

## **Метод линеаризации в задачах перелета космических аппаратов с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту**

**Казмерчук П.В.\*, Вернигора Л.В.\*\***

*Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина, ул. Ленинградская, 24,  
Химки, Московская область, 141400, Россия.*

*\*e-mail: [pavel.kazmerchuk@gmail.com](mailto:pavel.kazmerchuk@gmail.com)*

*\*\*e-mail: [vly@laspace.ru](mailto:vly@laspace.ru)*

*Статья поступила 20.11.2020*

### **Аннотация**

В статье с помощью метода линеаризации решается задача оптимизации некомпланарного перелёта КА с ЭРДУ с эллиптической орбиты на геостационарную за фиксированное время. Даются рекомендации по выбору начального приближения. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов.

**Ключевые слова:** метод линеаризации; малая тяга; нелинейная оптимизация, геостационарная орбита, электроракетная двигательная установка.

### **Введение**

В предыдущей работе [1] с помощью модифицированного метода линеаризации (ММЛ) решена задача некомпланарного перелета с высокой эллиптической орбиты на (ГСО) за минимальное время (задача оптимального быстрогодействия). В этой задаче тяга действует непрерывно, с постоянным уровнем, а управление осуществляется

поворотом вектора тяги. Другим важным классом задач оптимизации перелета на ГСО КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) являются задачи максимизации конечной массы при ограничениях на время перелета (задача с фиксированным временем). Увеличение времени перелета, относительно задачи оптимального быстрогодействия позволяет сократить затраты топлива и увеличить конечную массу за счет отключения ДУ на участках с менее эффективным управлением. Рассматриваются нерегулируемые ЭРДУ, тяга в которых может быть либо нулевой, либо максимальной.

Для решения задач оптимизации перелетов КА с ЭРДУ широко используется принцип Максимума [2-6]. Применение принципа Максимума позволяет свести исходную оптимизационную задачу к решению краевой задачи. При решении таких краевых задач исследователи сталкиваются с проблемами сходимости, выбора начального приближения, обусловленными локальностью принципа Максимума, вопросами существования и единственности решений систем нелинейных уравнений. Для преодоления указанных трудностей авторы используют различные подходы: метод продолжения [7-11], последовательное уточнение моделей движения [2], комбинации численных методов [12] и другие. Спецификой задачи с фиксированным временем является наличие большого количества локальных экстремумов [7], что еще больше усложняет решение краевой задачи принципа Максимума, поскольку на границах областей притяжения локальных экстремумов вырождается матрица частных производных от невязок краевой задачи по ее неизвестным параметрам, так или иначе используемая во всех непрямых методах [8].

ММЛ, являясь прямым методом, работающим в пространстве управлений [13],

относится к классу градиентных методов (методов первого порядка), что обуславливает его большую область сходимости [14]. В задаче быстрогодействия оказалось возможным использовать тривиальные начальные приближения [1], что позволяет надеяться на его успешное применение и в задачах с фиксированным временем.

ММЛ также относится к классу локальных методов, однако хотелось бы иметь алгоритм, позволяющий получать решения близкие к глобальным. Забегая вперед, отметим, что задачу удалось параметризовать всего двумя величинами: начальным значением истинной долготы перелета и начальным значением тяги ЭРДУ. Полученное двухпараметрическое семейство достаточно просто исследовать прямым перебором для поиска глобального минимума без необходимости привлечения методов глобальной оптимизации.

Основной проблемой при попытках использовать ММЛ для решения задачи с фиксированным временем является определение количества точек переключения тяги и их расположение на траектории, поскольку явная информация о функции переключения отсутствует. Алгоритм решения задачи должен автоматически определять оптимальные значения этих параметров наряду с оптимизацией направления вектора тяги на активных участках. В работе предложен такой алгоритм, позволяющий регулярно решать задачи перелета КА с ЭРДУ на ГСО с фиксированным временем.

## 1. Постановка задачи

Уравнения движения КА в модифицированных равноденственных элементах орбиты можно представить в виде [1; 15-17]

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dl} &= 2kpa_\tau; \\
\frac{de_x}{dl} &= k[a_r\xi \sin l + a_\tau[e_x + (\xi + 1)\cos l] - a_n\eta e_y]; \\
\frac{de_y}{dl} &= k[-a_r\xi \cos l + a_\tau[e_y + (\xi + 1)\sin l] - a_n\eta e_x]; \\
\frac{di_x}{dl} &= 0.5ka_n\varphi \cos l; \\
\frac{di_y}{dl} &= 0.5ka_n\varphi \sin l; \\
\frac{dt}{dl} &= \frac{k\xi}{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}; \\
\frac{dm}{dl} &= \frac{dt}{dl} \cdot \frac{P}{w},
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $a_b$ ,  $a_r$ ,  $a_n$  – проекции вектора управляющего ускорения на оси орбитальной системы координат;  $p$  – фокальный параметр;  $l$  – истинная долгота;  $\mu$  – гравитационный параметр;  $P$  – тяга двигателя;  $w$  – скорость истечения. Компоненты  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $e_x$ ,  $e_y$  связаны с эксцентриситетом и наклоном соотношениями:

$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ ,  $i = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{i_x^2 + i_y^2} \right)$ . Также использованы следующие обозначения:

$$\xi = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l;$$

$$\eta = i_x \sin l - i_y \cos l;$$

$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2;$$

$$a_\tau = \frac{P}{m} \cos \theta \cos \psi;$$

$$a_r = \frac{P}{m} \sin \theta \cos \psi;$$

$$a_n = \frac{P}{m} \sin \psi;$$

$$k = \frac{1}{a_n \eta + \mu \frac{\xi^3}{p^2}},$$

где  $\theta$  – угол между вектором управляющего ускорения и трансверсалью в плоскости оскулирующей орбиты;  $\psi$  – угол между вектором управляющего ускорения и плоскостью оскулирующей орбиты;  $m$  – масса КА.

Моменты включения и выключения тяги моделируются как переход между участками составной динамической системы. Уравнения движения на пассивном участке соответствуют (1) с тождественно равными нулю компонентами управляющего ускорения  $a_t$ ,  $a_r$ ,  $a_n$ . Количество точек перехода между участками составной динамической системы и их расположение на траектории неизвестно и подлежит определению в процессе оптимизации.

