

УДК 539.3

**Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по
уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и
защемленного края**

Фирсанов В.В.^{1*}, Во А.Х.^{1}, Доан Ч.Н.^{2***}**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия,*

²*Государственный технический университет им. Ле Куи Дона,
ул. Хоанг Куок Вьет, 236, Ханой, Вьетнам*

**e-mail: k906@mai.ru*

***e-mail: anhhieu1512@gmail.com*

****e-mail: ngocdoanmai@gmail.com*

Аннотация

В данной работе рассматривается локальное напряженное состояние подкрепленных цилиндрических оболочек на краю и в местах креплений ребер. Расчет проведен по уточненной теории, основанной на разложении перемещений оболочки в полиномы по нормальной к срединной поверхности координате на одну степень выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява. Приведена процедура построения уравнений равновесия и граничных условий, а также метод решения сформулированной краевой задачи. Дано сравнение результатов расчета напряженного состояния в краевой зоне оболочки по классической и уточненной теориям. Исследовано влияние жесткости ребер и податливости защемленного края на напряженное состояние оболочки. В результате расчетов показано существенное

влияние дополнительного к классической теории напряженного состояния типа «погранслоя» на прочность оболочки на защемленном краю и в местах крепления ребер.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, уточненная теория, напряженное состояние «погранслоя», принцип Лагранжа, поперечные нормальные напряжения, жесткость ребра, податливость защемленного края, упругое полупространство.

Введение

Теория подкрепленных оболочек, как часть общей теории оболочек, получила свое бурное развитие в начале шестидесятых годов прошлого столетия. В отличие от гладких оболочек, наличие ребер жесткости усложняет математическую модель исследуемого объекта.

Упрощенные методы расчета подкрепленных оболочек, широко применяющиеся в практических разработках, базируются на концепции «размазывания», т.е. замене подкрепленной оболочки некоторой гладкой конструктивно-ортотропной моделью [1-6]. Такой подход не позволяет определить локальное напряженное состояние оболочки в местах сочленения обшивки и ребер. Для усовершенствования методов расчета таких оболочек применима модель, называемая дискретно-континуальной [7-16], которая дает возможность учитывать дискретность расположения подкрепляющих ребер. В этих работах расчеты

базируются на результатах классической теории пластинок и оболочек типа Кирхгофа — Лява [1, 2, 7, 8, 10, 14], Тимошенко-Рейсснера [6, 9, 11-13, 15, 16]. В основу этих теорий были положены гипотезы, которые не позволяют учитывать все поперечные деформации оболочки, что приводит к погрешностям при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) в зоне его искажения.

При создании приближенной теории пластин и оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа-Лява, получил распространение метод прямого асимптотического разложения [17]. Одним из преимуществ прямого асимптотического метода является максимальное расчленение задачи, в результате которого интегралы, соответствующие внутреннему напряженному состоянию и «пограничный слой», строятся с помощью самостоятельных итерационных процессов, обладающих идентичностью основных уравнений.

С помощью метода асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости задача определения НДС цилиндрической оболочки и прямоугольной пластины с жестко закрепленными краями сведена [18] к построению двух итерационных процессов. Первый из них — основной итерационный процесс, начальное приближение которого эквивалентно классической теории, определяет медленно затухающее или внутреннее напряженное состояние оболочки. Другой вспомогательный итерационный процесс определяет быстро затухающее при удалении от края напряженное состояние краевой плоской деформации («погранслой»).

Следует отметить также работы [19, 20], в которых рассматриваются методы уточненного расчета изотропной пластины и полосы из композиционного материала.

Другой подход к построению уточненной теории пластин и оболочек, называемый в [21] энергетически согласованным, заключается в разложении искомым перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. На основании этих подходов в работах [22-25] установлено, что в зоне искажения напряженного состояния имеют место значительные дополнительные локальные напряжения, соизмеримые по величине с напряжениями основного (внутреннего) напряженного состояния, определяемого по классической теории.

В данной работе в рамках указанного подхода [21-23] рассматривается напряженное состояние на защемленном краю и в местах крепления ребер, а также влияние упругости ребер и защемленного края на НДС цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами.

Постановка задачи

Подкрепленная кольцевыми ребрами оболочка из изотропного материала, нагружена поперечной распределенной нагрузкой $q(\xi, \theta)$ и отнесена к цилиндрической системе координат (ρ, θ, ξ) (рис. 1). Обозначим через R, R_j характерные радиусы кривизны обшивки и j -го ребра, а через $2h, 2H$ - их толщины.

