

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ.**

П.В.Казмерчук

*Рассматривается методика оптимизации траекторий перелета, включающих в себя множественные гравиманевры космических аппаратов, оснащенных солнечным парусом. Предлагаемая методика базируется на идеях оптимизации составных динамических систем методом последовательной линеаризации и позволяет сформировать общий подход к решению задач оптимизации межпланетных миссий с использованием солнечного паруса. С помощью предложенной методики решаются задачи оптимизации траекторий перелета к Меркурию и в окрестность Солнца на базе дешевого конверсионного РН «Днепр».*

### **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время ведущие мировые космические державы проводят активные разработки в области проектирования миссий к планетам солнечной системы. Специфика решения таких задач состоит в выборе оптимальных, в смысле предъявляемых требований к экспедиции, ракетно-космического комплекса и траектории перелета. В силу высокой энергоемкости, реализация таких проектов требует применения тяжелых и дорогих ракетно-космических комплексов, оснащенных двигателями на химической тяге.

Перспективным направлением на пути снижения стоимости миссий к планетам видится применение новых физических принципов движения в космосе, одним из которых является создание космических аппаратов с солнечным парусом. При достаточно больших поверхностях паруса, давление солнечной радиации способно влиять на траекторию движения такого космического аппарата. В сочетании с гравитационными маневрами у планет применение солнечного паруса может дать существенную экономию энергетических затрат и тем самым повысить научную эффективность миссии или может позволить заменить ракетно-космический комплекс на менее мощный, но более дешевый.

Еще одним перспективным направлением применения солнечного паруса является его использование в качестве двигательной установки для т.н. малых аппаратов, масса которых составляет единицы и десятки килограмм. Появление таких аппаратов связано с миниатюризацией элементной базы оборудования и научных приборов. В этом случае использование движителей на химической тяге или ЭРДУ ограничено их минимально-возможной массой, которая в зависимости от задач экспедиции может в разы, а то и на порядки превосходить массу самого аппарата. В результате резко снижается научная эффективность миссии. Фактически осуществляется доставка двигательной установки к месту проведения исследований, а не полезной нагрузки. Масса же солнечного паруса определяется его площадью и зависит от выбора требуемого уровня тяги (который является оптимизационным параметром) и ограничений, накладываемых на массу всего КА ракетно-космическим комплексом.

Применение в качестве движителя малой тяги солнечного паруса и многократных гравитационных маневров вызывает значительные трудности при оптимизации траекторий традиционными методами. В частности, наличие множественных гравитационных маневров и ограничения, накладываемые на ориентацию солнечного паруса относительно потока солнечного излучения, создают проблемы при решении «сквозной» краевой задачи, учитывающей все участки перелета.

Таким образом, возникает задача построения методики, для оптимизации широкого класса миссий, в которых в качестве двигательной установки используется солнечный парус.

## **1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ**

Анализируя специфику КА с солнечным парусом (КАСП) можно видеть, что одним из ключевых факторов при использовании КАСП в качестве транспортного средства является время перелета, которое из-за малости тяги может быть довольно велико. Выбор в качестве критерия предпочтения максимальной массы полезной нагрузки нецелесообразен, он не может отражать эффективность КАСП как транспортного средства, т.к. в процессе полета масса не изменяется и конечная масса зависит только от выбора ракетного комплекса. Поэтому представляется возможным в качестве критерия предпочтения выбрать минимальное время перелета к месту назначения, а массу полезной нагрузки зафиксировать выбором ракеты-носителя и типа разгонного блока. Ограничение на время перелета не накладывается, т.к. при достаточно жестких ограничениях задача может не иметь решений.

Таким образом, задача оптимизации перелета КА с солнечным парусом, траектория которого включает участки проведения гравиманевров, может быть сформулирована следующим образом:

Определить такую программу ориентации солнечного паруса относительно потока солнечного излучения, параметры и даты проведения гравиманевров, которые обеспечивают минимальное время перелета к месту назначения.

Основным инструментом для математического решения сформулированной технической задачи является расширенная модель движения КА с солнечным парусом, которая представляет собой последовательность межпланетных участков, стыкуемых между собой.

При моделировании межпланетных участков траекторий космических аппаратов с солнечным парусом для проектных расчетов достаточной точностью обладает модель, использующая следующие допущения:

- учитываются только силы центрального притягивающего тела и тяга создаваемая солнечным парусом (СП);
- все силы считаются детерминированными (система управления КА работает идеально);
- маневры, производимые с помощью СП, моделируются как непрерывное воздействие на траекторию;
- размеры сфер действия планет считаются нулевыми (метод точечных сфер действия), их пролет происходит мгновенно, а вектор скорости КА во время гравиманевра меняется скачкообразно.

Для моделирования движения КАСП на межпланетных участках используется гелиоцентрическая инерциальная система координат. Модель движения центра масс КА с солнечным парусом в проекции на оси гелиоцентрической не вращающейся системы координат записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \chi \mathbf{V}; \\ \dot{\mathbf{V}} &= \chi \left( -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{p(r, \gamma)}{m} \mathbf{e}(\alpha, \beta) \right); \\ \dot{t} &= \chi; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где,

$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  – радиус-вектор;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – длина радиус-вектора;  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)^T$  –

вектор скорости;  $t$  – время перелета;  $m$  – масса КА;  $\chi = \frac{r^2}{|\mathbf{r} \times \mathbf{V}|}$  – производная по времени угловой дальности;  $\mu$  – гравитационный параметр Солнца;  $p(r, \gamma)$  – величина тяги, создаваемой солнечным парусом, зависящая от расстояния до Солнца и от ориентации СП относительно потока солнечного излучения,  $\gamma$  – угол между векторами  $\mathbf{i}$  (вектор направления солнечного излучения)

и  $\mathbf{e}$  (вектор тяги солнечного паруса);  $\mathbf{e}(\alpha, \beta)$  – единичный вектор направления тяги, зависящий от углов  $\alpha, \beta$ , определяющих его пространственную ориентацию относительно вектора скорости КА (Рис. 1–1), который может быть определен из следующих соотношений:

