования предельных циклов системы сравнения (7) позволило установить, что (7) имеет следующие бифуркационные значения параметров k, a, b :

- 1) пять бифуркационных значений параметра k : $0, k_1, k_2, k_3, k_4$;
- 2) бифуркационные значения параметров a, b : $a = 0, |a| = b$.

Бифуркации системы (7) связаны с появлением и исчезновением состояний равновесия, предельных циклов (устойчивых и неустойчивых, в положительной и отрицательной областях фазового цилиндра). Следовательно, система (7) имеет 27 различных типов качественных структур фазовых траекторий: семь при $k = 0$ для случаев $a < -b, a = -b, -b < a < 0, a = 0, 0 < a < b, a = b, a > b$; и 20 при $k \neq 0$.

Изучение полных качественных структур системы (7) будем проводить в некоторой ограниченной фазовой поверхности области G с нормальной границей, в качестве которой примем два цикла без контакта, охватывающих фазовый цилиндр при $\Omega_{ор} = (\Omega_{ор})_{\max} > 0$ (верхняя граница) и $\Omega_{ор} = (\Omega_{ор})_{\min} < 0$ (нижняя граница).

Фазовые траектории системы сравнения (7) определяют характер вращательного движения связки в точке орбиты с параметрами e и ϑ с учетом выполнения условия (2) нахождения системы на связи. Поэтому изучение относительного движения связки на основе рассмотрения качественной структуры фазовых траекторий системы (7) будем проводить с учетом конкретных границ схода со связи.

В случае $k=0$ система сравнения (7) преобразуется в консервативную динамическую систему (17).

При $a < -b$, система (17) является грубой (структурно-устойчивой) в рассматриваемом классе динамических систем без состояний равновесия. Все траектории представляют собой спирали, охватывающие фазовый цилиндр при непрерывном уменьшении ординаты $\Omega_{ор}$ (рис. 2 а) со сменой направления охвата при переходе через значения $\Omega_{ор} = 0$. Этим фазовым траекториям соответствует вращательное движение связки сначала в направлении орбитального движения ее ЦМ с уменьшающейся до нуля угловой скоростью, а затем вращение в обратном направлении с все возрастающей угловой скоростью. Такое движение связки характерно для фазовых траекторий, которые не пересекают границы областей схода системы со связи. Области схода со связи на рис. 2 заштрихованы. Эти

области расположены в нижней половине фазового цилиндра ($\Omega_{ор} < 0$). Поэтому вращательное движение ТС в направлении орбитального движения ЦМ происходит всегда без схода со связи.

При $a = -b$ система (17) является негрубой (структурно-неустойчивой) с двумя неустойчивыми состояниями равновесия типа точек возврата первого рода. Сепаратрисы и состояния равновесия разделяют область G на две ячейки с однотипными орбитно-устойчивыми фазовыми траекториями (рис. 2 б), которым соответствует такое же относительное движение связки, как и при $a < -b$.

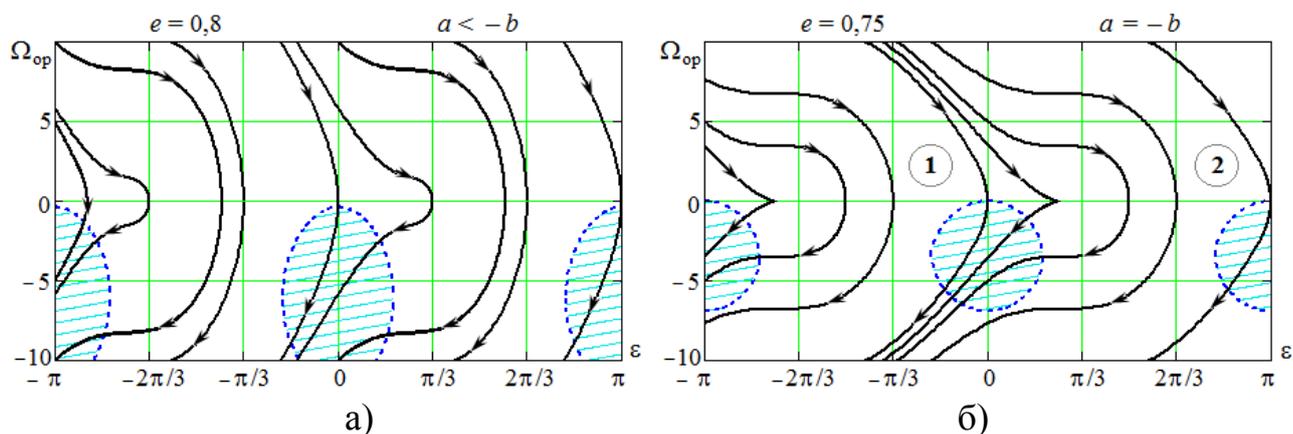


Рис. 2 – Качественная структура системы при $a < -b$ (а) и при $a = -b$ (б)