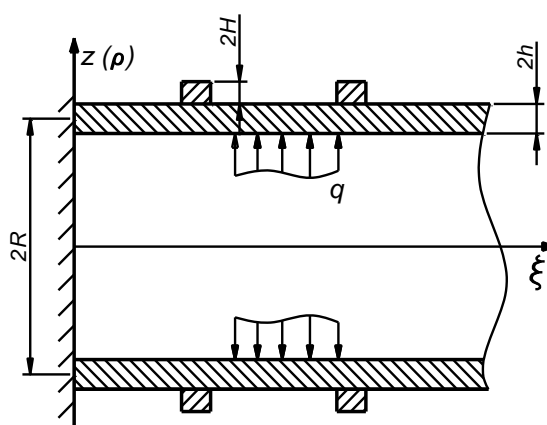


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка, подкреплённая кольцевыми ребрами

В системе координат (ρ, θ, ξ) ξ представляет собой относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ - центральный угол. Введем также координаты z и ζ , для которых справедливы равенства $z = \rho - R$, $z = h\zeta$, где $-h \leq z \leq h$, $-1 \leq \zeta \leq 1$.

Перемещения рассматриваемой оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \\
 v(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \\
 w(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Далее в разложении (1) ограничимся случаем $K=2$, что соответствует повышению на один порядок степени полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной координате, по отношению к классической теории.

Уравнения теории подкреплённой оболочки

В теории упругости геометрические и физические отношения можно

представить в матричном виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_\xi \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{\xi\theta} \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{\xi z}\}$ – матрица деформации, $\mathbf{u} = \{u \ v \ w\}$ – матрица перемещения, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\xi \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{\xi\theta} \ \tau_{\theta z} \ \tau_{\xi z}\}$; матричный дифференциальный оператор \mathbf{L} и матрица $\boldsymbol{\chi}$ определены в работах [17, 26].

Для получения основных уравнений теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta E = \delta U + \delta \sum_{j=1}^N U^j - \delta A = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) U, U^j, A соответственно потенциальные энергии деформации обшивки, j -ого ребра, и работа внешних сил, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint (\sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} + \tau_{\xi\theta} \delta \gamma_{\xi\theta}) (1 + rz) R^2 d\xi d\theta dz, \\ \delta U^j &= \iiint [\sigma_\xi^j \delta \varepsilon_\xi^j + \sigma_\theta^j \delta \varepsilon_\theta^j + \sigma_z^j \delta \varepsilon_z^j + \tau_{\xi\theta}^j \delta \gamma_{\xi\theta}^j + \tau_{\xi z}^j \delta \gamma_{\xi z}^j + \tau_{\theta z}^j \delta \gamma_{\theta z}^j] (1 + r_j z) R_j R d\xi d\theta dz, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta A = \iint q(\delta w_0 - h\delta w_1)(1 - rh) R^2 d\xi d\theta.$$

Подставляя (1), (2), (4) в (3) с учетом $K = 2$ для обшивки и $K = 1$ для ребер, получим систему уравнений равновесия уточненной теории оболочек

$$\sum_{n=0}^2 \left(K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n + \sum_{m=0}^1 K_1^{k3m} \frac{\partial}{\partial \xi} w_m = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^2 \left(K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{m=0}^1 K_2^{l3m} \frac{\partial}{\partial \theta} w_m + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \times \\
& \times \left[\sum_{n=0}^2 \left(K^{luj2n} + K_{22}^{luj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{m=0}^1 K_2^{luj3m} \frac{\partial}{\partial \theta} w_m + \left(K^{luj1} + K_{22}^{luj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j \right]_{\xi=\xi_j} = 0, l = 4, 5, 6, \\
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{m=0}^1 \left(K^{s3m} + K_{11}^{s3m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{s3m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_m + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \times \\
& \times \left[\sum_{n=0}^2 K_2^{suj2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{m=0}^1 \left(K^{suj3m} + K_{22}^{suj3m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_m + K_2^{suj1} \frac{dv_1^j}{d\theta} \right]_{\xi=\xi_j} = K^{s4} q, s = 7, 8, \\
& \left[\sum_{n=0}^2 \left(K^{9uj2n} + K_{22}^{9uj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{m=0}^1 K_2^{9uj3m} \frac{\partial}{\partial \theta} w_m \right]_{\xi=\xi_j} + \left(K^{9uj1} + K_{22}^{9uj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j = 0, \overline{j=1, N}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают постоянные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных изотропного материала обшивки и кольцевых ребер. Ввиду громоздкости соответствующих им выражений, они не приводятся.