$$\mathbf{e}' = \cos \alpha \cdot \mathbf{x}' - \sin \alpha \cdot \mathbf{y}'$$

$$\mathbf{e} = \cos \beta \cdot \mathbf{e}' - \sin \beta \cdot \mathbf{z}'$$

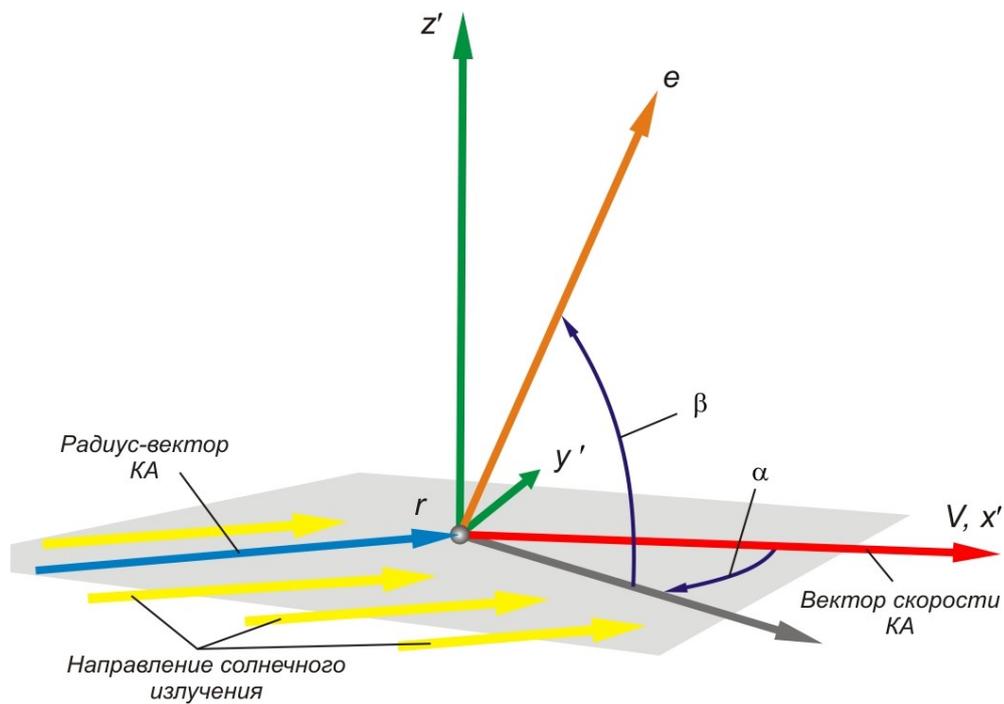


Рис. 1–1. Определение направления тяги, создаваемой солнечным парусом.

Величина тяги, создаваемой солнечным парусом в общем случае зависит от площади паруса, свойств материала, ориентации относительно потока солнечного излучения, расстояния до Солнца. Эту зависимость можно представить в следующем виде:

$$p(r, \gamma) = P_{\alpha} \left( \frac{R_{\varepsilon}}{r} \right)^2 S \cos^2 \gamma \quad (1.2)$$

или

$$p(r, \gamma) = P_{\alpha} \left( \frac{R_{\varepsilon}}{r} \right)^2 S (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})^2 \quad (1.3)$$

Где,  $P_{\alpha} \approx 0.464 \cdot 10^{-6} \left( \frac{R_{\varepsilon}}{r} \right)^2 (1 + \varepsilon) \frac{\kappa \Gamma}{M^2}$ ;  $\varepsilon$  – коэффициент отражения паруса;

$R_{\varepsilon} = 1.495 \cdot 10^{11}$  м. – средний радиус орбиты Земли;  $S$  – площадь поверхности паруса;  $r$  – текущее расстояние до Солнца;  $\mathbf{i} = |\mathbf{r}|_E$  – единичный вектор направления солнечного излучения;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор нормали к теневой стороне паруса; Моделирование гравитационных маневров (ГМ) КА с солнечным парусом ничем не отличается от моделирования ГМ для классических аппаратов. Согласно гипотезе о точечных сферах действия планет, считается, что гравитационные маневры КА происходят мгновенно. В результате в точке проведения гравитационного маневра, совпадающей с центром планеты проведения маневра, скачкообразно меняются параметры гелиоцентрических участков межпланетной траектории полета КА.

Пусть траектория межпланетного полета КА с солнечным парусом в самом общем случае состоит из  $N$  участков. И пусть на каждом  $i$ -м участке полета его траекторное движение описывается  $i$ -ой динамической системой (ДС) вида:

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt^i} = \mathbf{f}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i), \quad t^i \in [t_0^i, t_k^i] \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.4)$$

где:

$\mathbf{x}^i(t^i) \in E_{n_i}$  – вектор фазовых переменных, характеризующий текущее состояние КА на  $i$ -м участке полета;

$\mathbf{f}^i - n_i$  - мерная функция правых частей дифференциальных уравнений, которая считается дифференцируемой по своим аргументам столько раз, сколько потребуется;

$\mathbf{u}^i(t^i) \in \mathbf{U}^i(t^i) - r_i$  - мерная кусочно-непрерывная функция управления;

$\mathbf{U}^i(t^i) \subset E_{r_i}$  – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций управления;

$\mathbf{p}^i \in \mathbf{P}^i$  – варьируемые параметры, влияющие на  $i$ -й участок полета КА;

$\mathbf{P}^i \subset E_{s_i}$  – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций параметров;

$\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$  – варьируемые параметры, влияющие на все участки траектории;

$\mathbf{Q} \subset E_s$  – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций общих параметров;

$t^i$  – независимая переменная.

Моменты времени  $t_k^i$  окончания полета КА на каждом  $i$ -м участке траектории определяются из условий:

$$\mu^i[\mathbf{x}^i(t_k), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k] = 0, \quad i = 1, \dots, N;$$

(1.5)

где:

$\mu^i$  – скалярные функции, обладающие необходимой степенью гладкости.

В самом общем случае в моменты времени  $t_k^i, \quad i = 1, \dots, N$  происходят преобразования векторов фазового состояния КА при переходе от одной ДС к другой, моделирующих движение КА на соответствующих этапах:

$$\mathbf{x}^{i+1}(t_0^{i+1}) = \Phi^i[\mathbf{x}^i(t_k^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k^i], \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.6)$$

где:

$\Phi^i - n_{i+1}$  - мерная вектор-функция, обладающая необходимой степенью гладкости.

В эти же моменты могут изменяться независимые переменные:

$$t_0^{i+1} = \tau^i[\mathbf{x}^i(t_k^i), \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_k^i], \quad i = 1, \dots, N - 1; \quad (1.7)$$

где:

$\tau^i$  – скалярная функция необходимой гладкости.

Начальные условия межпланетного перелета представляются в виде:

$$\mathbf{x}^1(t_0^1) = \Phi^0(t_0^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}); \quad (1.8)$$

где:  $\Phi^0 - n_1$  - мерная дифференцируемая вектор-функция;

$\mathbf{p}^0 \in \mathbf{P}^0$  – варьируемые параметры;

$\mathbf{P}^0 \subset E_{s_0}$  – ограниченная замкнутая область допустимых вариаций параметров;

$t_0^1 \in [t_0^-, t_0^+]$  – варьируемый момент начала полета КА.

