

## **Моделирование колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки при равномерном температурном воздействии при вариационной постановке задачи**

**Сысоев О.Е.\* , Добрышкин А.Ю.\*\* , Сысоев Е.О.\* , Журавлева Е.В.\*\*\***

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, КнАГУ,*

*пр. Ленина, 27, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия*

*\*e-mail: [fks@knastu.ru](mailto: fks@knastu.ru)*

*\*\*e-mail: [wwwartem21@mail.ru](mailto: wwwartem21@mail.ru)*

*\*\*\*e-mail: [diana@knastu.ru](mailto: diana@knastu.ru)*

***Статья поступила 14.02.2021***

### **Аннотация**

Целью работы является разработка различными способами, в том числе и экспериментальным, математической модели колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки при равномерном температурном воздействии на основе вариационной формулировки задачи. В строительстве широко используются выразительные высокоэффективные конструкции зданий и сооружений в виде тонкостенных цилиндрических оболочек. Учитывая, что все здания и сооружения испытывают действия внешних сил, вызывающих вынужденные колебания и температурные воздействия, которые изменяют модуль упругости конструкционного материала, что не учитывается при проектировании. Во избежание техногенных катастроф необходимо выполнять расчеты конструкций зданий и сооружений на частотные характеристики, при динамическом изменении температур изменение модуля упругости материала тонкостенной цилиндрической оболочки влияет на динамику частотных характеристик колебаний конструкций. Существующие модели

для расчета колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек не учитывают такие изменения, поэтому требуется разработка новых математических и их экспериментальная проверка. Параметры новой теоретической основы подтверждаются на реальной уменьшенной модели конструкции, и производится сопоставление экспериментальных и теоретических данных. В статье описана новая расчетная модель колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки при повышенной температуре на основе вариационной постановке задачи. Проведена экспериментальная проверка полученной математической модели и определен диапазон её применения.

**Ключевые слова:** тонкостенная цилиндрическая оболочка, вынужденные колебания, расчетная модель, экспериментальные исследования, вариационная формулировка задачи.

### Введение

Тонкостенные цилиндрические формы конструкций часто используются при строительстве зданий и сооружений из-за хорошего показателя соотношения внутреннего объёма здания к площади внешней поверхности и высокой экономической эффективности. Такие сооружения часто строятся в климатических зонах с перепадом суточных и сезонных температур более  $150^{\circ}\text{C}$ . От теплового расширения (сжатия) изменяется форма тонкостенной цилиндрической оболочки [1-4], а также модуль упругости конструкционного материала оболочки. Этот фактор значительно влияют на частотные характеристики собственных и вынужденных колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки, [5-8]. А при совпадении

частотного спектра собственных и вынужденных колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки может возникать явление резонанса, [9-12] и разрушению оболочки, так например: в 2010 году на стадионе в Миннесоте (США) обрушилась одна из секций крыши, завалив трибуну; в 2015 г. авария строящегося резервуара на нефтезаводе в (г. Комсомольске-на-Амуре) из-за колебаний, возникших от ветровых нагрузок; в 2015г. (с. Верх-Ирмень Новосибирской области) кровля крытого катка в не выдержала совместных ветровых и снеговых нагрузок; в 2017 году произошел обвал крыши школы в п. Мурино, в 2018 году деформации крыши строящегося катка г. Истра носили катастрофический характер; в 2018г. в г. Балашихе возникла авария, в результате которой обрушилась крыша металлической стоянки арочной формы; экологической катастрофа из-за разлива дизельного топлива под Норильском 29 мая 2020 г. в результате разгерметизации аварийного резервуара на ТЭЦ-3 АО "НТЭК". Из анализа приведенных техногенных катастроф следует, что при проектировании тонкостенных цилиндрических оболочек нужно выполнять расчеты и учитывать частотные характеристики собственных и вынужденных колебаний оболочки.

### **Материалы и методы**

Равномерный нагрев тонкостенной цилиндрической оболочки - это наиболее простой и часто встречающееся температурное воздействие, математическая модель расчета частоты колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки при равномерном нагреве используем традиционную модель, описанную в работах [12-16] определением перемещения и деформации.