Рассматривается перелёт между околоземными орбитами, параметры которых приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Параметры начальной и конечной орбит

параметр	начальная орбита	конечная орбита
$\rho$	11625,0 км	42165,0 км
$e_x$	0,75	0
$e_y$	0	0
$i_x$	0,0612	0
$i_y$	0	0
$l$	$\pi$	–

Параметры КА приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Параметры КА

параметр	значение
масса, $m$	1500,0 кг
тяга, $P$	10 Н
скорость истечения, $w$	19561,82 м/с

Необходимо определить ориентацию вектора управляющего ускорения  $\theta$  и  $\psi$  на активных участках, количество точек перехода между участками составной динамической системы и их расположение на траектории обеспечивающих максимум конечной массы

$$m(l_k) \rightarrow \max.$$

При выполнении ограничений

$$p(l_k) - p_k = 0, e_x(l_k) = 0, e_y(l_k) = 0, i_x(l_k) = 0, i_y(l_k) = 0, t(l_k) = T, \quad (3)$$

где,  $T$  – фиксированное время перелета. Ограничения на управление  $\theta$  и  $\psi$  не накладываются,  $l_k$  ограничено снизу  $l_k \in (l_0, +\infty)$ .

## 2. Оптимизация составной динамической системы

Траектория движения составной динамической системы состоит из  $N$  участков, количество которых неизвестно. Каждый нечетный участок активный

$$\frac{dx^i}{dl^i} = \mathbf{f}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, l^i), i = 1, 3, 5 \dots N; \quad (4)$$

Где,

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, l^i) = \begin{cases} \frac{dx_1^i}{dl^i} = 2k^i x_1^i a_\tau^i; \\ \frac{dx_2^i}{dl^i} = k^i [a_r^i \xi^i \sin l^i + a_\tau^i [x_2^i + (\xi^i + 1) \cos l^i] - a_n^i \eta^i x_3^i]; \\ \frac{dx_3^i}{dl^i} = k^i [-a_r^i \xi^i \cos l^i + a_\tau^i [x_3^i + (\xi^i + 1) \sin l^i] - a_n^i \eta^i x_2^i]; \\ \frac{dx_4^i}{dl^i} = 0.5k^i a_n^i \varphi^i \cos l^i; \\ \frac{dx_5^i}{dl^i} = 0.5k^i a_n^i \varphi^i \sin l^i; \\ \frac{dx_6^i}{dl^i} = \frac{k^i \xi^i}{\sqrt{\frac{x_1^i}{\mu}}}; \\ \frac{dx_7^i}{dl^i} = -\frac{dx_6^i}{dl^i} \cdot \frac{P}{w}. \end{cases}$$

Каждый четный участок пассивный

$$\frac{d\mathbf{x}^j}{dl^j} = \mathbf{f}^j(\mathbf{x}^j, l^j), j = 2, 4, 6 \dots N - 1; \quad (5)$$

Где,

$$\mathbf{f}^j(\mathbf{x}^j, \mathbf{u}^j, l^j) = \begin{cases} \frac{dx_1^j}{dt^j} = 0; \\ \frac{dx_2^j}{dt^j} = 0; \\ \frac{dx_3^j}{dt^j} = 0; \\ \frac{dx_4^j}{dt^j} = 0; \\ \frac{dx_5^j}{dt^j} = 0; \\ \frac{dx_6^j}{dt^j} = \frac{k^j \xi^j}{\sqrt{\frac{x_1^j}{\mu}}}; \\ \frac{dx_7^j}{dt^j} = 0. \end{cases}$$

$$k^j = \frac{1}{\mu \frac{(\xi^j)^3}{(x_1^j)^2}}.$$

Начальные условия движения системы (4) будут иметь вид

$$l_0^j = \pi, \mathbf{x}(l_0^j) = [11625 \cdot 10^3; 0,75; 0; 0,0612; 0; 0, 1500]^T. \quad (6)$$

Так как левый конец траектории не варьируется (неподвижный по условию задачи), вектор параметров  $\mathbf{p}^0$  отсутствует, а функция  $\Phi^1$  константна.

Вектор управления будет иметь вид

$$\boldsymbol{\alpha}^i = [\mathbf{u}^i(t), \mathbf{p}^i]^T, \mathbf{u}^i = [\theta^i(t), \psi^i(t)]^T, i=1,3,5 \dots N;$$

$$\boldsymbol{\alpha}^j = [\mathbf{u}^j(t), \mathbf{p}^j]^T, \mathbf{u}^j \equiv 0, j=2,4,6 \dots N-1;$$

Вектор варьируемых параметров на каждом участке  $\mathbf{p}^i, i=1,2,3 \dots N$  содержит только один параметр – неизвестную истинную долготу окончания участка  $\mathbf{p}^i = [l_k^i]$ .

Момент окончания  $i$ -ого участка определяется из условия

$$\mu(l^i) = l^i - l_k^i, \mu(l^i) = 0, i = 1, 2, 3 \dots N.$$

На траектории определены следующие функционалы:

Критерий

$$J_0[\alpha(\cdot)] = -m(l_k^N), \quad (7)$$

и ограничения:

$$\begin{aligned} J_1[\alpha(\cdot)] &= p(l_k^N) / p_k - 1 = 0, \\ J_2[\alpha(\cdot)] &= e_x(l_k^N) = 0, \\ J_3[\alpha(\cdot)] &= e_y(l_k^N) = 0, \\ J_4[\alpha(\cdot)] &= i_x(l_k^N) = 0, \\ J_5[\alpha(\cdot)] &= i_y(l_k^N) = 0, \\ J_6[\alpha(\cdot)] &= t(l_k^N) - T = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая оптимизационная задача: определить управление  $\alpha(\cdot)$  динамической системой (4), при котором функционал (7) достигает минимума

$$\min_{\alpha} J_0[\alpha(\cdot)]$$

при выполнении условий (8)

$$J_j[\alpha(\cdot)] = 0, j = 1 \dots 6.$$

### 3. Выбор начального приближения

Процедуру определения начального приближения можно сформулировать в виде следующего алгоритма.

1. Решается задача быстрогодействия так, как описано в [1]. Из решения задачи

быстродействия определяется минимальное время перелета  $T_{\min}$ .