В дальнейшем для рассматриваемых факторов влияния: функций управления и проектно-баллистических параметров траектории КА, варьируемых на каждом  $i$ -м участке траектории используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\cdot) &= \left\{ \mathbf{u}^i(\cdot); \quad i = 1, \dots, N \right\}, \\
\mathbf{p} &= \left\{ \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t_0^1; \quad i = 0, \dots, N \right\}, \\
\mathbf{p} \in \mathbf{P} &\Leftrightarrow \left\{ \mathbf{p}^i \in \mathbf{P}^i, \quad i = 0, \dots, N; \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}; \quad t_0^1 \in [t_0^-, t_0^+] \right\}, \\
\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U} &\Leftrightarrow \left\{ \mathbf{u}^i(t^i) \in \mathbf{U}^i(t^i), \quad \forall t^i \in [t_0^i, t_k^i] \quad i = 1, \dots, N \right\}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

С учетом разбиения траектории межпланетного перелета на участки критерий качества управления динамической системой и ограничения могут быть записаны в следующем виде:

$$J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] = \sum_{i=1}^{N_j} \int_{t_0^i}^{t_k^i} \Phi_j^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^i, \mathbf{q}, t^i) dt^i + F_j \left[ \mathbf{x}^{N_j}(t_k^{N_j}), \mathbf{p}^{N_j}, \mathbf{q}, t_k^{N_j} \right] \quad j = 0, \dots, m; \tag{1.10}$$

где:

$\Phi_j^i$  и  $F_j$  – гладкие скалярные функции;  $N_j \leq N$  – номер участка полета, на конце которого вычисляется терминальная часть  $J$  - го функционала.

Таким образом, в рамках этапа межпланетного полета может быть сформулирована следующая обобщенная оптимизационная задача с учетом разбиения траектории перелета на ряд участков:

Определить такие  $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$  и  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$  (используются обозначения (1.9)), которые при условии выполнения соотношений (1.4)÷(1.8) обеспечат минимум совокупного функционала

$J_\Sigma$ , который в общем виде будет выглядеть как (1.11), то есть:

$$\begin{aligned}
J_\Sigma[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] &\rightarrow \min \\
\mathbf{u}(\cdot) &\in \mathbf{U} \\
\mathbf{p} &\in \mathbf{P}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

а также выполнение условий:

$$\begin{aligned}
J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] &= 0, \quad j = 1, \dots, m_1; \\
J_j[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}] &\leq 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m, \quad m_1 \leq m;
\end{aligned}$$

(1.12)

где  $J_j$  – функционалы вида (1.10), учитывающие разделение траектории на участки.

Таким образом, задача оптимизации межпланетных перелетов КА с солнечным парусом ставится как задача оптимизации составной динамической системы. Основным отличием ее от известных постановок является наличие варьируемых параметров  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$  перехода от одного участка траектории к другому.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Рассматриваемая методика оптимизации сложных межпланетных траекторий аппаратов с солнечным парусом, допускает при их моделировании разбиение на ограниченный ряд стыкуемых между собой участков. Задача оптимизации траектории КА с солнечным парусом ставится как задача оптимизации составной динамической системы [1].

Сформулированная выше задача условной оптимизации составной динамической системы включает, кроме критерия оптимальности (1.11), ряд функциональных ограничений (1.12), для учета которых используется приближенный численный метод оптимизации – «Метод последовательной линеаризации», разработанный Р.П. Федоренко [2].

Суть метода заключается в сведении задачи условной оптимизации управления к итерационно решаемой задаче линейного программирования путем последовательной линеаризации всех функционалов (критерия и ограничений) по кусочно-постоянным аппроксимациям управления в окрестности итерационно улучшаемых траектории и управления.

В рассматриваемом случае идея метода последовательной линеаризации остается неизменной, однако в связи с его применением к оптимизации составных динамических систем потребовалось развитие методики вычисления производных Фреше, а также применение приема регуляризации для вырожденных случаев задачи линейного программирования [1]. Алгоритм метода последовательной линеаризации можно представить в следующем виде:

Пусть имеются некоторые допустимые значения варьируемых параметров  $\mathbf{P}$  и реализаций управлений  $\mathbf{u}(\cdot)$ . И пусть им соответствует некоторая траектория  $\mathbf{x}(\cdot)$  и значения функционалов  $\{J_j\}$ .

При малых вариациях  $\delta\mathbf{p}$  и  $\delta\mathbf{u}(\cdot)$  изменения функционалов могут быть представлены в линейном приближении [2]:

$$\delta J_j = \mathbf{\Pi}_j \delta \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{N_j} \int_{t_0^i}^{t_k^i} \boldsymbol{\omega}_j^i(s) \delta \mathbf{u}^i(s) ds, \quad j = \Sigma; 1, \dots, m; \quad (2.13)$$

где:

$\mathbf{\Pi}_j$  – матрицы, составленные из производных функционалов по управляемым параметрам  $\mathbf{P}$ ;

$\boldsymbol{\omega}_j^i(\cdot)$  – функции (производные Фреше), вычисляемые на основе итерационно улучшаемой реализации траектории  $\mathbf{x}(\cdot)$ , соответствующей управлению  $\mathbf{u}(\cdot)$ .

Производится конечномерная аппроксимация задачи путем замены кусочно-непрерывного управления  $\mathbf{u}(\cdot)$  на близкую к нему кусочно-постоянную функцию. Для этого:

- каждый из участков траектории движения составной ДС –  $[t_0^i, t_k^i]$  разбивается на достаточно большое число  $K_i - 1$  подинтервалов с крайними точками:  
 $t_0^i = t_1^i < t_2^i < \dots < t_{K_i}^i = t_k^i$ ;
- на каждом  $\mathcal{G}$ -м подинтервале непрерывное управление считается постоянным и

$$\text{равным значению } \mathbf{u}_g^i \text{ (например } \mathbf{u}_g^i = \mathbf{u}^i \left[ \frac{(t_g^i + t_{g+1}^i)}{2} \right]);$$

Численно моделируется управляемое движение системы (1.4)÷(1.8) для некоторых  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ ,

$\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$  и рассчитываются значения функционалов:  $\left\{ \int_{\Sigma} J \right\}$  (1.11) и  $\left\{ \mathcal{J}_j \right\}$  (1.12).

В процессе моделирования производные Фреше –  $\boldsymbol{\omega}_j^i(\cdot)$  вычисляются и запоминаются в

$$\text{виде таблицы: } \left\{ \boldsymbol{\omega}_{jg}^i = \int_{t_g^i}^{t_{g+1}^i} \boldsymbol{\omega}_j^i(s) ds \right\};$$

Рассчитываются производные  $\mathbf{\Pi}_j$  и  $\boldsymbol{\omega}_j^i(\cdot)$  для каждого из функционалов.