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) - \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - \alpha_T(1+\nu)N_T), \left( \begin{matrix} \leftrightarrow \\ x, y \end{matrix} \right);$$

$$S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dz = \frac{E}{2(1-\nu)} \varepsilon_{12}; \quad (1)$$

где  $N_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \theta dz$  сила от тепловых расширений

Далее находим моменты, используя следующие формулы:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz = D(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) - \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = D(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - \alpha_T(1+\nu)M_T), \left( \begin{matrix} \leftrightarrow \\ x, y \end{matrix} \right);$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}, \quad (2)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{2(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жесткость,  $M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz$  - тепловой момент.

Два первых уравнения (1) решаются относительно тангенциальных деформаций средней поверхности, и получается:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \nu T_2) + \frac{\alpha_T}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz, \left( \begin{matrix} \leftrightarrow \\ x, y \end{matrix} \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S. \quad (3)$$

Затем получаем следующее уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}
& -D\nabla^4 w - \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta z dz - \rho \frac{h^3}{12} \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_1 T_1 + k_2 T_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left( S \frac{\partial w}{\partial x} + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) q - \rho h T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

С учетом (3) в (4) следует:

$$\frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\alpha_T}{h} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz - \frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w. \quad (5)$$

При  $p_1 = p_2 = 0$  получается следующая система уравнений, описывающее поведение тонкостенной цилиндрической оболочки в температурном поле:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Eh} \nabla^4 F + \frac{\alpha_T}{h} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w; \\
& D\nabla^4 F + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta z dz + \rho \frac{h^3}{12} \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L(w, F) + \nabla_k^2 F; \\
& C_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda_q \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = -\frac{E\alpha_T T_0}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial t} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + W_0; \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$  - удвоенный двумерный оператор Лапласа, и

$$L(\theta, \theta) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2};$$

представляет нелинейный оператор, определяющий непрямолинейности тонкостенной цилиндрической оболочки.

$$\begin{aligned}
& \lambda_q \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \\
&= -W_0 + C_3 \frac{\partial \theta}{\partial z} \\
&+ \frac{E \alpha_T T_0}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left[ \frac{1 - \nu}{Eh} (\nabla^2 F - (p_1 + p_2)) + \frac{2\alpha_T}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz - z \nabla^2 w \right] \right. \\
&\left. + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \theta \right\}; \\
& \frac{1}{Eh} \nabla^4 F + \frac{\alpha_T}{h} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz + \frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w = 0 \tag{7}
\end{aligned}$$

Отсюда получаем геометрически линейную систему уравнений связанной задачи теории оболочек в температурном поле:

$$\begin{aligned}
& \lambda_q \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - W_0 \\
& - \frac{E \alpha_T}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left[ \frac{1 - \nu}{Eh} (\nabla^2 F - (p_1 + p_2)) + \frac{2\alpha_T}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz - z \nabla^2 w \right] \right. \\
& \left. + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \theta \right\} = C_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t}; \\
& D \nabla^4 F + \frac{E \alpha_T}{1 - \nu} \nabla^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta z dz - \nabla_k^2 F = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q. \tag{8}
\end{aligned}$$

Учитывая, что все приведенные системы уравнений получены для статического распределения температурного поля по толщине оболочки, при том, что оболочка тонкостенная, этим обстоятельством можно пренебречь.

Для проведения экспериментальной проверки полученной математической модели на базе Комсомольского-на-Амуре государственного университета был создан экспериментальный стенд рис.1.