2. Решается задача минимизации истинной долготы перелета. Ее постановка полностью соответствует задаче быстродействия с единственным отличием – критерий заменен на  $J_0[\theta(\cdot), \psi(\cdot), l_k] = l_k$ . Из решения задачи определяется минимальная истинная долгота перелета  $l_{\min}$ .
3. Фиксируется время перелета  $T = c_t T_{\min}$ ,  $c_t > 1$ .
4. Формируется промежуточная задача:
  - 4.1. Траектория состоит из одного участка.
  - 4.2. Начальные условия соответствуют (6).
  - 4.3. Вектор управления имеет вид  $\mathbf{a} = [\mathbf{u}(t), \mathbf{p}]^T$ ,  $\mathbf{u} = [\theta(t), \psi(t), P(t)]^T$ ,  
 $\theta(t) \in [-\infty, +\infty]$ ,  $\psi(t) \in [-\infty, +\infty]$ ,  $P(t) \in [0, P_{\max}]$ ,  $\forall t \in [t_0, T]$ . Вектор варьируемых параметров на участке  $\mathbf{p}$  содержит только один параметр – неизвестную истинную долготу окончания перелета  $\mathbf{p} = [l_k]$ .
  - 4.4. Начальные значения для вектора управления  $\theta(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $P(t) = c_p P_{\max}$ ,  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $c_p \in [0, 1]$ .
  - 4.5. Начальное значение для истинной долготы окончания участка  $l_k = l_0 + c_t c_l (l_{\min} - l_0)$ .
  - 4.6. Момент окончания движения определяется из условия  $\mu(l) = 0$ , где  $\mu(l) = l - l_k$ .
  - 4.7. Критерий и ограничения соответствуют (7) и (8).
5. Из решения промежуточной задачи определяются функции  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $P(t)$ , истинная долгота перелета  $l_k$ .
6. Анализируя функцию  $P(t)$ , определяются моменты начала и окончания

активных и пассивных участков  $\mathbf{p}^i = [l_k^i]$ .

Пункты 1 - 2 выполняются один раз и определяют нижнюю границу существования решений. Время перелета определяется выбором коэффициента  $c_t$ . Решение промежуточной задачи позволяет приближенно определить точки переключения тяги. Требуется обсудить пункт 6. Здесь функция изменения тяги двигателя, полученная в результате решения промежуточной задачи, преобразовывается в релейную функцию переключения тяги. Моменты переключения и будут являться начальными значениями параметров  $\mathbf{p}^i = [l_k^i]$ . Заметим, что параметры  $\mathbf{p}^i$  являются варьируемыми. Вследствие этого их начальные значения можно определять достаточно приближенно. В работе использовался простейший алгоритм, в котором точкой переключения считался момент изменения знака градиента функции  $P(t)$ . Можно предложить и другие варианты алгоритма, единственное требование к нему – он должен быть «жадным». В данном контексте это значит, что лучше добавить дополнительные точки переключения в неоднозначных ситуациях. Поскольку моменты окончания участков являются подвижными (параметры  $\mathbf{p}^i$  - варьируются) в процессе оптимизации участки могут «вырождаться», а возможности добавить новые точки разрыва (ввести дополнительные участки) нет, поскольку отсутствует явная информация о функции переключения.

Из решения промежуточной задачи однозначно определяется начальное приближение для задачи (4)÷(8). Т.к. промежуточная задача зависит всего от двух параметров  $c_p$  и  $c_t$ , варьируя их мы получаем различные решения задачи (4)÷(8). Таким образом сформировано двухпараметрическое семейство решений задачи

$$(4) \div (8) - J_0(c_p, c_l).$$

#### 4. Анализ результатов

Задача (4)÷(8) была решена для различных значений времени перелёта в диапазоне  $c_t \in (1,3]$  с шагом  $\Delta c_t=0.1$ . С целью поиска наилучшего решения для фиксированного времени перелета  $c_t$ , коэффициенты  $c_p$  и  $c_l$  варьировались в диапазонах  $c_p \in [0.05, 0.3]$  с шагом  $\Delta c_p=0.05$  и  $c_l \in [0.91, 1.3]$  с шагом  $\Delta c_l=0.01$ . Указанные значения выбирались экспериментально. Интегрирование уравнений движения проводилось методом Дормана-Принса 8-ого порядка [18] с точностью  $10^{-9}$ . Результаты расчетов представлены на рисунке 1.

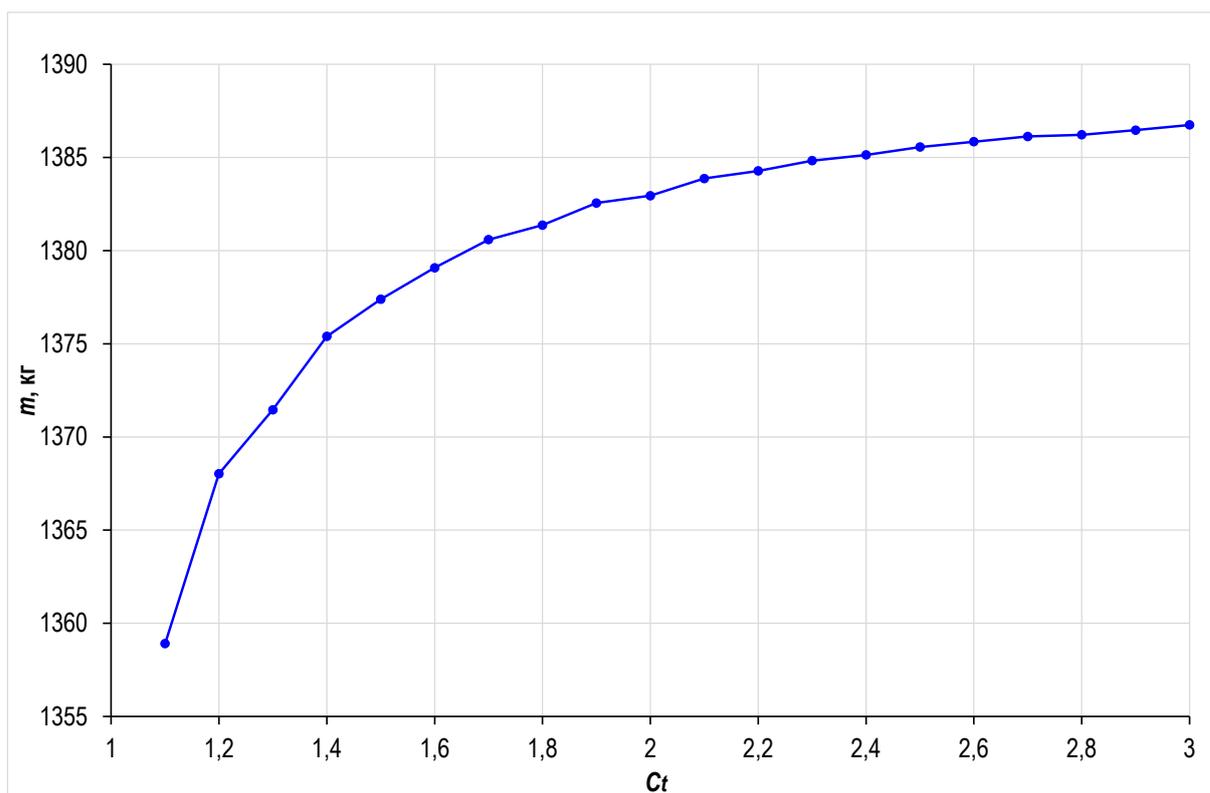


Рисунок 1. Зависимость конечной массы КА от времени перелета

На рисунках 2 – 11 представлены оптимальные траектория (жирным показаны участки работы двигательной установки) и управление, полученные для  $c_t = 1.5$  и