Формируется малая окрестность  $\{\delta \mathbf{P}, \delta \mathbf{U}_g^i\}$  параметров и управлений  $\{\mathbf{p}, \mathbf{u}_g^i\}$  такие, чтобы вариации управления, принадлежащие этой окрестности, были, во-первых, малы настолько, чтобы линейные модели вариаций функционалов достаточно точно описывали их реальные приращения,

во-вторых, достаточно велики, чтобы процесс оптимизации сходился как можно быстрее, в-третьих, не нарушались ограничения  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}$ ;

Формируется конечномерная задача линейного программирования, аппроксимирующая исходную задачу в окрестности  $\{\delta\mathbf{P}, \delta\mathbf{U}_g^i\}$ :

$$\begin{aligned} & \min_{\{\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{u}_g^i\}} \left( \mathbf{\Pi}_0 \delta\mathbf{p} + \sum_{i=1}^N \sum_{g=1}^{K_i-1} \boldsymbol{\omega}_{0g}^i \delta\mathbf{u}_g^i \right); \\ & J_j + \mathbf{\Pi}_j \delta\mathbf{p} + \sum_{i=1}^N \sum_{g=1}^{K_i-1} \boldsymbol{\omega}_{jg}^i \delta\mathbf{u}_g^i = 0 (\leq 0), \quad j = 1, \dots, m; \\ & \delta\mathbf{p} \in \delta\mathbf{P}, \quad \delta\mathbf{u}_g^i \in \delta\mathbf{U}_g^i, \quad g = 1, \dots, K_i - 1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решается задача линейного программирования ( 2 .14) (например, одним из симплекс-методов), а затем находится новое улучшенное приближение параметров и управления в виде  $\{\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{u}_g^i + \delta\mathbf{u}_g^i\}$ .

Переход к новой итерации происходит после проверки условия окончания процесса оптимизации, например, после сравнения полученного и предыдущего значений совокупного критериального функционала ( 1 .11)

$$\left| J_{\Sigma}^{l+1} - J_{\Sigma}^l \right| \leq \varepsilon_J \quad (2.15)$$

Где  $l$  – номер итерации.

## 2.1. СПЕЦИФИКА РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Как было сказано выше, задача оптимизации траектории перелета КА с солнечным парусом решается как задача условной оптимизации составной динамической системы. Ее решение основано на «Методом последовательной линеаризации Федоренко».

В общем случае оптимизации подлежат следующие факторы:

- порядок прохождения и количество планет, используемых для проведения гравиманевров;
- дата старта (выход из сферы действия Земли);

- вектор скорости КА при выведении из сферы действия Земли;
- функция направления тяги на участках перелета между планетами проведения гравиманевров;
- параметры гравиманевров.

Задача определения порядка прохождения и количества планет, используемых для проведения гравиманевров, может быть решена путем перебора и сравнения различных вариантов в смысле целевого критерия, оценивающего эффективность экспедиции. Перебор всех возможных вариантов требует огромных вычислительных затрат. Однако, часто исходя из целей экспедиции, требований к ней (например, по окнам старта) и здравого смысла оказывается возможным отбросить большинство малоперспективных вариантов.

Каждый участок траектории моделируется как участок составной динамической системы. Рассмотрим условия начала и окончания участков. Обозначим независимую переменную на  $i$ -ом участке –  $\varphi^i$ ,  $i = 1 \dots N$ ; где  $N$  – количество участков, функцию направления тяги –  $\mathbf{e}(\varphi^i)$ , независимую переменную в момент старта –  $\varphi^0$ , вектор варьируемых параметров на участке –  $\mathbf{p}^i$  и вектор варьируемых параметров начала перелета –  $\mathbf{p}^0$ .

В состав варьируемых параметров, определяющих фазовый вектор в момент старта, входят:

- дата старта;
- вектор скорости КА при выведении из сферы действия Земли.

В соответствии с методом точечных сфер действия считается, что выведение КА на межпланетную траекторию производится мгновенно. В момент старта радиус-вектор Земли равен:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}(\varphi^0) \quad (2.16)$$

Отметим, что  $\varphi^0$  по существу является отклонением даты старта от эпохи, на момент которой фиксируется гелиоцентрическая инерциальная система координат, используемая для моделирования движения на межпланетных участках.

Для определения начальной гелиоцентрической скорости КА воспользуемся вспомогательной системой координат, ось  $X'$  которой совпадает по направлению с радиус-вектором  $\mathbf{r}_e$  Земли на момент старта; ось  $Z'$  сонаправлена вектору  $\mathbf{r}_e \times \mathbf{W}_e$  (перпендикулярна плоскости орбиты Земли,  $\mathbf{W}_e$  – вектор скорости Земли на момент старта); ось  $Y'$  дополняет систему до правой. Тогда начальную гелиоцентрическую скорость КА определим по формуле:

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{W}_e + V'_x \mathbf{x}' + V'_y \mathbf{y}' + V'_z \mathbf{z}'; \quad (2.17)$$

Где,  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  – единичные орты вспомогательной системы  $X'Y'Z'$ , записанные в основной системе координат  $XYZ$

Масса КА при вылете из сферы действия Земли определяется, с одной стороны, модулем  $V' = \sqrt{V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2}$ , с другой стороны, типом разгонных средств и схемой выведения.

Таким образом, вектор варьируемых параметров начала перелета (1.8) будет иметь вид:

$$\mathbf{p}^0 = (\varphi^0, V'_x, V'_y, V'_z)^T \quad (2.18)$$

Т. к. солнечный парус может создавать тягу на протяжении всего перелета, то не существует разделения участков на активные и пассивные (все участки считаются активными). Переход от одного участка составной динамической системы к другому происходит в момент проведения гравитационного маневра.

Пусть известна независимая переменная  $\varphi^{i*}$  начала или окончания  $i$ -го участка движения, которая в дальнейшем подлежит оптимизации. Она является параметром  $\mathbf{p}^i$  в условии окончания  $i$ -го участка. Условие окончания  $i$ -го участка (1.5) примет вид:

$$\varphi - \varphi^{i*} = 0 \quad (2.19)$$

Важно отметить, что варьируемый параметр  $\varphi^{i*}$  по существу является моментом (датой) проведения гравиманевра, который определяется в процессе оптимизации.

В начале или конце участка уравнения движения и независимая переменная не меняются. Изменяется только вектор скорости КА, новое значение которого находится исходя из методики моделирования гравиманевров.

Для проведения гравиманевра необходимо обеспечить попадание в сферу действия планеты. Для этого на окончание участка накладывается следующее ограничение типа неравенств:

$$|\mathbf{r}_h| - R_{pl}^g \leq 0 \quad (2.20)$$

где,

$\mathbf{r}_h = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}$  – планетоцентрический радиус-вектор КА в момент проведения гравиманевра;  $\mathbf{r}$  – гелиоцентрический радиус-вектор КА в момент проведения гравиманевра;  $\mathbf{r}_{pl}$  – радиус-вектор планеты в момент проведения гравиманевра;  $R_{pl}^g$  – радиус сферы действия планеты.