При $-b < a < 0$, изучаемая система является грубой. Она имеет четыре состояния равновесия (два центра и две седловые точки). Состояния равновесия и сепаратрисы разделяют область G на четыре ячейки (рис. 3 а). Первая и вторая ячейки представляют собой области внутри петель сепаратрис, идущих из седла в то же самое седло. Эти ячейки заполнены замкнутыми фазовыми траекториями, охватывающими состояния равновесия типа «центр». Указанным замкнутым фазовым траекториям соответствуют колебания связки относительно некоторого фиксированного в орбитальной системе координат направления, определяемого

отношением параметров a/b . Данное направление соответствует состоянию равновесия типа «центр» и определяется значениями $\varepsilon_{1,2}^*$ по зависимости (23). Самим состояниям равновесия типа «центр» отвечает неподвижная ориентация связки в направлении $\varepsilon_{1,2}^*$. Для седловых точек неподвижная ориентация связки определяется углами $\varepsilon_{3,4}^*$. Но необходимо иметь в виду, что седловые точки являются неустойчивыми состояниями равновесия.

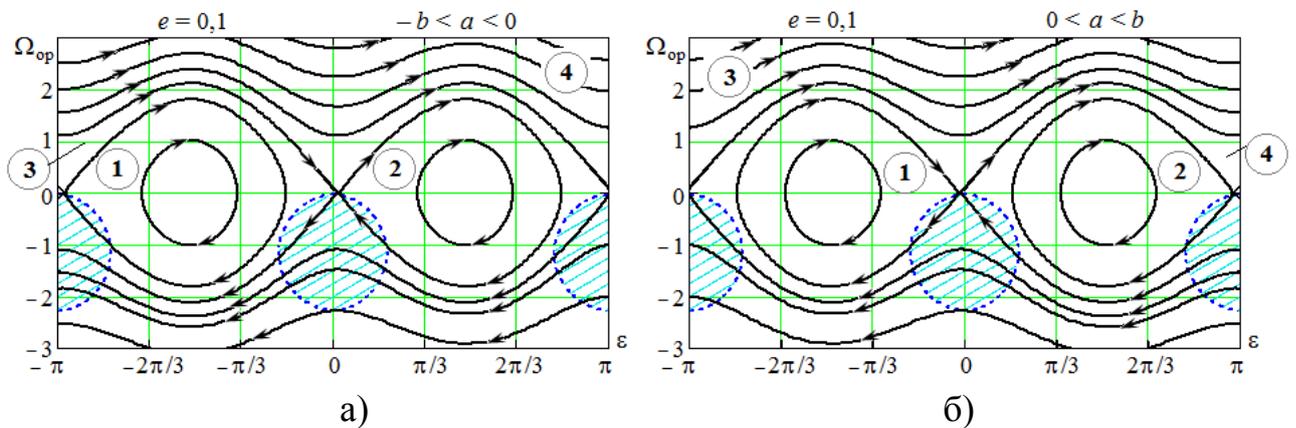


Рис 3 – Качественная структура системы при $-b < a < 0$ (а) и при $0 < a < b$ (б)

Третья и четвертая ячейки заключены между сепаратрисами седловых точек и ограничены сверху циклом без контакта при $\Omega_{ор} = (\Omega_{ор})_{\max}$, а снизу – циклом при $\Omega_{ор} = (\Omega_{ор})_{\min}$. Все орбитно-устойчивые фазовые траектории этих ячеек образуют спирали, охватывающие фазовый цилиндр со сменой направления охвата при $\Omega_{ор} = 0$. Фазовым траекториям третьей и четвертой ячеек соответствует вращательное движение ТС сначала в направлении орбитального движения ЦМ с плавно уменьшающейся угловой скоростью. При переходе через $\Omega_{ор} = 0$ направление угловой скорости вращения ТС меняется на противоположное и величина ее непрерывно возрастает. Две замкнутые области схода со связки

расположены в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$. Поэтому ослабление троса и переход объектов ТС в свободное движение может происходить только при вращении в направлении, противоположном орбитальному движению ЦМ.

При $a = 0$ система сравнения (17) является негрубой динамической системой, имеющей две седловые точки и два состояния равновесия типа «центр». Особенностью системы является то, что все четыре сепаратрисы идут из седла в соседнее седло. В данном случае изучаемая система трансформируется в известную динамическую систему [5] при $e = 0$ и поэтому приведенные ранее результаты исследования относительного движения связки на круговых орбитах полностью можно отнести к рассматриваемому случаю $a = 0$.