$c_t = 3.$

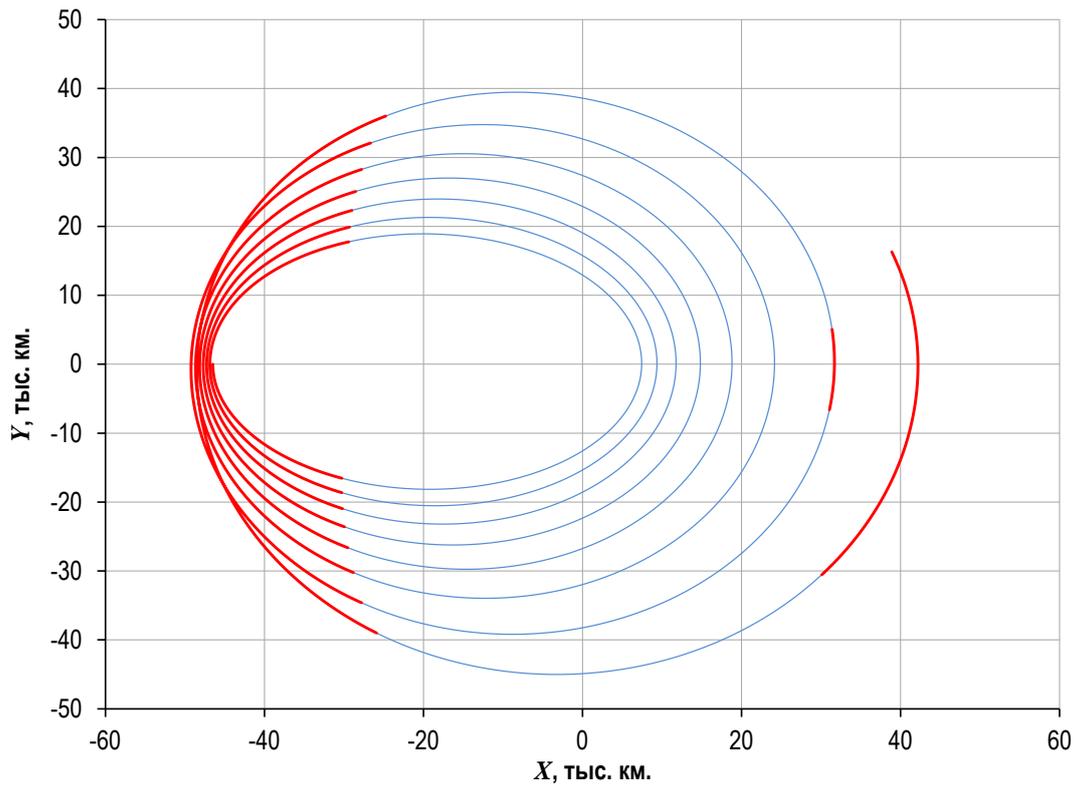


Рисунок 2. Проекция траектории на плоскость XY ( $c_t = 1.5$ )

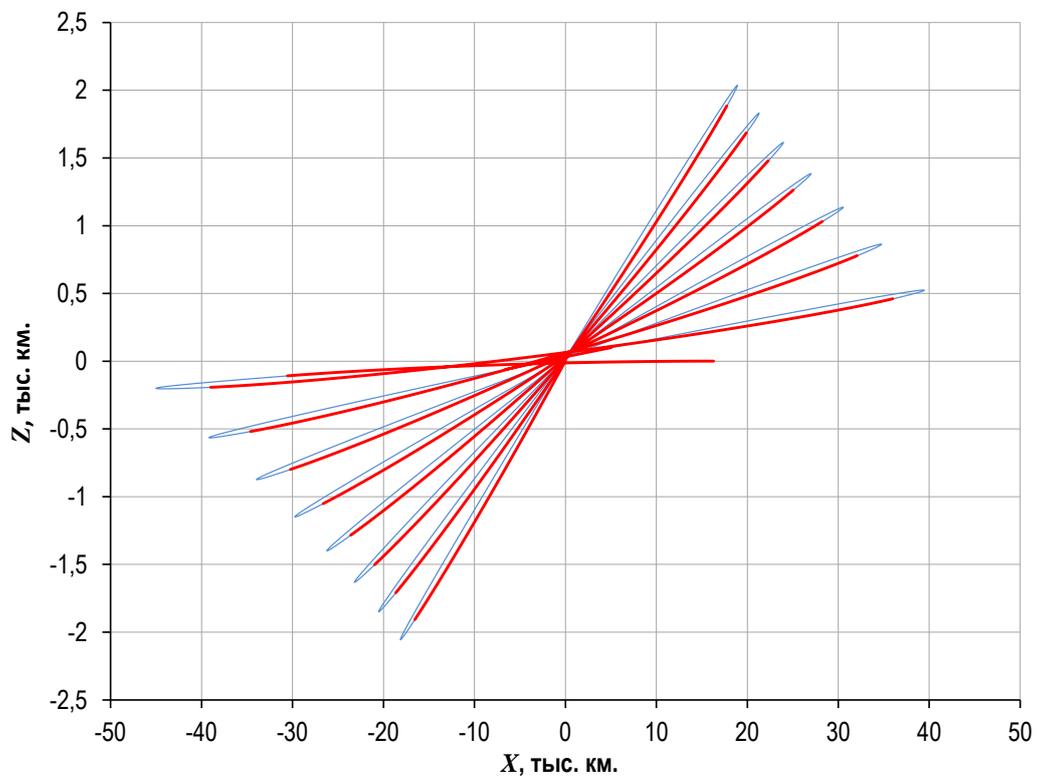


Рисунок 3. Проекция траектории на плоскость XZ ( $c_t = 1.5$ )