Отметим, что в случае жестко заземленного края, граничные условия на краях представляются в следующем виде:

$$u_i = v_i = w_k = 0, i = 0..2, k = 0..1. \tag{6}$$

Общее решение системы (5) представим в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_j,$$

где Φ_0 – общее решение однородной системы, Φ_1 – частное решение, соответствующее внешней нагрузке, Φ_j – частные решения, соответствующие j -ому

ребру. Общее решение однородной системы представлено в работе [22], при этом характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{k=0}^8 K_{\Delta}^{2k} p^{2k} = 0, \quad (7)$$

где K_{Δ}^{2k} – постоянные коэффициенты. Частные решения Φ_1, Φ_j находится операционным методом [24], основанным на преобразовании Лапласа.

Пример расчета

Рассмотрим подкрепленную оболочку, жестко защемленную на двух краях, со следующими параметрами: радиус обшивки $R = 0,5$ (м); длина оболочки $l = 6R = 3$ (м); толщина обшивки $2h = R/40 = 0,0125$ (м); коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; полувысота ребер $h_j = 3h$, толщина ребер $b = h$. Оболочка находится под действием внутреннего давления $q = Q_0 \xi \cos(6\theta)$.

На рис. 2 – 5 представлены графики изменения напряжений оболочки по толщине на жестко защемленном краю (сплошные линии). На этих рисунках также показаны графики этих же напряжений, определяемых по классической теории (пунктирные линии).

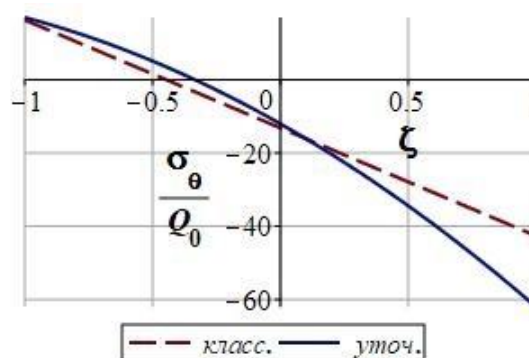
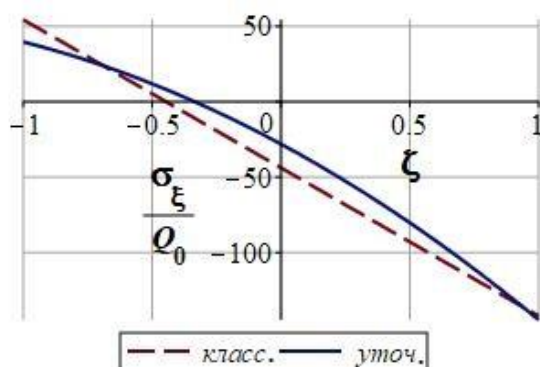
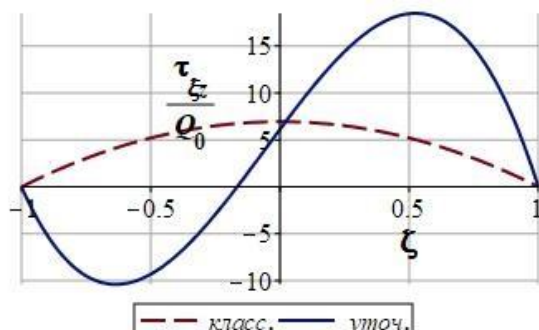
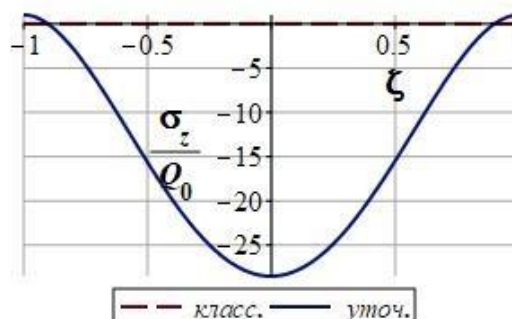


Рис 2. Распределение σ_{ξ} по толщинеРис 3. Распределение σ_{θ} по толщинеРис 4. Распределение $\tau_{\xi z}$ по толщинеРис 3. Распределение σ_z по толщине

Графики на рис. 2 – 5 показывают наличие дополнительных напряжений на защемленном краю при расчете по уточненной теории. Максимальное значение дополнительных напряжений для продольных нормальных напряжений σ_{ξ} составляет 36%, а для тангенциальных – 45% по сравнению с классической теорией. Поперечные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с величинами основных напряжений.