При $0 < a < b$, система сравнения (17) представляет собой грубую динамическую систему с двумя седловыми точками и двумя устойчивыми состояниями равновесия типа «центр». Сепаратрисы и состояния равновесия делят область G на четыре ячейки. Первые две ячейки находятся внутри петель сепаратрис, идущих из седла в то же самое седло, а две другие ячейки – между сепаратрисами, навивающимися на фазовый цилиндр. Представленная на рис. 3 б качественная структура системы для данного случая очень близка к структуре при $-b < a < 0$. Отличие заключается в том, что петли сепаратрис образуются в результате слияния других пар сепаратрис. Кроме того, сепаратрисы и орбитно-устойчивые фазовые траектории третьей и четвертой ячеек образуют спирали, навивающиеся на фазовый цилиндр в первом случае сверху вниз, а во втором – снизу вверх. Относительное движение связки, соответствующее фазовым

траекториям первых двух ячеек, аналогично случаю $-b < a < 0$. Относительное же движение связки, соответствующее двум другим ячейкам, представляет собой вращательное движение ее сначала в направлении, обратном орбитальному движению ЦМ, а затем в прямом направлении. Однако все сепаратрисы и орбитно-устойчивые фазовые траектории третьей и четвертой ячеек обязательно пересекают границы областей схода системы со связки. Поэтому практически вращение связки можно реализовать только в направлении орбитального движения ее ЦМ.

При $a = b$ система (17) является негрубой динамической системой, имеющей два состояния равновесия типа точек возврата первого рода. Состояния равновесия и сепаратрисы делят область G на две ячейки. Качественная структура фазовых траекторий весьма близка к структуре при $a = -b$ (рис. 2 б), и ее можно получить зеркальным отображением относительно оси $\Omega_{ор}$ и сменой направления движения по фазовым траекториям на противоположное. Орбитно-устойчивым фазовым траекториям обеих ячеек при $a = b$ соответствует вращательное движение связки сначала в направлении, обратном орбитальному движению ее ЦМ, с уменьшающейся до нуля угловой скоростью. После перехода $\Omega_{ор} = 0$ направление вращения связки меняется на противоположное с непрерывно возрастающей угловой скоростью. При этом часть траекторий в нижней половине фазового цилиндра ($\Omega_{ор} < 0$) пересекает границы двух областей схода системы со связки. Следовательно, описанный тип относительного движения связки имеет место только для тех фазовых траекторий, которые при переходе из нижней половины фазового цилиндра в верхнюю не пересекают границ областей схода системы со связки.

При $a > b$, система (17) является грубой без состояний равновесия. Качественная структура системы близка к структуре $a < -b$ (рис. 2 а) и получается из нее зеркальным отображением относительно оси Ω_{op} и сменой направления движения по траекториям на противоположное. Траекториям, переходящим из нижней части фазового цилиндра в верхнюю без пересечения границ двух областей схода системы со связи, соответствует вращение ТС сначала в направлении противоположном орбитальному движению ЦМ с уменьшающейся до нуля угловой скоростью, а затем вращение в другом направлении с все возрастающей угловой скоростью.

В случае $k \neq 0$ система сравнения (7) имеет 20 типов качественных структур, из которых 10 были ранее изучены при рассмотрении системы для круговой орбиты ТС [5]. Эти 10 типов качественных структур связаны с появлением и исчезновением состояний равновесия, предельных циклов (устойчивых и неустойчивых) в отрицательной области фазового цилиндра (области допустимых значений параметров k , a и b определены в теореме 2). Все эти типы структур могут быть использованы для изучения относительного движения ТС на эллиптических орбитах совместно с проведенным выше анализом состояний равновесия и установленными бифуркационными значениями параметров k (табл. 1 – 8). Области схода системы со связи строятся с учетом выполнения условия (2).

Восемь из остальных 10 типов качественных структур системы (5) связаны с появлением устойчивых и неустойчивых предельных циклов, с отсутствием или наличием двух либо четырех состояний равновесия в положительной области

фазового цилиндра.

При $a < 0$ и $k = k_3$ система (7) негрубая с четырьмя состояниями равновесия: два седла и два неустойчивых фокуса. Система имеет предельный континуум, охватывающий фазовый цилиндр в области $\Omega_{ор} > 0$. Сепаратрисы, состояния равновесия и предельный континуум разделяют область G на три ячейки (рис. 4), орбитно-устойчивые траектории которых сходят с предельного континуума и двух неустойчивых фокусов.