Вектор скорости КА после гравиманевра зависит от угла между плоскостью гравиманевра и плоскостью эклиптики  $\Omega$  и радиусом перицентра гиперболической траектории облета планеты  $r_\pi$ , следовательно, их необходимо включить в число варьируемых параметров:

$$\mathbf{p}^i = (r_\pi, \Omega, \varphi^{i*})^T \quad (2.21)$$

Таким образом, в данном разделе были получены все необходимые соотношения для моделирования траектории КА с солнечным парусом, а также описан подход к оптимизации траектории КАСП как к задаче оптимизации составной динамической системы.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТОВ КА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ К МЕРКУРИЮ И В ОКРЕСТНОСТЬ СОЛНЦА

В данном разделе с помощью разработанной методики получено решение задач оптимизации перелета КА с Солнечным парусом к Меркурию и в окрестность Солнца на базе дешевого конверсионного РН “Днепр” с разгонным блоком “АКБ-1” за минимальное время. Основные характеристики РН “Днепр” и энергетические возможности по выведению полезной нагрузки с “АКБ” представлены в Табл. 3–1, Табл. 3–2.

Табл. 3–1. Основные характеристики РН “Днепр”

Параметры	Значения
Стартовая масса	211 т
Компоненты топлива	амил + гептил
Количество ступеней	3
Точность выведения:	
по высоте орбиты	$\pm 4,0$ км
по наклонению орбиты	$\pm 0,04$ град.
по прямому восхождению восходящего узла	$\pm 0,05$ град.
Наклонение плоскостей орбит	50,5; 64,5; 87,3; 98,0 град.
Полетная надежность	0,97
Ориентировочная стоимость	~15 млн. \$

Табл. 3–2. Энергетические характеристики РН “Днепр” с АКБ

Параметры	Тип АКБ	Масса ПН, кг.
На отлетную траекторию	АКБ-1	450
На орбиту вокруг Марса	АКБ-1	220
На геостационарную орбиту	АКБ-1	300
На траекторию полета к Луне	АКБ-2	750
На орбиту вокруг Луны	АКБ-1	400
На круговую орбиту 600 км с накл. 12-17 град.	АКБ-1	200-320
В точку либрации системы «Солнце - Земля»	АКБ-1	620
В точку либрации системы «Земля - Луна»	АКБ-1	430
На высокоэллиптическую орбиту с апогеем 40000 км.	АКБ-2	700

За основу для проведения расчетов был взят аппарат с солнечным парусом, разработанный в НПО им. С.А. Лавочкина со следующими характеристиками:

Параметры	Значения
<b>КА с солнечным парусом:</b>	<b>248 кг.</b>
Орбитальная платформа	50 кг.
Блок парусов	158 кг.
Площадь паруса	6380 м <sup>2</sup>
Длина лепестка	45.3 м.
Максимальная тяга паруса на орбите Земли	0.00586 Н.
<b>Полезная нагрузка</b>	<b>40 кг.</b>
<b>Разгонная двигательная установка:</b>	<b>200 кг.</b>
Сухая масса	40 кг.
Масса топлива	160 кг.
Удельный импульс	286 с.
<b>Суммарная масса аппарата</b>	<b>448 кг.</b>

### 3.1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТА К МЕРКУРИЮ

Решение задачи оптимизации траектории перелета к Меркурию КАСП как задачи оптимизации составной динамической системы предполагает разделение траектории на участки. При наличии единственного гравиманевра у Венеры траектория делится на два участка:

- Перелет Земля – Венера (участок 1–2)
- Перелет Венера – Меркурий (участок 2 – 3) см. *Рис. 3 – 2.*

Эти два участка стыкуются в момент проведения гравиманевра у Венеры. Движение КАСП на межпланетных участках моделируется с помощью динамической системы (1.1). Составная динамическая система с учетом принятых ранее допущений будет непрерывна по координатам и имеет разрыв первого рода (скачок) по скорости (в момент проведения гравиманевра). Орбиты планет считаются круговыми, лежащими в плоскости эклиптики.

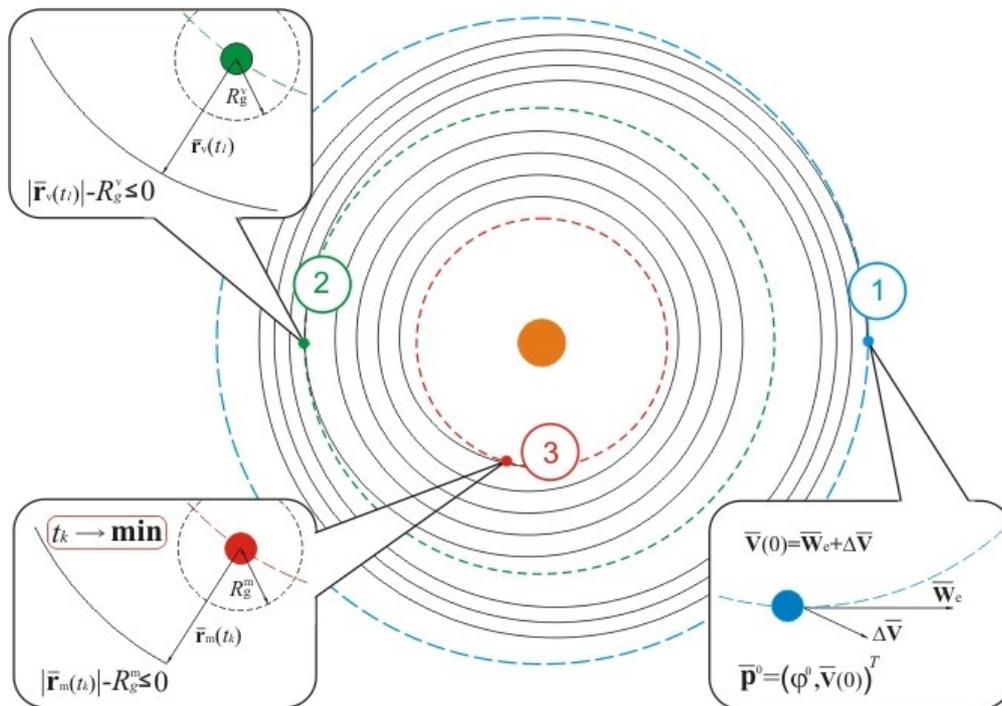


Рис. 3–2. Схема перелета к Меркурию с гравиманевром у Венеры

РН «Днепр» с АКБ-1 выводят КАСП с разгонным блоком на отлетную траекторию с нулевым гиперболическим избытком. После отделения от АКБ-1 включается разгонный блок. В результате решения поставленной задачи получена траектория, представленная на Рис. 3 –3., обеспечивающая минимальное время перелета.