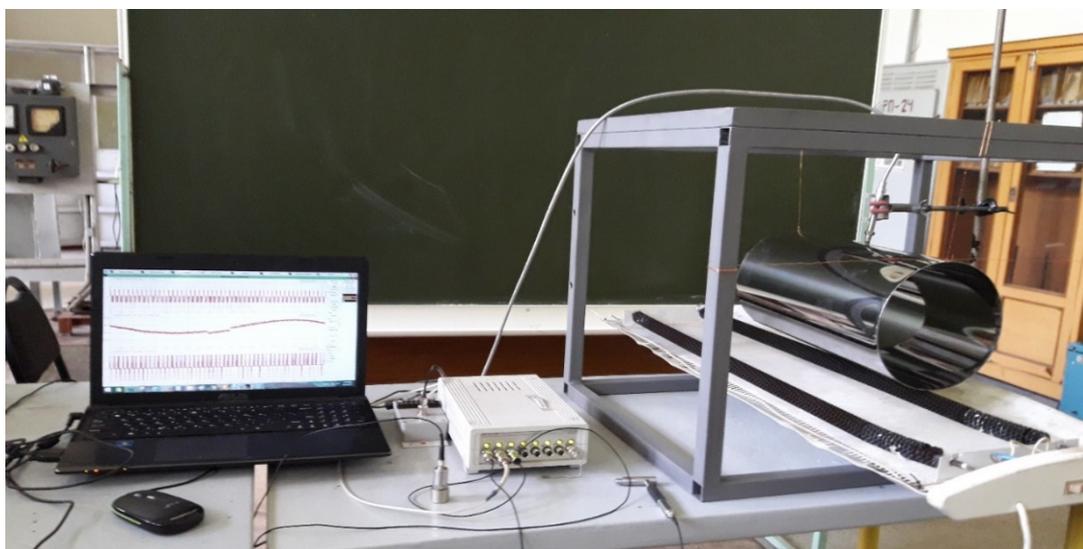


Рисунок 1. Экспериментальный стенд.

Экспериментальный стенд действует по приведенной схеме (рис. 2): бесконтактный датчик вихретокового принципа действия ZET 701 регистрирует вынужденные колебания тонкостенной цилиндрической оболочки задаваемые, испытательным молотком AU03, используемый при проведении динамических испытаний тонкостенных цилиндрических оболочек и конструкций для определения их частотных характеристик, и применимый при диагностике и моделировании динамических характеристик, измерение импульса сообщаемой объекту силы

используем датчик силы АС21; аналоговый сигнал с бесконтактного вихретокового датчика поступает на аналоговый усилитель сигналов, затем преобразуется на АЦП и передаётся ПЭВМ где данные обрабатываются в программе ZETLAB; температура оболочек задаётся термонагревательным элементом расположенным внутри оболочки для получения равномерности её нагрева (рис. 3).



Рисунок 2. Схеме экспериментального стенда.

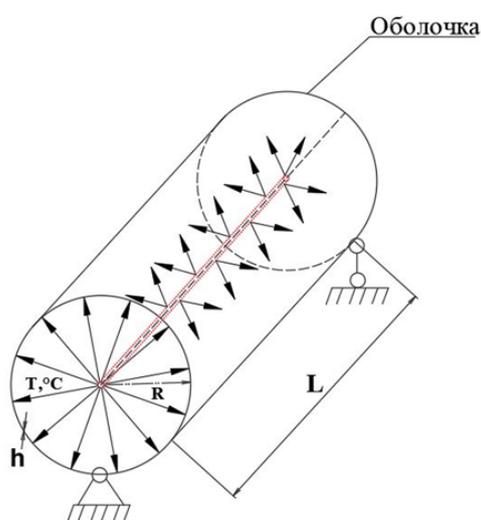


Рисунок 3. Расчетная схема тонкостенной цилиндрической оболочки при равномерном нагреве, когда оболочка свободно опёрта.



Рисунок 4. Общий вид. Вихретоковый бесконтактный датчик ZET 701.

Обозначение инфракрасного термометра DT-8802. Бесконтактное измерение температуры тонкостенных цилиндрических оболочек в диапазоне температур от 20 °С до 300 °С, с точностью измерения – 0,1 °С (0,1°F).

В качестве модельного испытательного образца использовалась тонкостенная ( $\delta=0,5$  мм) цилиндрическая оболочка диаметром 200 мм, высотой  $H=400$  мм из стали X17.

### Результаты

На рисунке 5 показано сравнение экспериментальных и расчетных данных частот колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки от температуры при равномерном нагреве по традиционной модели, а также по модели на основе вариационной формулировки задачи и результаты натурных экспериментов на тонкостенной цилиндрической оболочке диаметром 200 мм, высотой  $H=400$  мм из стали X17.