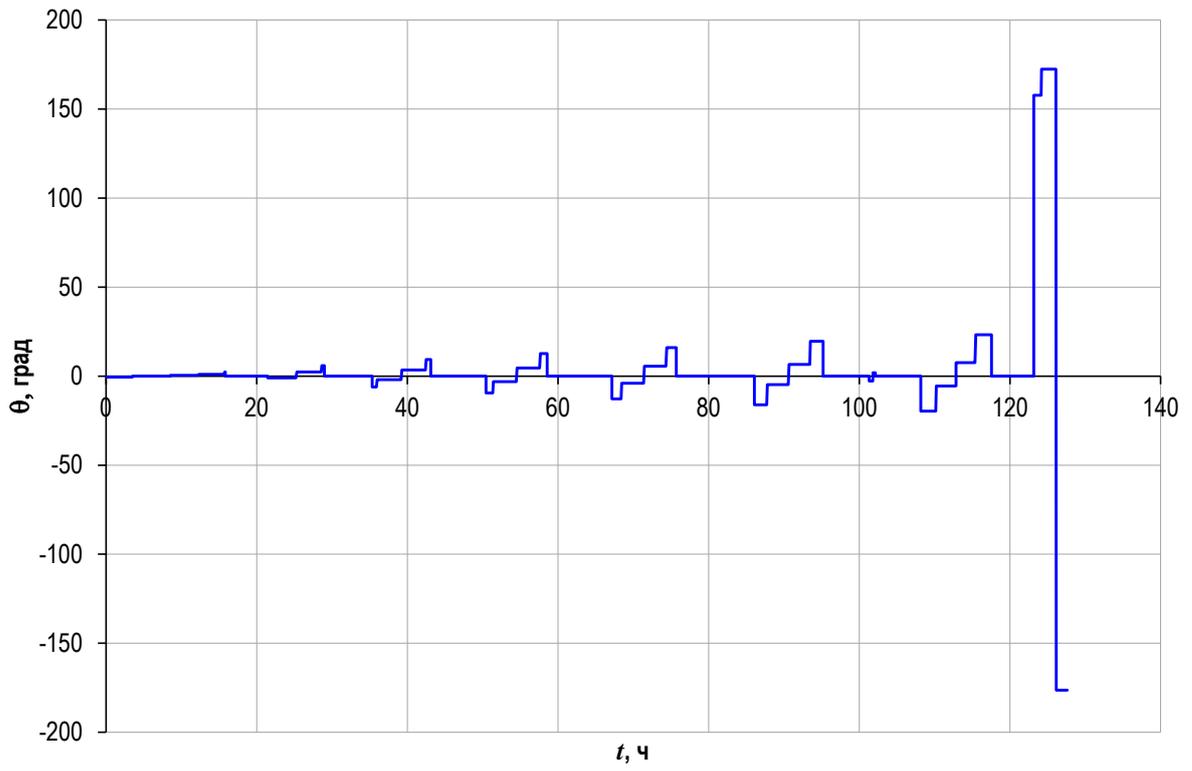


Рисунок 4.  $\theta(t)$  ( $c_t = 1.5$ )

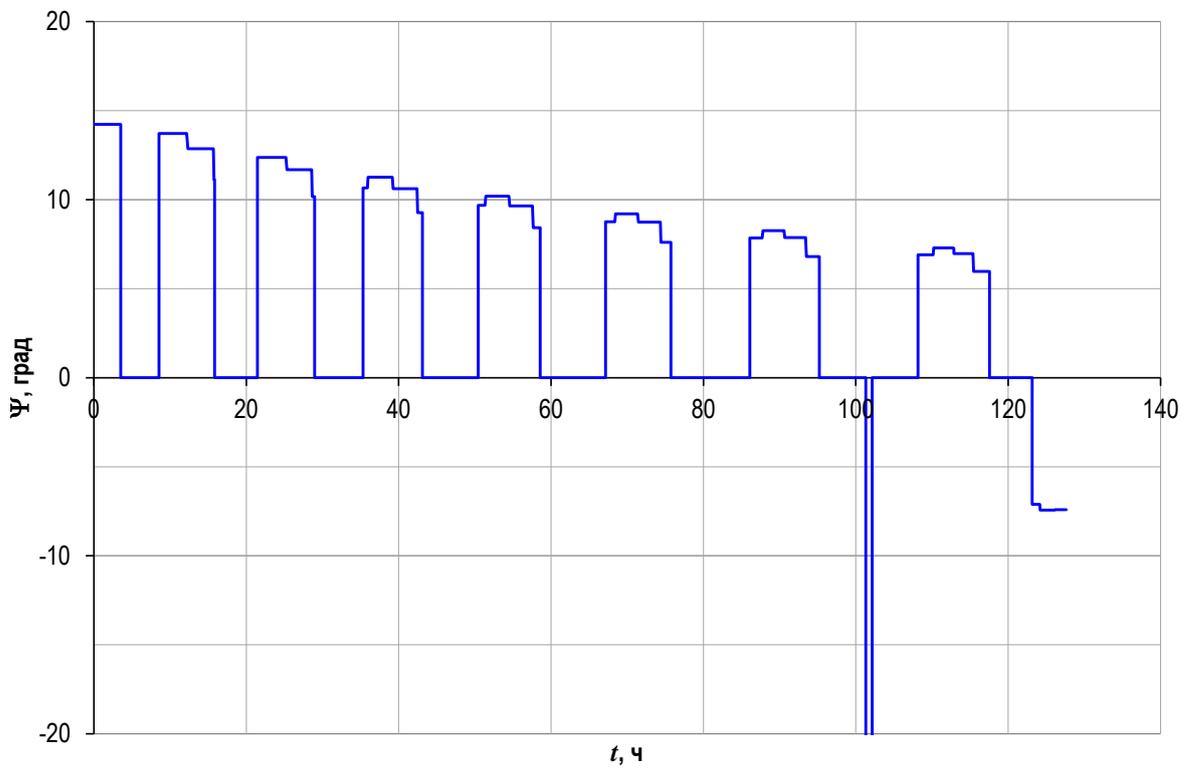


Рисунок 5.  $\psi(t)$  ( $c_t = 1.5$ )