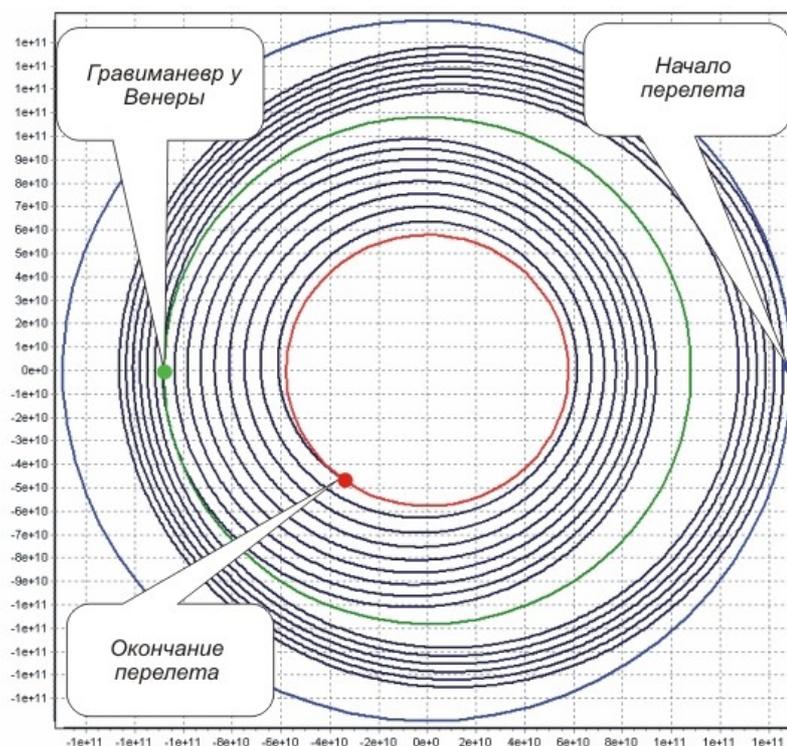


Рис. 3–3. Траектория перелета к Меркурию КАСП с гравиманевром у Венеры

Продолжительность перелета составила 8.537 лет. Значения вектора управляемых параметров  $\mathbf{p} = (p^0, p^1, p^2)^T$  представлены в Табл. 3–3.

Табл. 3–3. Вектор управляемых параметров

Параметры	Значения
Угловая дальность начала перелета $p^0$	0 град.
Угловая дальность проведения гравиманевра $p^1$	2337.66 град.
Угловая дальность окончания перелета $p^2$	5276.94 град.

Полученная оптимальная программа управления солнечным парусом представлена на Рис. 3–4.

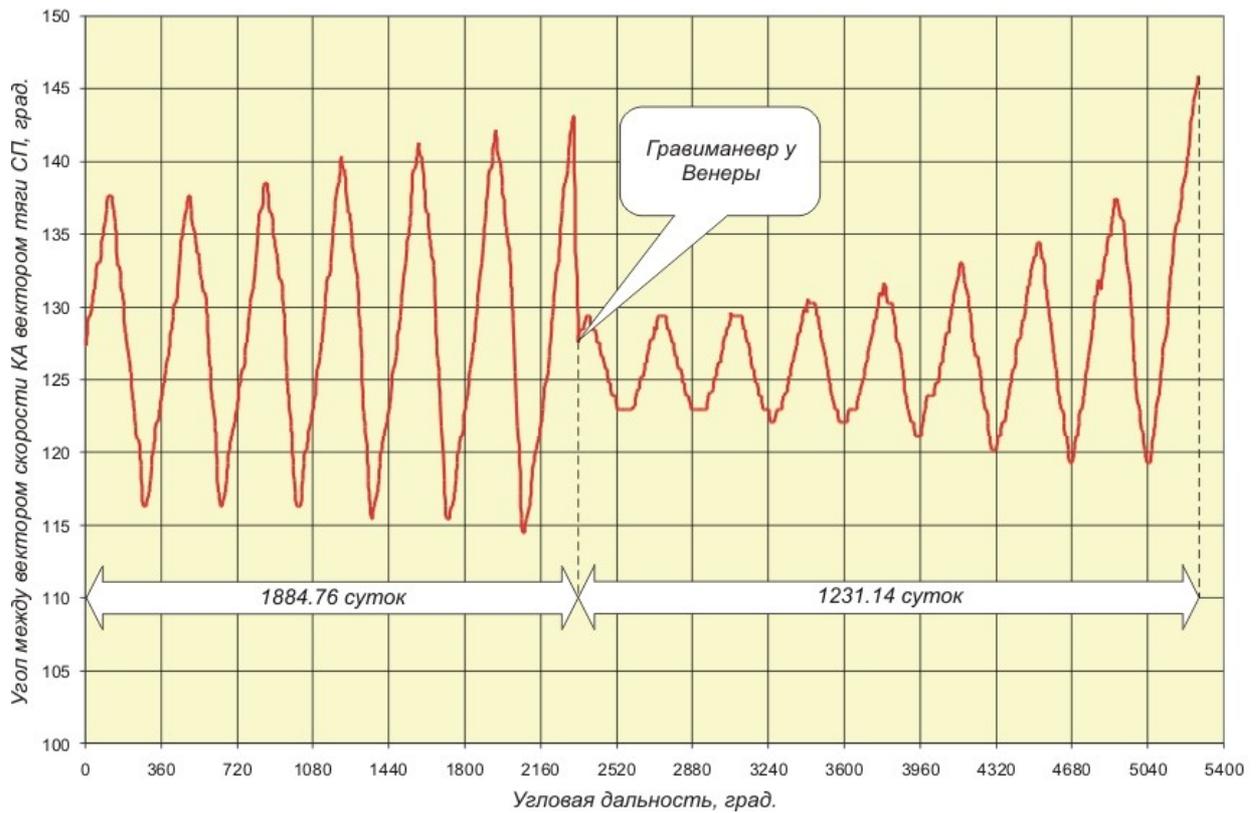


Рис. 3–4. Зависимость угла между вектором скорости КА и вектором тяги СП от угловой дальности

Типовой виток и ориентация вектора тяги солнечного паруса относительно направления солнечного излучения в некоторых точках траектории представлена на Рис. 3–5.