Напряженное состояние краевой плоской деформации

При анализе корней характеристического уравнения (7) установлено, что корни уравнения (7) разделяются на три группы. Асимптотики малых $\pm p_1 \pm iq_1$ и больших $\pm p_2 \pm iq_2$ корней и соответствующих им НДС приближенно определяются в соответствии с классической теорией. К третьей группе относятся корни, которые назовем сверхбольшими. Сверхбольшим корням соответствуют дополнительные эффекты, которые вблизи края назовем напряженным состоянием краевой плоской деформации. Следовательно, полное уточненное напряженное состояние оболочки

представится следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \sigma_{\xi k} + \sigma_{\xi n}, & \sigma_{\theta} &= \sigma_{\theta k} + \sigma_{\theta n}, & \sigma_z &= \sigma_{zk} + \sigma_{zn}, \\ \tau_{\xi\theta} &= \tau_{\xi\theta k} + \tau_{\xi\theta n}, & \tau_{\xi z} &= \tau_{\xi z k} + \tau_{\xi z n}, & \tau_{\theta z} &= \tau_{\theta z k} + \tau_{\theta z n},\end{aligned}$$

где индекс k обозначает напряженное состояние, определенное по классической теории, а n – напряженное состояние краевой плоской деформации. Выражения напряженного состояния, соответствующее уточненной и классической теориям, определяются из формулы (1), (2) при $K=2$ и $K=1$ соответственно. Далее напишем выражения напряжений плоской деформации $\sigma_{\xi n}$ и $\sigma_{\xi zn}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi n} &= m(\theta) \sum_{i=1}^3 F_{1i}(z) \psi_{1i}(\xi), \\ \sigma_{\xi zn} &= m(\theta) \sum_{i=1}^2 F_{2i}(z) \psi_{2i}(\xi),\end{aligned}\tag{8}$$

где $m(\theta) = \cos 6\theta$, $F_{11}(z) = F_{21}(z) = 1$, $F_{12}(z) = F_{22}(z) = z$, $F_{13}(z) = z^2$,

$$\psi_{11}(\xi) = \psi_{12}(\xi) = -\frac{rE\mu w_1}{(2\mu-1)(1+\mu)}, \quad \psi_{21}(\xi) = \frac{u_1 + rw'_0}{2+2\mu} E, \quad \psi_{22}(\xi) = -\frac{r\mu E w_1}{(2\mu-1)(1+\mu)},$$

$$\psi_{13}(\xi) = \frac{Er(2\mu r^2 v_0 - 2\mu w_0 r^2 - 2\mu r v_1 + 2\mu w_1 r + \mu u'_2 + \mu(v_2) - u'_2)}{2(2\mu-1)(1+\mu)},$$

E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона оболочки.

Влияние податливости заземленного края

Уравнения равновесия (5) и граничные условия (6) выведены в предположении абсолютно жесткого заземления края. На самом деле материал в зоне соединения обладает определенными упругими свойствами. Для учета

податливости закрепленного края полагаем, что оболочка крепится к упругому полупространству, простирающемуся в направлении $\xi < 0$ и обладающему иными упругими характеристиками изотропного материала. На полупространство со стороны оболочки по плоскости контакта действуют нормальные и касательные усилия, определяемые формулами (8) при $\xi = 0$.