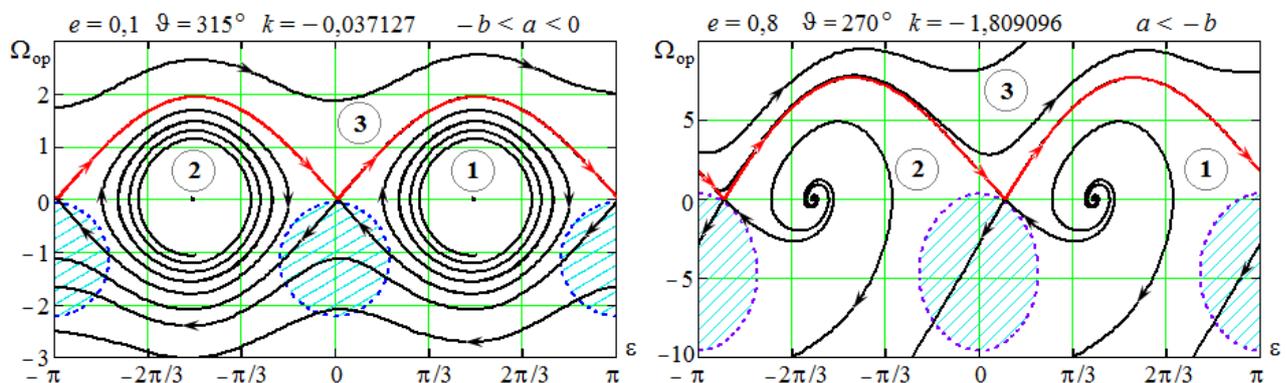


Рис. 4 – Качественная структура системы при $a < 0$ и $k = k_3$

При $a > 0$ и $k = k_2$ система (7) негрубая (структурно-неустойчивая), имеющая четыре состояния равновесия – два седла и два устойчивых фокуса. Особенность системы при данном бифуркационном значении параметра k заключается в наличии предельного континуума, охватывающего фазовый цилиндр и состоящего из двух седловых точек и двух сепаратрис, идущих из седла в соседнее седло в области $\Omega_{ор} > 0$. Особые траектории системы разделяют область G на три ячейки (рис. 5). Орбитно-устойчивые траектории ячеек 1 и 2, расположенные ниже предельного континуума, навиваются на состояния равновесия типа фокуса, а траектории ячейки 3, расположенной выше предельного континуума, навиваются на этот континуум.

Значительная часть ячеек 1 и 2 заполнена орбитно-устойчивыми траекториями, которые не пересекают границ зон схода со связи. Этим фазовым траекториям соответствует разведение объектов связки при колебаниях ее с уменьшающейся амплитудой относительно прямолинейных траекторий, отвечающих состояниям равновесия типа фокус.

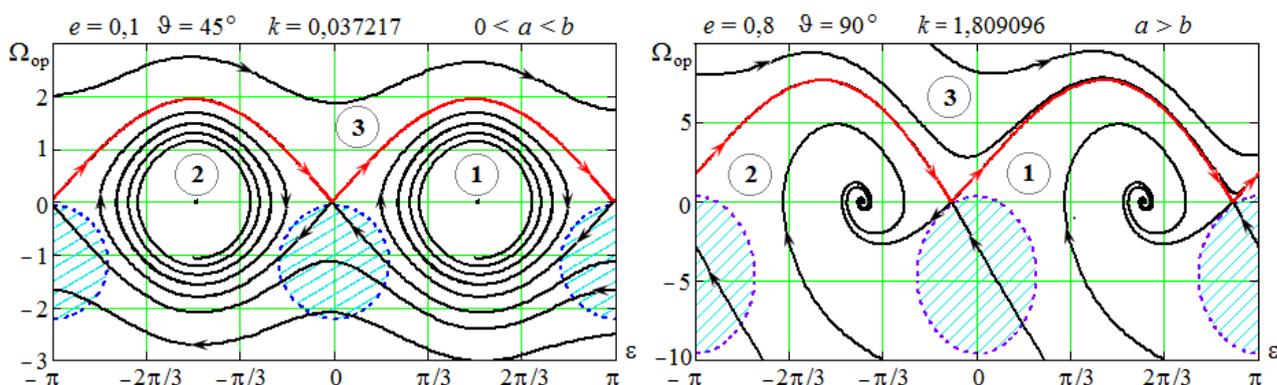


Рис. 5 – Качественная структура системы при $a > 0$ и $k = k_2$

Для $a < 0$ при $k \in]k_3, 0[$ и для $a > 0$ при $k \in]0, k_2[$ система (7) имеет предельный цикл в области $\Omega_{op} > 0$. Бифуркационное значение параметра $|a| = b$ определяет в указанных интервалах для параметра k наличие и число состояний равновесия:

1) для $|a| \leq b$ – четыре состояния равновесия (рис. 6);

2) для $|a| > b$ бифуркационные значения параметра $k_1 = k_1^*$ или $k_4 = k_4^*$

находятся в рассматриваемых интервалах (рис. 1), поэтому при $a < 0$ и $k \in]k_3, k_4^*[$ или при $a > 0$ и $k \in]k_1^*, k_2[$ – четыре состояния равновесия, при $a < 0$ и $k = k_4^*$ или $a > 0$ и $k = k_1^*$ – два состояния равновесия (рис. 7), при $a < 0$ и $k \in]k_4^*, 0[$ или при $a > 0$ и $k \in]0, k_1^*[$ – состояния равновесия отсутствуют (Рис. 8).