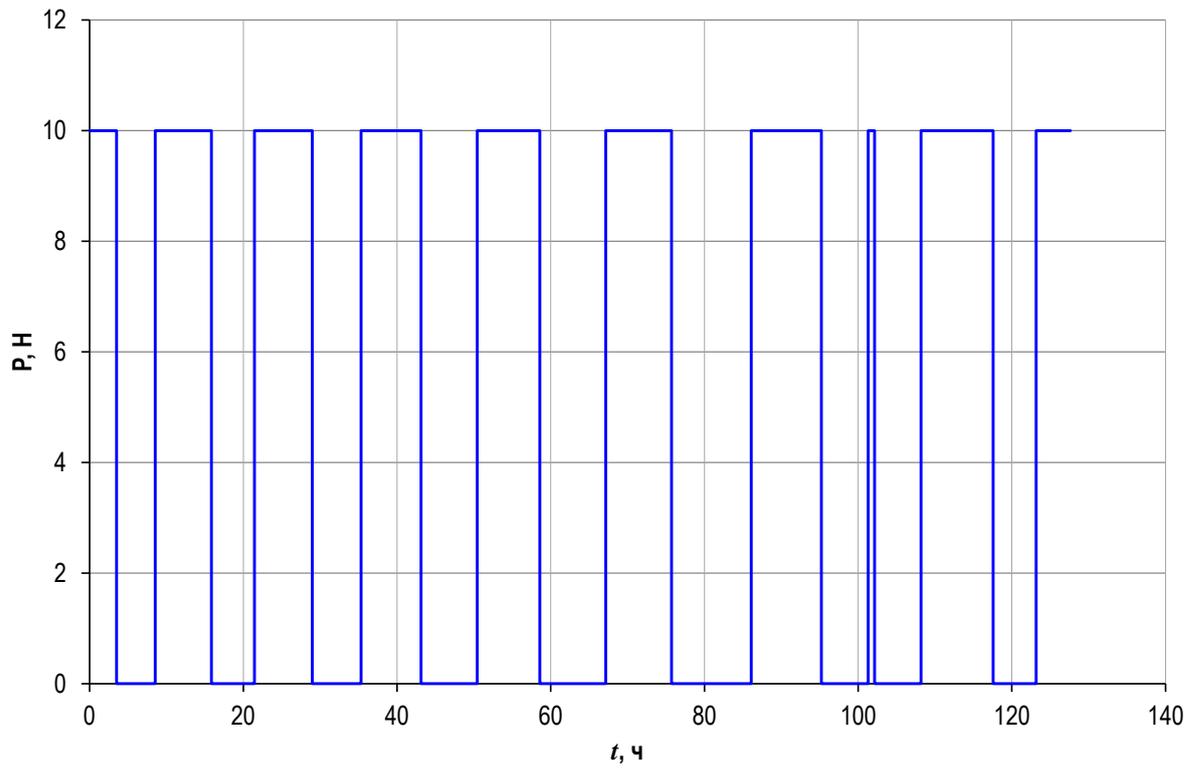


Рисунок 6.  $P(t)$  ( $c_t = 1.5$ )

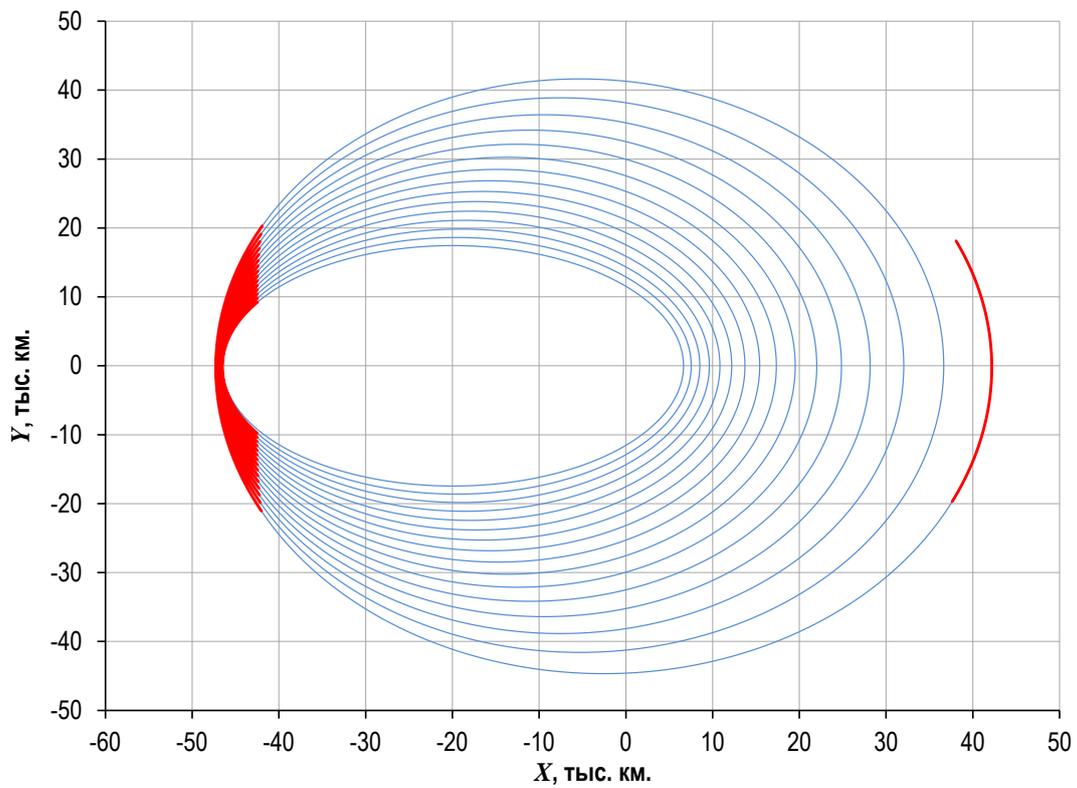


Рисунок 7. Проекция траектории на плоскость XY ( $c_t = 3$ )