Если для определения напряжений и перемещений в полупространстве использовать решение задачи Фламана-Буссинеска [27], переходя при этом с помощью функций влияния от нагружения сосредоточенными силами к нагружению распределенной нагрузкой (8) и выполняя замену $z = h\zeta$, то для контактных перемещений будем иметь

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{m(\theta)}{\pi E_0} \sum_{i=1}^3 \left[\psi_{1i}(\xi) \Big|_{\xi=0} \cdot \int_{-1-\zeta}^{1-\zeta} F_{1i}(\zeta) \beta_1(\zeta) d\zeta \right], \\ w^0 &= \frac{m(\theta)}{\pi E_0} \sum_{i=1}^2 \left[\psi_{2i}(\xi) \Big|_{\xi=0} \cdot \int_{-1-\zeta}^{1-\zeta} F_{2i}(\zeta) \beta_2(\zeta) d\zeta \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\beta_1(\zeta) = \ln \frac{\alpha_1^2}{\zeta^2} - (1 + \mu_0), \quad \beta_2(\zeta) = \ln \frac{\alpha_2^2}{\zeta^2},$$

где E_0, μ_0 – упругие характеристики полупространства; α_1, α_2 – расстояния от начала координат таких точек, лежащих на оси ξ , в которых перемещения (9) пренебрежимо малы. Анализ характера затухания перемещений (9) позволяет для практических расчетов полагать $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

В результате влияния податливости защемленного края получим новую

краевую задачу, в которой система дифференциальных уравнений (5) остается прежней, а граничные условия (6) на краю $\xi = 0$ представятся в модифицированной форме:

$$u_0 = u_0^0, u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, v_0 = v_0^0, v_1 = v_1^0, v_2 = v_2^0, w_0 = w_0^0, w_1 = w_1^0, \quad (10)$$

где u_i^0, v_i^0, w_i^0 являются соответствующими множителями в разложении выражения перемещений (9) в ряды Тейлора по нормальной переменной z до третьего порядка.

Повторяя процесс решения краевой задачи (5), (10), который был проделан с системой (5), (6), находим новое напряженное состояние оболочки.

Для оценки влияния упругости защемленного края оболочки вновь обратимся к рассмотрению примера, считая для полупространства $\mu_1 = 0,3$. В результате расчета получены выражения напряжений, зависящие от величины $L_0 = E/E_0$. Изменяя L_0 в интервале, характерном для металлов, можно построить кривые зависимости отношений напряжений от параметра L_0 для случая упруго защемленного края и абсолютно жестко защемленного края. Такие кривые представлены на рис. 6, где продольное и окружное напряжения соответствуют точке с координатами $\xi = 0, \theta = 0, z = h$, а поперечное напряжение – $\xi = 0, \theta = 0, z = 0$. Здесь графики отношений нормальных напряжений $\sigma_{\xi}^{\text{упруго}} / \sigma_{\xi}^{\text{жестко}}$, $\sigma_{\theta}^{\text{упруго}} / \sigma_{\theta}^{\text{жестко}}$, $\sigma_z^{\text{упруго}} / \sigma_z^{\text{жестко}}$ обозначены цифрами 1, 2, 3.

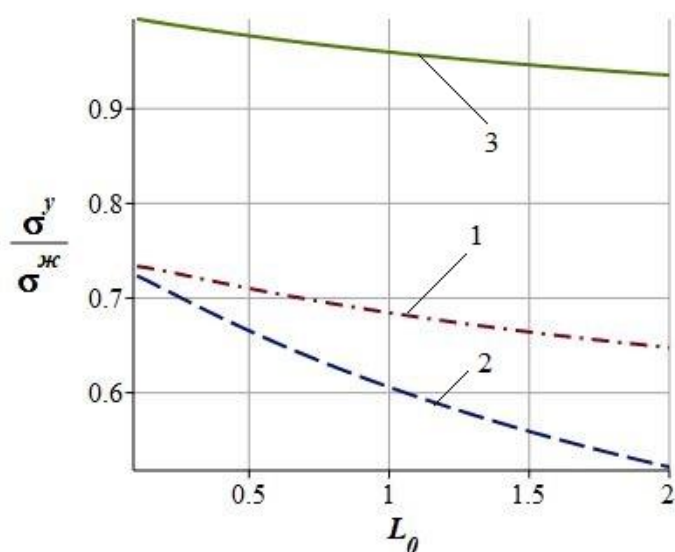


Рис. 6. Графики влияния податливости заземленного края на нормальные напряжения оболочки

Анализ этих кривых показывает, что с уменьшением L_0 компоненты нормальных напряжений оболочки на краю возрастают, при этом самый значительный прирост наблюдается у окружного нормального напряжения. При одинаковых жесткостях ($L_0 = E/E_0 = 1$) стыкуемых элементов, продольное, окружное и поперечное напряжения уменьшаются на 31%, 39% и 4% соответственно по сравнению со случаем жестко заземленного края.