При $a < 0$ и $k \in]k_3, 0[$ в случае $|a| \leq b$, а также при $a < 0$ и $k \in]k_3, k_4^*[$ в случае $|a| > b$, система (7) грубая, четыре состояния равновесия: два седла и два неустойчивых фокуса (рис. 6 а). Неустойчивый предельный цикл находится в области $\Omega_{op} > 0$. Сепаратрисы, состояния равновесия и предельный цикл делят область G на пять ячеек. Фазовые траектории всех ячеек сматываются с неустойчивого предельного цикла и фокуса.

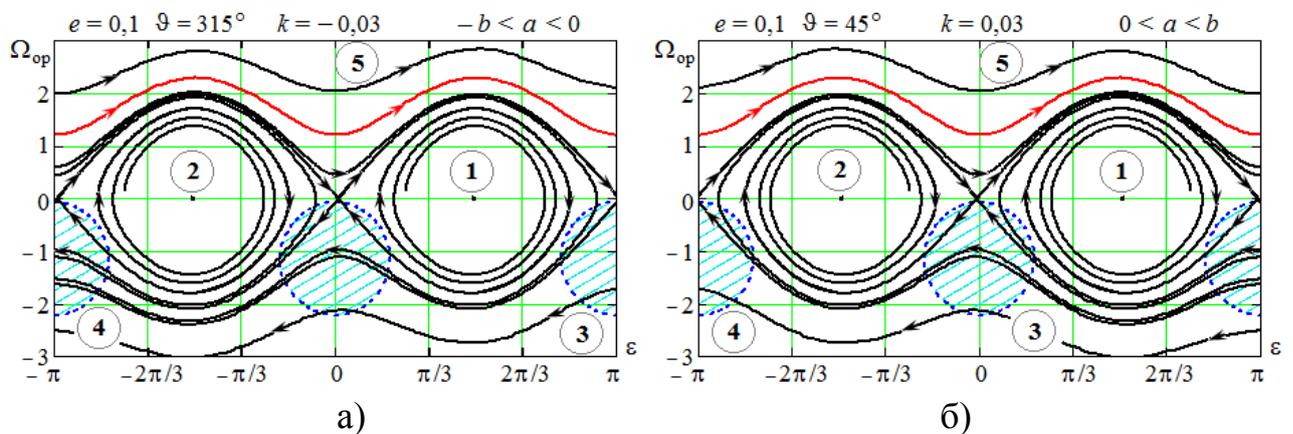


Рис. 6 – Качественная структура системы для $|a| \leq b$ при $a < 0$ и $k \in]k_3, 0[$ (а) и при $a > 0$ и $k \in]0, k_2[$ (б)

При $a > 0$ и $k \in]0, k_2[$ в случае $|a| \leq b$, а также при $a > 0$ и $k \in]k_1^*, k_2[$ в случае $|a| > b$, система (7) грубая (структурно-устойчивая) и имеет четыре состояния равновесия: два устойчивых фокуса и две седловые точки (рис. 6 б). Сепаратрисы, состояния равновесия и устойчивый предельный цикл делят область G на пять ячеек. Орбитно-устойчивые фазовые траектории всех ячеек либо асимптотически приближаются к состояниям равновесия типа фокус, либо навиваются на предельный цикл. Возможные типы относительного движения связки приблизительно те же, что и в случае при $a > 0$ и $k = k_2$.

При $a < 0$ и $k = k_4^*$ система (7) является негрубой (структурно-неустойчивой) с двумя неустойчивыми состояниями равновесия типа точек возврата первого рода. Сепаратрисы, состояния равновесия и неустойчивый предельный цикл разделяют область G на три ячейки с однотипными орбитно-устойчивыми фазовыми траекториями (рис. 7 а). Фазовые траектории всех ячеек сматываются с неустойчивого предельного цикла и фокуса.