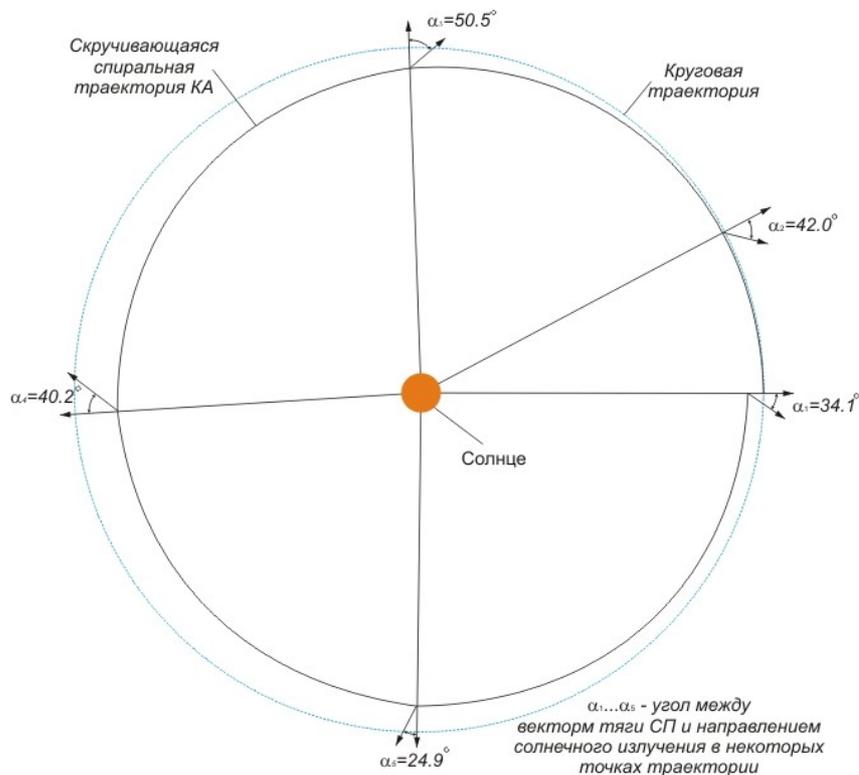


Рис. 3–5. Типовой виток траектории аппарата с солнечным парусом

### 3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТА В ОКРЕСТНОСТЬ СОЛНЦА

Исходными данными для данной задачи, как и в предыдущей, является РКК на базе РН «Днепр» с автономным космическим буксиром и космический аппарат с солнечным парусом с такими же характеристиками. Конечной целью перелета является окрестность равная 30 радиусам Солнца. Расстояние равное 30 радиусам Солнца выбрано по той причине, что оно является максимально возможным для эффективного проведения прямых исследований Солнца.

При выборе схемы перелета были проанализированы траектории перелета в окрестность Солнца на базе различных РКК с применением химических двигательных установок и ЭРДУ. Принципиально все траектории могут быть разбиты на два класса:

- Траектории перелета к Солнцу через Юпитер (с возможностью вылета из плоскости эклиптики);
- Траектории перелета к Солнцу с гравиманеврами у планет земной группы (Земля, Венера, Меркурий)

Траектории первого класса характерны разгоном (с гравиманеврами или без) КА для выхода на траекторию, позволяющую достичь Юпитера проведение гравитационного маневра, у которого очень эффективно из-за сильного гравитационного поля. Траектории второго класса характерны наличием множественных гравитационных маневров у Земли, Венеры и Меркурия.

В процессе решения задачи выяснилось, что для данного вида РКК с космического аппарата с солнечным парусом данной площади схема перелета к Солнцу через Юпитер является неэффективной в смысле выбранного критерия (времени перелета). Это объясняется низкими энергетическими возможностями используемого РКК и быстрым снижением эффективности солнечного паруса при удалении от Солнца. Поэтому была выбрана схема с гравиманеврами у Венеры и Меркурия. Отсутствие гравиманевра у Земли объясняется тем, что для данного РКК реализуемы траектории, которые характерны низкой асимптотической скоростью отлета (порядка 1.2 км/с). Таким образом, на первом полувитке невозможно достичь Венеры для проведения эффективного гравиманевра, позволяющего вернуться на орбиту Земли для проведения гравиманевра. После же торможения в течение нескольких витков с помощью паруса траектория КА пересекается с орбитой Венеры под небольшим углом и как следствие гравиманевр с низкой эффективностью, не позволяющий вернуться на орбиту Земли. Откладывание проведения гравиманевра у Венеры на несколько витков, не дает значительного выигрыша в эффективности гравиманевра, но значительно увеличивает время экспедиции.

Таким образом, после анализа всех факторов влияния была выбрана схема, повторяющая схему перелета к Меркурию и добавлен дополнительный гравиманевр у самого Меркурия. Нужно заметить, что эффективность проведения гравиманевра у Меркурия очень мала из-за низкой массы последнего. С другой стороны его наличие существенно усложняет реализацию траектории из-за

повышенных требований к точности наведения для попадания в грависферу Меркурия. Поэтому целесообразность проведения такого гравиманевра нужно дополнительно исследовать.

В результате решения задачи получена траектория, представленная на Рис. 3–6

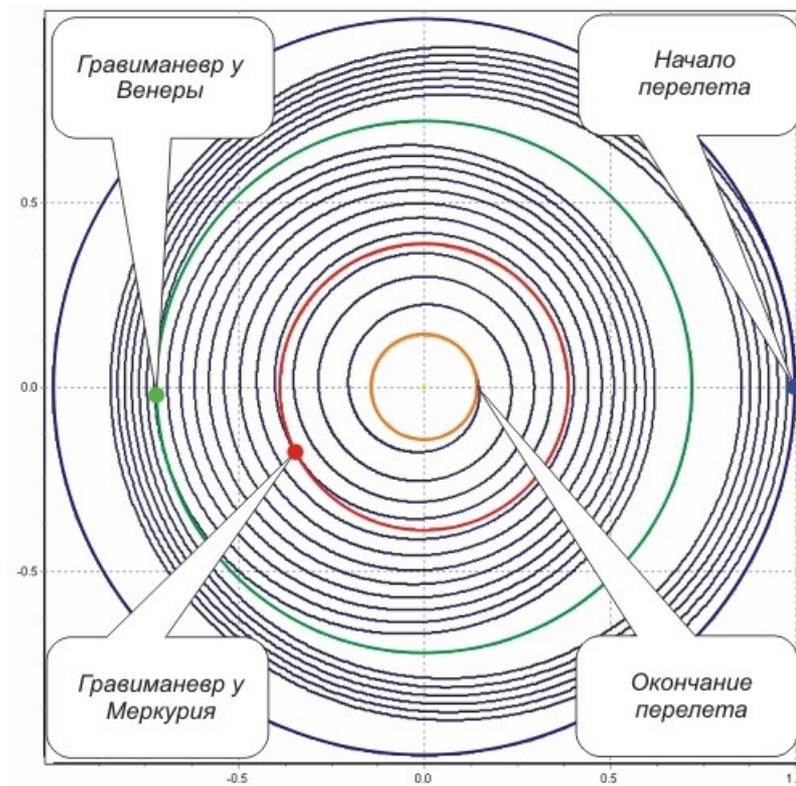


Рис. 3–6. Траектория перелета в окрестность Солнца с гравиманеврами у Венеры и Меркурия

Продолжительность перелета составила 9.214 лет. Значения вектора управляемых параметров  $\mathbf{p} = (p^0, p^1, p^2, p^3)^T$  представлены в Табл. 3–4.

Табл. 3–4. Вектор управляемых параметров

Параметры	Значения
Угловая дальность начала перелета $p^0$	0 град.
Угловая дальность проведения гравиманевра у Венеры $p^1$	2337.66 град.
Угловая дальность проведения гравиманевра у Меркурия $p^2$	5276.94 град.
Угловая дальность окончания перелета $p^3$	6497.82 град.

Полученная оптимальная программа управления солнечным парусом представлена на Рис.