Влияние жесткости ребер

Для увеличения прочности оболочки, к ней могут крепиться ребра, жесткость которых отличается от жесткости оболочки. С целью оценки влияния жесткости ребер на напряженное состояние оболочки построим некоторые графики в зависимости от величины $L_1 = E_1/E$, где E_1 — модуль Юнга ребер.

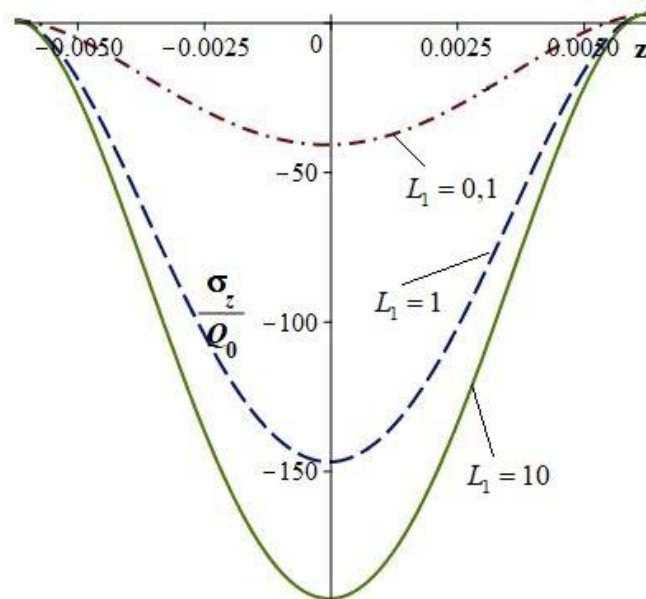


Рис. 7. Графики влиния жесткости ребра на поперечное нормальное напряжение в месте сопряжения

На рис. 7 показаны графики поперечных нормальных напряжений по толщине оболочки в месте крепления кольцевого ребра ($\xi = \xi_j$) при различных значениях L_1 . Графики показывают, что с ростом модуля упругости ребер E_1 напряжение σ_z возрастает. Это показывает необходимость применения уточненной теории для расчета НДС оболочки, подкрепленной ребрами.

Зависимости нормальных напряжений от значения L_1 показаны на рис. 8, где цифрами 1, 2, 3 обозначены графики отношений продольного, окружного и поперечного напряжений для вариантов подкрепленной и гладкой оболочек в местах крепления кольцевого ребра ($\xi = \xi_j$).