При $a > 0$ и $k_1 = k_1^*$ система (7) также является негрубой (структурно-неустойчивой) с двумя неустойчивыми состояниями равновесия типа точек возврата первого рода. Сепаратрисы, состояния равновесия и устойчивый предельный цикл разделяют область G на три ячейки с однотипными неособыми фазовыми траекториями (рис. 7 б). Фазовые траектории всех ячеек навиваются на предельный цикл в области $\Omega_{ор} > 0$.

Предельный цикл на рис. 7 и 8 находится значительно выше $\Omega_{ор} = 10$.

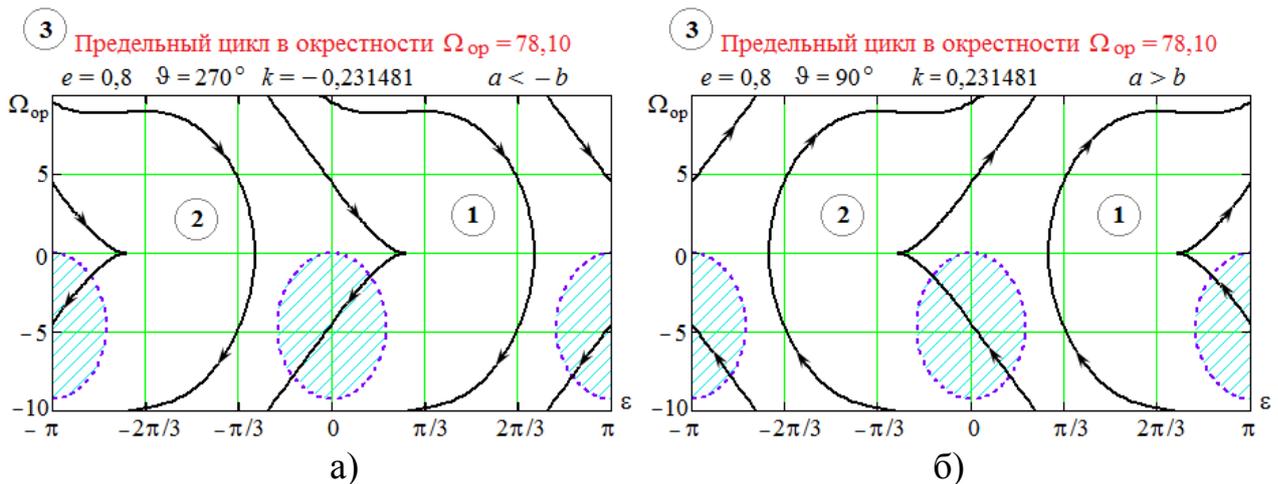


Рис. 7 – Качественная структура системы для $|a| > b$ при $a < 0$ и $k = k_4^*$ (а) и при $a > 0$ и $k = k_1^*$ (б)

При $a < 0$ и $k \in]k_4^*, 0[$ система (7) является грубой (структурно-устойчивой)

без состояний равновесия и имеет неустойчивый предельный цикл в области $\Omega_{op} > 0$

. Фазовые траектории всех ячеек сматываются с неустойчивого предельного цикла

(рис. 8 а).

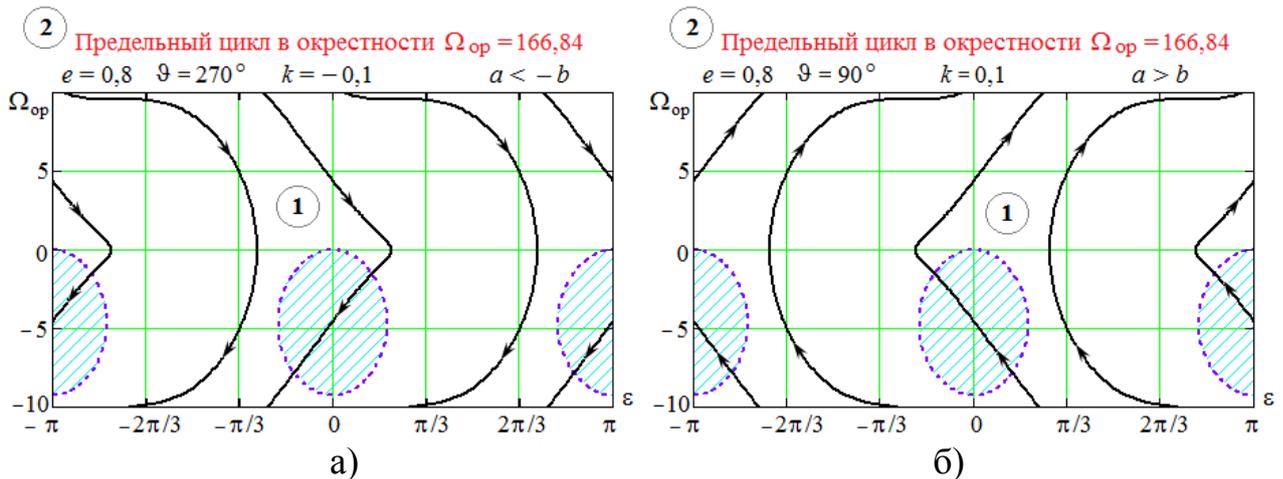


Рис. 8 – Качественная структура системы для $|a| > b$ при $a < 0$ и $k \in]k_4^*, 0[$ (а)
и при $a > 0$ и $k \in]0, k_1^*[$ (б)