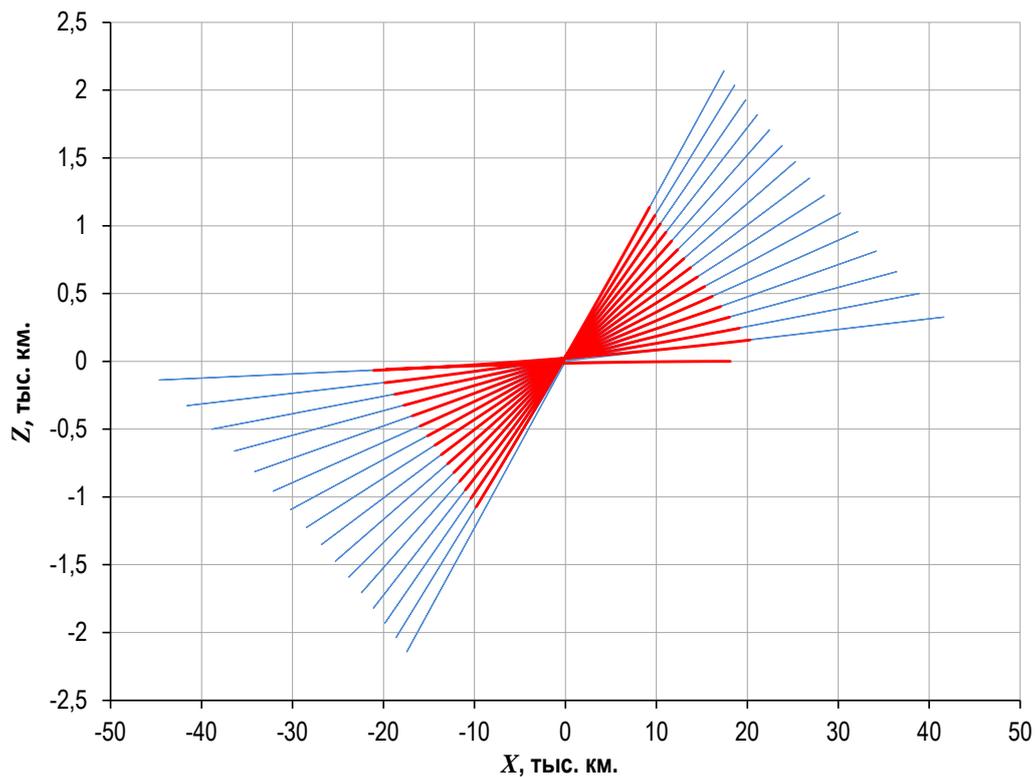


Рисунок 8. Проекция траектории на плоскость XZ ( $c_t = 3$ )

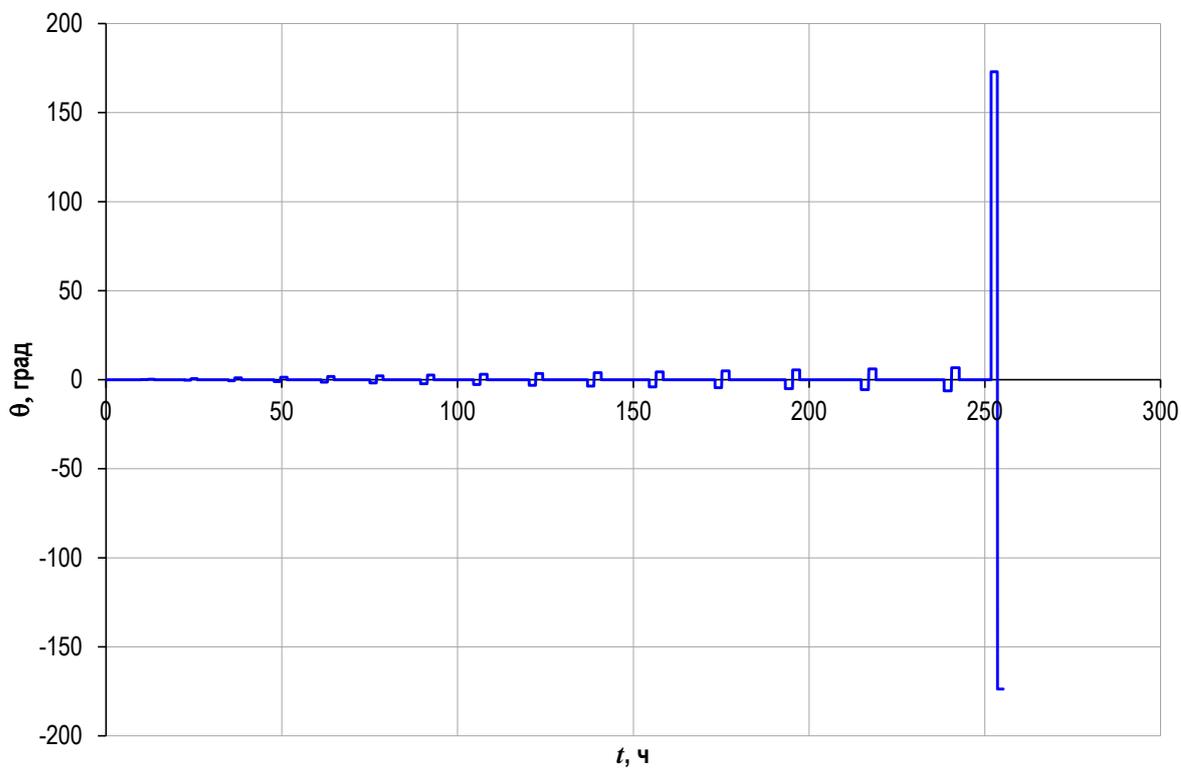


Рисунок 9.  $\theta(t)$  ( $c_t = 3$ )

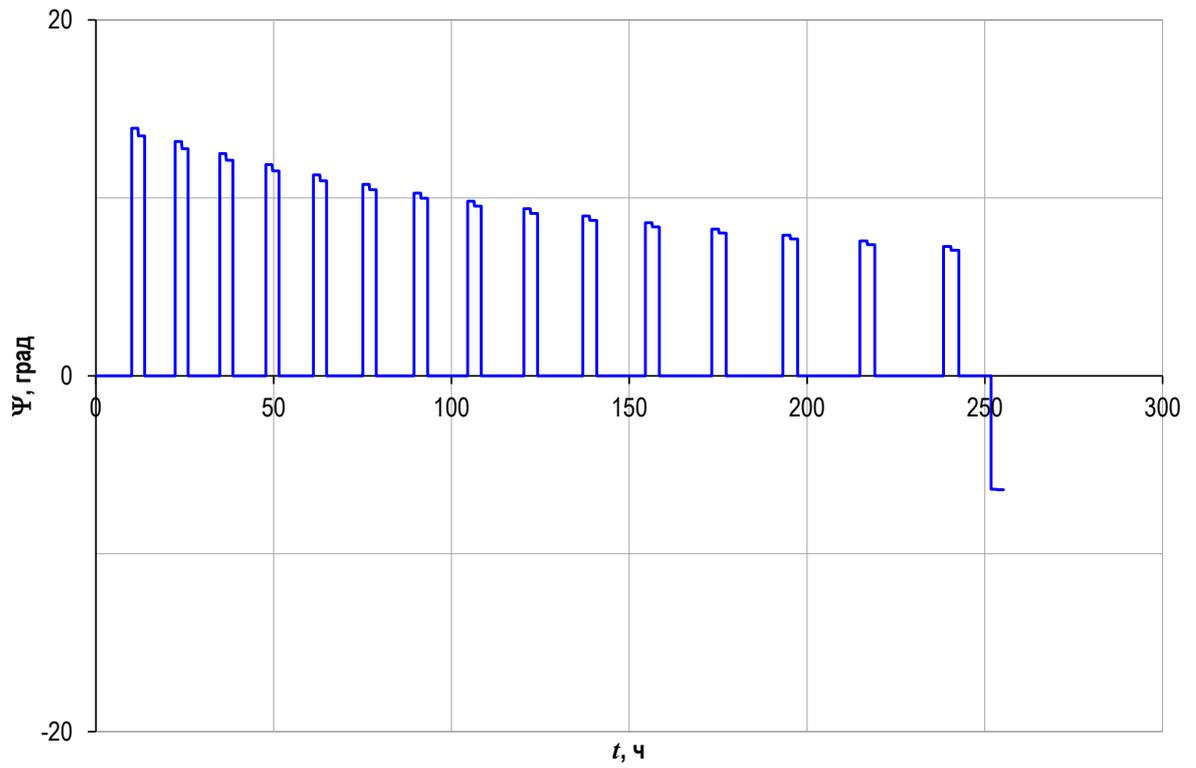


Рисунок 10.  $\psi(t)$  ( $c_t = 3$ )