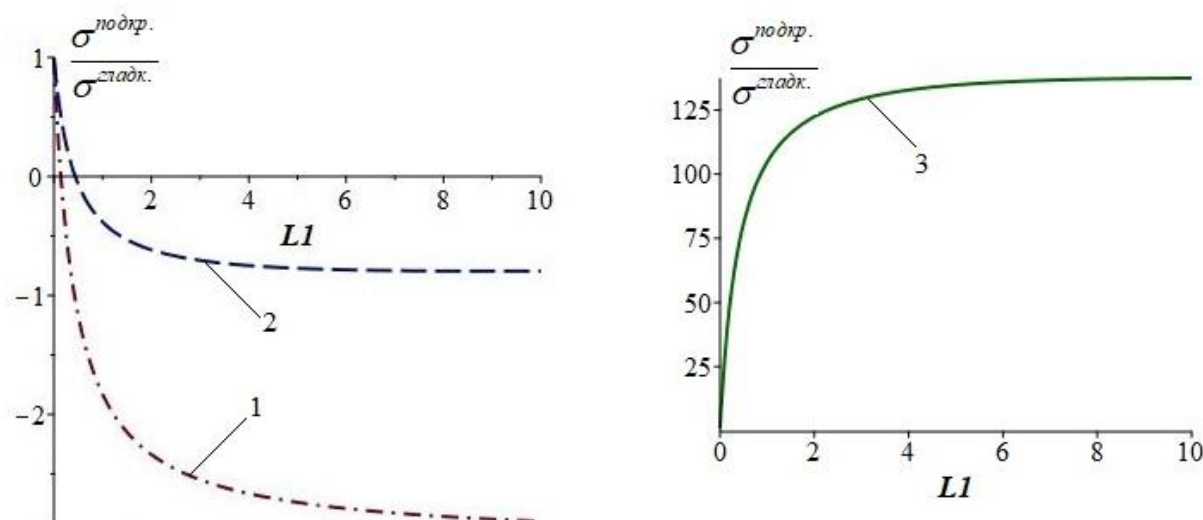


Рис. 8. Графики влияния жесткости ребра на нормальное напряжение оболочки

Графики на рис. 8 показывают, что при изменении значения L_1 в интервале 0..2, напряженное состояние подкрепленной оболочки быстро изменяется, при этом напряжения σ_ξ , σ_θ уменьшаются, а напряжение σ_z увеличивается. При больших значениях L_1 ($L_1 > 6$) напряжения подкрепленной оболочки мало изменяются. Этот факт имеет важное значение при выборе жесткостных характеристики ребер для подкрепленных оболочек.

Заключение

Проведено исследование напряженного состояния подкрепленной цилиндрической оболочки на защемленном краю и в местах сочленения обшивки с ребрами по уточненной теории. Исследование показало, что при расчете по уточненной теории имеют место быстро затухающие дополнительные напряженные состояния типа «погранслои». Вблизи зон искажения напряженного состояния (в местах крепления ребер и на защемленном краю) величины продольных и окружных

напряжений оболочки существенно уточняются, а поперечных напряжений получаются одного порядка с максимальными значениями основного (внутреннего) напряжения.

Для учета реальных упругих свойств конструкционных материалов в зоне соединения оболочки рассмотрена контактная задача о ее взаимодействии с упругим изотропным полупространством. Основываясь на решении задачи Фламана-Буссинеска с помощью функции влияния, получены модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть упругие свойства заземленного края. Результаты расчетов показали, что при учете его податливости напряжения оболочки уменьшаются в несколько раз.

В работе рассмотрено влияние жесткости ребер на напряженное состояние оболочки. Показано, что, варьируя модуль упругости ребер в интервале $E_1 = (0..2) \cdot E$, изменение величины напряжений оболочки существенно, а в интервале $E_1 > 6E$ – мало. Важный результат, относящийся к дополнительному напряженное состояние, состоит в том, что при повышении жесткости ребер, поперечные нормальные напряжения σ_z , которыми в классической теории пренебрегают, существенно увеличиваются. Это доказывает необходимость применения уточненной теории для расчета НДС подкрепленных оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849).

Библиографический список

1. Жилин П.А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек. Прочность гидротурбин. Труды ЦКТИ № 72. - Ленинград: Изд-во ЦКТИ, 1966. С. 26 – 40.
2. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек. Прочность гидротурбин. Труды ЦКТИ № 88. - Ленинград: Изд-во ЦКТИ, 1968. С. 46 – 70.
3. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 150 – 162.
4. Лазарян В.А., Конашенко С.И. Обобщенные функции в задачах механики. – Киев: Наукова думка, 1974. – 192 с.
5. Yang B., Zhou J. Analysis of ring-stiffened cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics, 1995, vol. 62, pp. 1005 - 1014.
6. Swaddiwudhipohg S., Tian J., Wang C.M. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via Ritz method // Thin walled structures, 1999, vol. 35, pp. 1 - 24.
7. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Том 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наукова Думка, 1980. – 368 с.
8. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
9. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 6 (8). С. 16 - 24.

10. Кушнаренко И.В. Учёт подкреплений при расчёте оболочек вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 57 - 62.
11. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкреплённых конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 3. С. 63 – 71.
12. Семенов А.А., Овчаров А.А. Математическая модель деформирования ортотропных конических оболочек // Инженерный вестник Дона. 2014. Т. 29. Вып. 2. С. 74 – 77.
13. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкреплённых ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 49 - 63.
14. Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкреплённой дискретным набором шпангоутов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 78 – 98.
15. Карпов В.В., Игнатъев О.В., Семенов А.А. Напряженно-деформированное состояние ребристых оболочечных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 6 (74). С. 147 - 160.
16. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // International Journal of Solids and Structures, 2018, no. 146, pp. 117 - 135.

17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
18. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28 – 64.
19. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>
20. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>
21. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139 - 146.
22. Firsanov V.V., Doan C.N. Energy-consistent theory of cylindrical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2011, vol. 40, no. 6, pp. 543 - 548.
23. Firsanov V.V. The Stressed State of the “Boundary Layer” Type in Cylindrical Shells Investigated according to a Nonclassical Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2018, no. 47 (3), pp. 241 - 248.
24. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории

// Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>

25. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

26. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.

27. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.