При $a > 0$ и $k \in]0, k_1^*[$ система (7) является грубой (структурно-устойчивой)

без состояний равновесия и имеет устойчивый предельный цикл в области $\Omega_{op} > 0$.

Фазовые траектории всех ячеек навиваются на предельный цикл (рис. 8 б).

И наконец, две из остальных 10 типов качественных структур системы (7) связаны с появлением устойчивых и неустойчивых предельных циклов в нижней области фазового цилиндра ($\Omega_{op} < 0$) при наличии двух состояний равновесия в случаях, когда $k_2 \rightarrow k_1$ (табл. 7) или $k_3 \rightarrow k_4$ (табл. 8).

При $a < 0$ и $k_3 \rightarrow k_4$ система (7) является негрубой (структурно-неустойчивой) с неустойчивым предельным циклом (предельным континуумом) и с двумя неустойчивыми вырожденными состояниями равновесия: в данном случае

состояния равновесия типа седло и узел (рис. 9) сливаются. Сепаратрисы и предельный цикл делят область G на четыре ячейки. Фазовые траектории всех ячеек сматываются с предельного цикла (рис. 9 а).

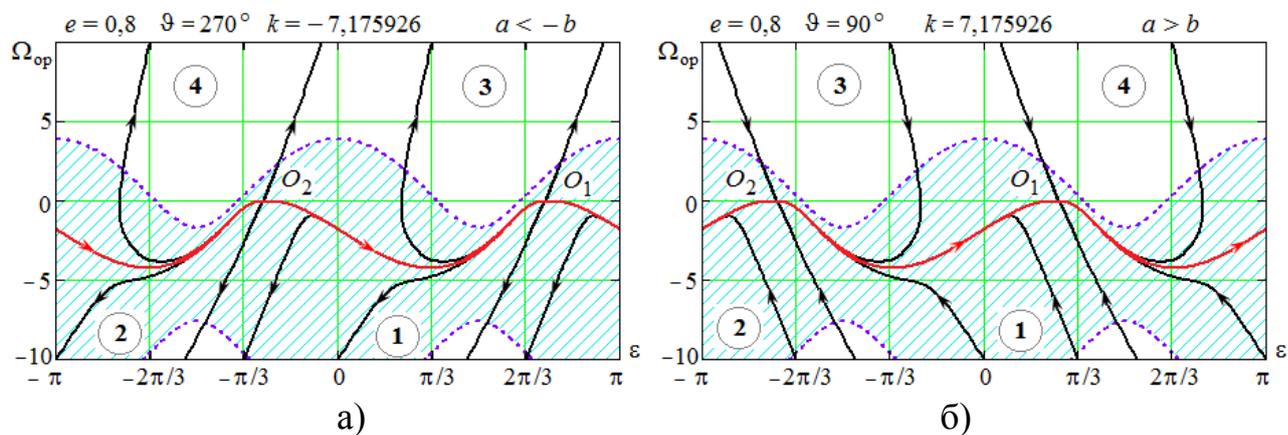


Рис. 9 – Качественная структура системы при $a < 0$ и $k_2 \rightarrow k_1$ (а) и при $a > 0$ и $k_3 \rightarrow k_4$ (б)

При $a > 0$ и $k_3 \rightarrow k_4$ система (7) является негрубой (структурно-неустойчивой) с устойчивым предельным циклом (предельным континуумом) и с двумя неустойчивыми вырожденными состояниями равновесия типа седло-узел: состояния равновесия типа седло и узел сливаются. Сепаратрисы и предельный цикл делят область G на четыре ячейки. Фазовые траектории всех ячеек навиваются на предельный цикл (рис. 9 б).

Анализ результатов полного качественного исследования системы (7) показывает, что все бифуркации рассматриваемой системы и соответственно все изменения возможных типов относительного движения связки зависят от текущего значения параметра k , который для любого метода управления изменением длины связи определяется из (3):

$$k = \frac{\dot{D}}{D} \sqrt{\frac{p^3}{\pi_0 (1 - e^2)^3}}. \quad (30)$$

При переходе параметра k от положительных значений к отрицательным устойчивые состояния равновесия становятся неустойчивыми.