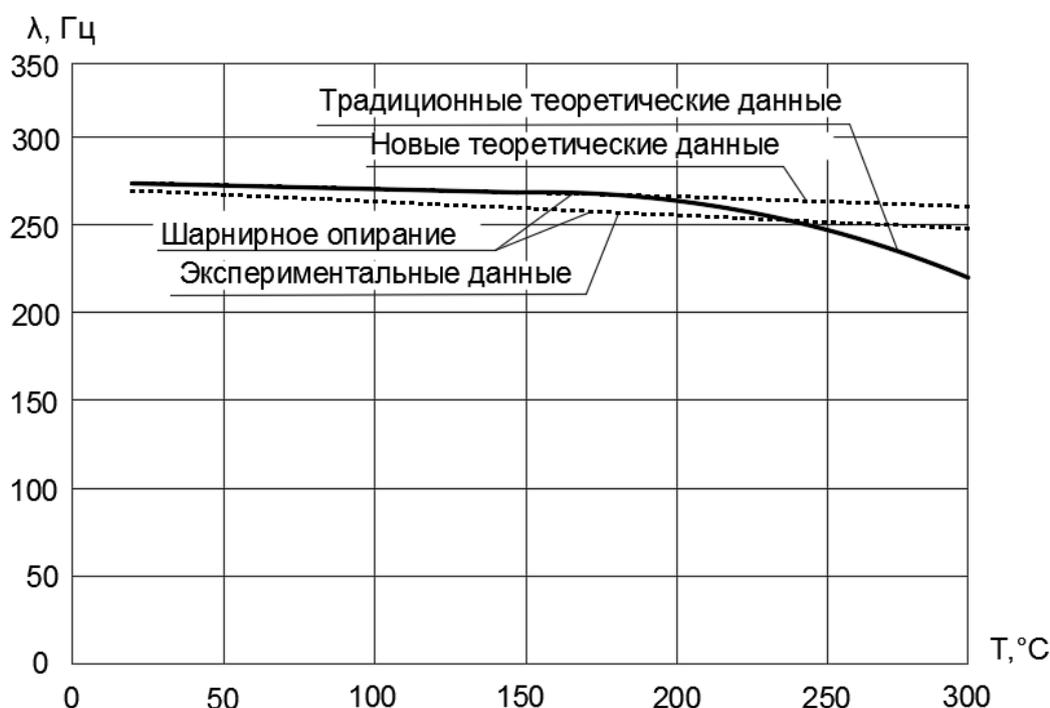


Рисунок 5. Зависимость частоты колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки от температуры при равномерном нагреве по традиционной модели, модели на основе вариационной формулировки задачи и экспериментальные данные.

### Заключение

На диаграмме мы видим (рис. 5), что новая модель, на основе вариационной формулировки задачи, дает лучшие совпадения с результатами натуральных испытаний начиная с температуры 200 °C и выше. Следовательно, новая модель, на основе вариационной формулировки задачи, может использоваться при расчете частотных характеристик тонкостенных цилиндрических конструкций, работающих при равномерном нагреве.

**Библиографический список**

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
2. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1984. – 220 с.
3. Антуфьев Б.А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 176 с.
4. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн Сит Наинг. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
5. Z. Wang, Q. Han, D.H. Nash, P. Liu. Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell // Thin-Walled Structures, 2017, no. 119, pp. 438 – 446. DOI: [10.1016/j.tws.2017.07.002](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.07.002)
6. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu., Nyein Sitt Naing, Baenkhaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum, 2019, vol. 945, pp. 885 – 892. DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885)
7. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // Journal of Heilongjiang university of science and technology, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 75 – 78.

8. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu., Nyein Sitt Naing. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved plate carried to the associated masses system // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2017, vol. 262. DOI: [10.1088/1757-899X/262/1/012055](https://doi.org/10.1088/1757-899X/262/1/012055)
9. Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, and G. Meng. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method // Applied Acoustics, 2013, vol. 74, no. 3, pp. 425 – 439.
10. Y. Qu, H. Hua, and G. Meng. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 307 – 321.
11. Y. Xing, B. Liu, and T. Xu. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences, 2013, vol. 75, pp. 178 – 188.
12. M. Chen, K. Xie, W. Jia, and K. Xu. Free and forced vibration of ring-stiffened conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions // Ocean Engineering, 2015, vol. 108, pp. 241 – 256.
13. H. Li, M. Zhu, Z. Xu, Z. Wang, and B. Wen. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary // Shock and Vibration, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4709257>
14. Foster N., Fernández–Galiano L. Norman Foster in the 21st Century, Monografías, Artes Gráficas Palermo, 2014, 328 p.
15. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2016, vol. 9, pp. 93 – 104.

16. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.

17. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58524>

18. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=46621>

19. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11th Students' Science Conference «Future Information technology solutions», Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61 – 66.

20. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>

21. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>

# **Modeling vibrations of a thin-walled cylindrical shell under uniform temperature impact at a variation formulation of the problem**

**Sysoev O.E.\*, Dobryshkin A.Y.\*\*\*, Sysoev E.O\*. Zhuravleva E.V.\*\*\***

*Komsomolsk-na-Amure State University,*

*27, Lenina str., Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russia*

*\*e-mail: [fks@knastu.ru](mailto:fks@knastu.ru)*

*\*\*e-mail: [wwwartem21@mail.ru](mailto:wwwartem21@mail.ru)*

*\*\*\*e-mail: [diana@knastu.ru](mailto:diana@knastu.ru)*

## **Abstract**

The purpose of the article consists in verifying mathematical model of thin-walled cylindrical shell vibrations under the impact of the uniform temperature based on variation formulation, and employing various methods, including the experimental one.

The state-of-the-art construction often employs expressive and cost-effective shapes of buildings and structures in the form of thin-walled cylindrical shells. These buildings herewith are being exposed to temperature impacts and external forces action, leading to technogenic accidents. To avoid these accidents, frequency response of buildings and structures should be computed. Dynamic temperature variations of the shell lead to the elastic modulus of buildings changing, which affects the frequency response dynamics. The existing vibration analysis models for thin-walled cylindrical shells do not fully account for this fact, thus, improved analytical models development is required with confirmation of the high quality of the developed model. Experimental verification is one of the most common methods of mathematical models proofing. The new theoretical basis parameters are being verified with a realistic scaled-down model of the structure, and comparison of experimental and theoretical data is being performed.

The article presents a new design model for thin-walled cylindrical structures vibrations being exposed to the uniform heating, based on variation formulation. The obtained design model has been verified by experiment, and its application range has been determined.

The new verified mathematical model can be used for performing structural analysis, in design bureaus conducting vibration analysis for cylindrical shells.

Comparison of experimental and theoretical results of was performed. Convergence of the results is less than 5%. It was demonstrated also that the experimental data revealed a discrepancy with the results obtained while vibrations computing of the open cylindrical shells by the well-known mathematical model.

**Keywords:** thin-walled cylindrical shell, forced vibrations, design model, experimental research, variation formulation of the problem.

### References

1. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* (General theory of shells and its application in technology), Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1949, 784 p.
2. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Krasnopol'skaya T.S. *Nelineinoe vzaimodeistvie form izgibnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek* (Nonlinear interaction of cylindrical shells bending vibrations shapes), Kiev, Naukova dumka, 1984, 220 p.
3. Antuf'ev B.A. *Kolebaniya neodnorodnykh tonkostennykh konstruksii* (Vibrations of inhomogeneous thin-walled structures), Moscow, Izd-vo MAI, 2011, 176 p.

4. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein Sit Naing. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
5. Z. Wang, Q. Han, D.H. Nash, P. Liu. Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell, *Thin-Walled Structures*, 2017, no. 119, pp. 438 – 446. DOI: 10.1016/j.tws.2017.07.002
6. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu., Nyein Sitt Naing, Baenkhaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell, *Materials Science Forum*, 2019, vol. 945, pp. 885 – 892. DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885)
7. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten, *Journal of Heilongjiang university of science and technology*, 2018, vol. 28, no. 1, pp.75 - 78.
8. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu., Nyein Sitt Naing. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved plate carried to the associated masses system, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 262. DOI: [10.1088/1757-899X/262/1/012055](https://doi.org/10.1088/1757-899X/262/1/012055)
9. Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, and G. Meng. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method, *Applied Acoustics*, 2013, vol. 74, no. 3, pp. 425 - 439.
10. Y. Qu, H. Hua, and G. Meng. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries, *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 307 – 321.

11. Y. Xing, B. Liu, and T. Xu. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 75, pp. 178 – 188.
12. M. Chen, K. Xie, W. Jia, and K. Xu. Free and forced vibration of ring-stiffened conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions, *Ocean Engineering*, 2015, vol. 108, pp. 241 – 256.
13. H. Li, M. Zhu, Z. Xu, Z. Wang, and B. Wen. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary, *Shock and Vibration*, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4709257>
14. Foster N., Fernández–Galiano L. *Norman Foster in the 21st Century*, Monografías, Artes Gráficas Palermo, 2014, 328 p.
15. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2016, vol. 9, pp. 93 – 104.
16. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. *Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models*, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.
17. Belostochnyi G.N., Myl'tsina O.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58524>
18. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V., Medvedskii A.L. *Trudy MAI*, 2013, no. 71. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=46621>
19. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field, *11th Students' Science Conference "Future Information technology solutions"*, Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61 – 66.

20. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58589>
21. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>