3–7

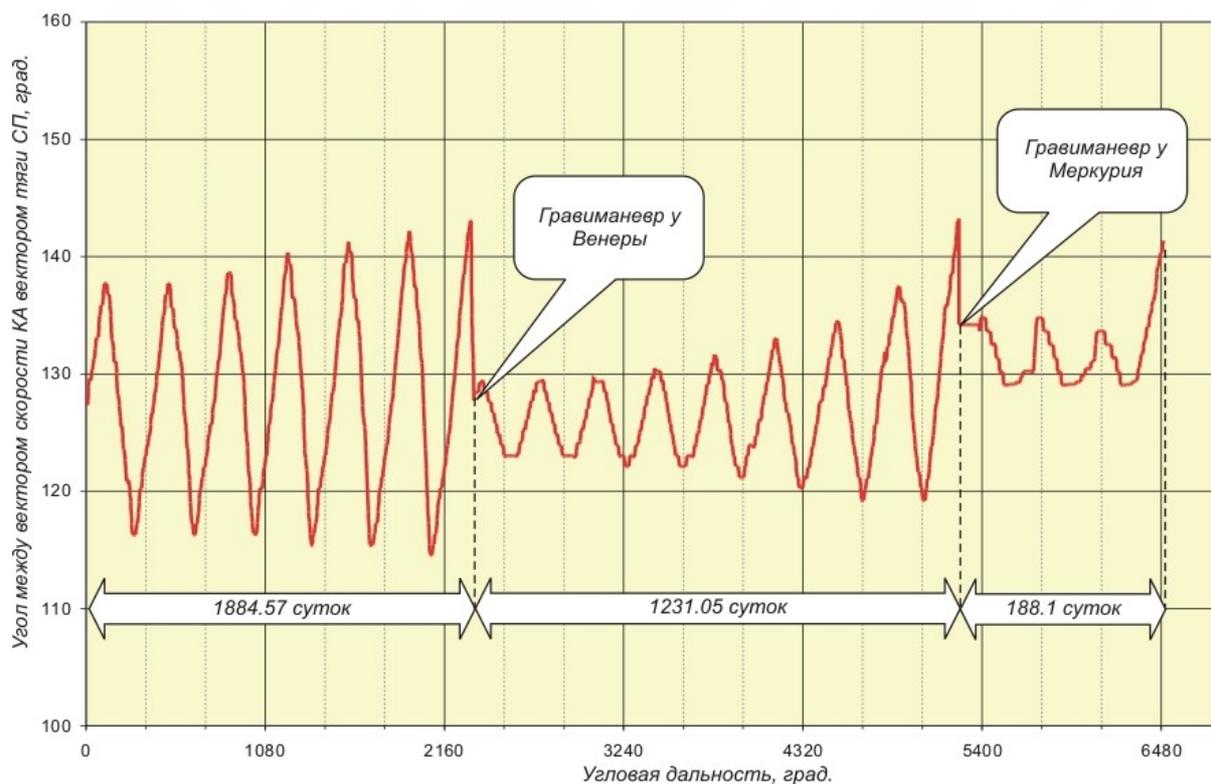


Рис. 3–7. Зависимость угла между вектором скорости КА и вектором тяги СП от угловой дальности

В заключении было проведено моделирование траектории перелета КА с солнечным парусом в окрестность Солнца с использованием известного локально-оптимального решения для солнечного паруса. Оно заключается в выборе такой ориентации солнечного паруса относительно потока солнечного излучения, которая обеспечивает максимальную (отрицательную в данном случае, т.к. происходит торможение КА) величину проекции тяги СП на вектор скорости. В результате время перелета увеличилось на 152 суток. Таким образом, использование предложенной методики по сравнению с локально-оптимальным подходом дало сокращение времени перелета на 5 месяцев.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход к оптимизации межпланетных перелетов, включающих участки проведения гравиманевров, аппаратов с солнечным парусом, основанный на применении метода последовательной линеаризации, который позволяет:

- решать задачи оптимизации межпланетных перелетов с солнечным парусом;
- решать задачи оптимизации траекторий с наличием множественных гравиманевров, количество которых не ограничено;
- учитывать произвольное количество ограничений (типа равенств и неравенств), накладываемых на любые участки перелета;

- проводить «сквозную» оптимизацию всей миссии в целом;
- проводить оптимизацию моментов (дат) проведения гравитационных маневров;

Ядром методики является метод последовательной линеаризации, с помощью которой исходная задача сводится на каждой итерации к задаче линейного программирования, имеющая в отличие от нелинейных численных методов оптимизации гарантированную сходимость.

С использованием методики решены задачи оптимизации миссий к Меркурию и в окрестность Солнца на базе дешевого ракеты-носителя «Днепр». Получены траектории КА с солнечным парусом, включающие участки проведения гравиманевров, обеспечивающие минимальное время перелета. Проведено сравнение результатов оптимизации траектории в окрестность Солнца, полученных с помощью данной методики и при использовании локально-оптимального подхода. Применение предложенной методики позволило сократить время перелета на 5 месяцев.

Для решения задач оптимизации миссий космических аппаратов с солнечным парусом разработано программно-алгоритмическое обеспечение, представляющее собой объектно-ориентированную библиотеку на языке C++. Гибкая архитектура библиотеки позволяет легко адаптировать ее для решения широкого класса задач оптимизации космических перелетов не только аппаратов с солнечным парусом, но и КА, оснащенных ЭРДУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Усачов В.Е., Тычинский Ю.Д.* Оптимизация составных динамических систем. Полет солнечного зонда с электрореактивными двигателями и гравитационными маневрами у планет. Деп. в ВИНТИ № 1967-В99, 17.06.1999 г.- 62 с.
2. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978.- 488 с.
3. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. Наука, М., 1975. – 704 с.
4. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика летательных аппаратов. Наука, М., 1982.- 351 с.
5. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. - 447с.
6. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов. -М.: Наука, 1976. -744 с.
7. *Рыжов Ю.А., Мальшев В.В., Усачов В.Е.* и др. Российско-американский космический комплекс «Пламя» для первых прямых исследований ближайшего околосолнечного пространства и Солнца. // Вестник МАИ. 1996. Т.3. № 2 с. 3–23.

8. Рыжов Ю.А., Малышев В.В., Усачов В.Е., Тычинский Ю.Д. и др. Анализ и синтез космического комплекса на базе РН «Союз-2» для научно-исследовательского полета в корону Солнца // Вестник МАИ, 1998, т.5, № 2. с. 3-14.
  9. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. – ДАН СССР, 1967, 176, № 4, с. 754-756.
  10. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. –М.: Наука, 1975. – 528 с.
  11. Тихонравова М. К. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Нариманова Г. С., –М.: Машиностроение, 1976. – 608 с.
- 

#### **Сведения об авторе**

*Казмерчук Павел Владимирович, аспирант кафедры системного анализа и управления Московского авиационного института (государственного технического университета)  
e-mail: moskus@mail.ru*