Устойчивые состояния равновесия при $k \neq 0$ имеют место только при удалении связанных объектов друг от друга. Для орбитно-устойчивых фазовых траекторий удаление объектов связки происходит по криволинейным траекториям, которые в зависимости от начальных условий, могут переходить в свободное движение, когда соответствующая фазовая траектория пересекает границу зоны схода со связи.

Траектории сближения связанных объектов соответствуют неустойчивым состояниям равновесия системы (7). Поэтому практическая реализация таких траекторий возможна для ограниченного отрезка времени или за счет коррекции движения связанных объектов.

Орбитно-устойчивым фазовым траекториям системы (7) при $k < 0$ в общем случае отвечают движения связки с возрастающей угловой скоростью.

По (30) можно оценить диапазон изменения параметра k для любого пассивного метода регулирования длины троса и проанализировать относительное движение связанных объектов на основе результатов полного качественного исследования системы сравнения (7) на каждом из участков орбиты ЦМ связки с заданным эксцентриситетом. Это позволяет выявить все изменения возможных типов относительного движения объектов ТС.

Представленные результаты исследования управляемого движения связанных объектов могут быть использованы для решения ряда практических задач.

Из анализа качественных структур системы сравнения (7) следует, что реализуемым режимам ТС на эллиптических орбитах соответствуют совокупности орбитно-устойчивых неособых фазовых траекторий, заполняющие фиксированные области фазовой поверхности. Таким образом, с учетом ранее полученных законов изменения параметра k (4) и (5), установлены следующие возможные режимы управляемого движения ТС на эллиптических орбитах:

- 1) режим прямолинейного развертывания связки (включая режим вертикального развертывания);
- 2) режим вращения ТС вокруг ЦМ с постоянной угловой скоростью;
- 3) режим колебаний ТС относительно вертикального положения при постоянной длине соединительного троса.

Реализуемый на круговых орбитах равновесный стационарный режим, на эллиптических орбитах трансформируется в режим малых колебаний, так как в процессе движения ТС по орбите происходит смена параметров a, b в системе сравнения и изменяются положения состояний равновесия (7). Этот факт также подтверждается проведенными численными методами моделирования движения ТС.

Заключение:

1. Предложен эффективный метод формирования режимов управляемого движения ТС для решения практических задач на эллиптических орбитах.
2. На основе математического аппарата качественной теории динамических систем и теории бифуркаций установлены все типы качественных

структур динамической системы управляемого движения связанных объектов, определены все бифуркации изучаемой системы и бифуркационные значения параметров, которые определяют всю совокупность характеристик управляемого движения ТС на эллиптических орбитах.

3. В результате исследования полной совокупности качественных структур динамической системы определены все возможные режимы управляемого движения связанных объектов и установлены области начальных условий, в которых реализуются эти режимы.

Библиографический список

1. Даниленко А.В., Ёлкин К.А., Лягушина С.Ц. Проект программы поэтапного освоения перспективной космической технологии – орбитальных тросовых систем // Доклады Восьмого международного аэрокосмического конгресса IAC'15. Москва, 2015, С. 289-294.
2. Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 559 с.
3. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем - М.: Наука, 1990. – 336 с.
4. Иванов В.А., Купреев С.А., Либерзон М.Р. Сближение в космосе с использованием тросовых систем: Монография. – М.: Хоружевский, 2010. – 360 с.
5. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Космические тросовые системы. – М.: Альфа-М, 2014. – 208 с.

6. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Орбитальное функционирование связанных космических объектов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 320 с.
7. Щербаков В.И. Орбитальные маневры космической тросовой системы. – СПб.: Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, 2010. –185с.
8. Kruijff, M. Tethers in Space: A propellantless propulsion in-orbit demonstration / M. Kruijff. – Delft University of Technology, The Netherlands, 2011. – 432 p.
9. Cosmo, M. L. Tethers in space handbook / M. L. Cosmo, E. C. Lorenzini. - Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1997. – 274 p.
10. Aslanov, V. S. Dynamics of the Tethered Satellite Systems / V. S. Aslanov, A. S. Ledkov. - Cambridge: Woodhead Publishing Limited. 2012. - 331 p.
11. Ледков А.С., Дюков Д.И. Исследование хаотических режимов движения КА с тросом, совершающим малые колебания около местной вертикали // Труды МАИ. 2012. №61. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35644> (дата обращения 05.09.2015)
12. Наумов О.Н. Анализ влияния статической и динамической асимметрии на вращательное движение капсулы при управляемом разворачивании тросовой системы // Труды МАИ. 2011. №43. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=24767> (дата обращения 05.09.2015)
13. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Качественная теория динамических систем второго порядка.– М.: Наука, 1960. – 568 с.
14. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.М., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.