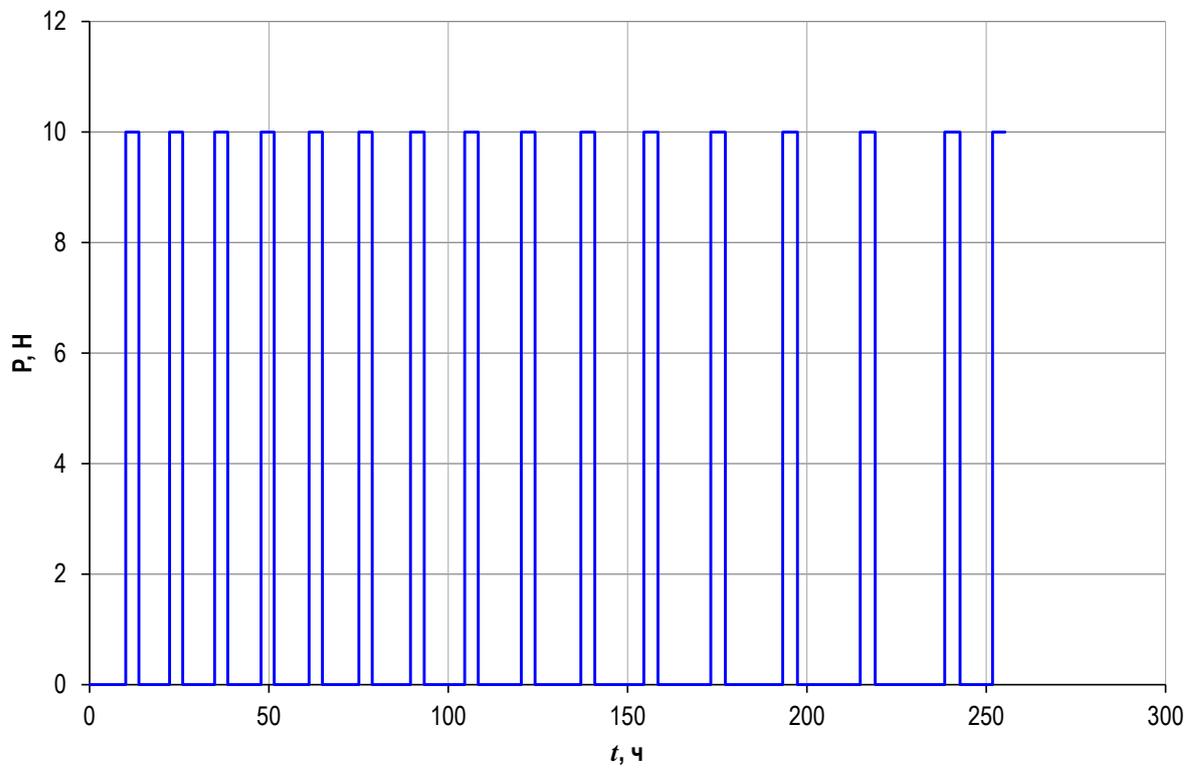


Рисунок 11.  $P(t)$  ( $c_t = 3$ )

Для различных значений  $c_t$  характер траектории существенно не меняется. Активные участки в основном сосредоточены вблизи перицентра с несколькими маневрами на заключительных витках в районе апоцентра. Полученные результаты качественно совпадают с результатами из работы [7]. Достигнутые значения критерия чуть хуже, однако задача решалась на достаточно грубой сетке – шаг аппроксимации управления по истинной долготе равен  $30^\circ$ . Заметим, что при решении промежуточной задачи в качестве начального приближения использовалось тривиальное управление  $\theta(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $\forall t \in [t_0, T]$ . Необходимо исследовать влияние на эффективность предложенного алгоритма использования в качестве начального приближения оптимального управления, полученного при решении задачи быстрогодействия или задачи минимизации истинной долготы (см. раздел 3).

### Выводы

С помощью ММЛ решена задача некомпланарного околоземного перелёта на ГСО за фиксированное время. Получено хорошее совпадение результатов с результатом других авторов, что наряду с результатами предыдущих работ [1; 19; 20] позволяет сделать вывод о возможности применения ММЛ для рассмотренных задач оптимизации траекторий КА с малой тягой.

Основные достоинства ММЛ для данной задачи:

- большая область сходимости, что позволяет выбирать тривиальные начальные приближения и отказаться от использования различных регуляризующих приёмов;
- работа в терминах целевой задачи без необходимости получения

дополнительных конструкций типа условий трансверсальности и др.;

- регулярная сходимости при наличии множества локальных экстремумов

Из недостатков можно отметить:

- достаточно медленную сходимости, присущую методам первого порядка;
- необходимость решения дополнительной промежуточной задачи для приближенного определения функции переключения тяги.

### Библиографический список

1. Вернигора Л.В., Казмерчук П.В. Оптимизация некомпланарных перелётов с малой тягой методом линеаризации // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2019. № 4. С. 19 - 26.
2. Старинова О.Л. Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. - Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. - 196 с.
3. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. № 3. С. 260 - 279.
4. Салмин В.В., Старинова О.Л., Волоцуев В.В., Петрухина К.В., Ткаченко И.С., Гоголев М.Ю., Четвериков А.С., Матерова И.Л. Оптимизация околоземных и межпланетных миссий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками // Труды МАИ. 2012. № 60. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35070>
5. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. - М.: Наука, 1975. - 702 с.

6. Kim M. Continuous Low-Thrust Trajectory Optimization: Techniques and Applications, Doctoral dissertation, Virginia Tech, Blacksburg, USA, 2005, 136 p.

7. Haberkorn T., Martinon P. and Gergaud J. Low Thrust Minimum-Fuel Orbital Transfer: A Homotopic Approach // Journal of Guidance Control and Dynamics, 2004, no. 27 (6).

DOI: [10.2514/1.4022](https://doi.org/10.2514/1.4022)

8. Петухов В.Г. Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 5. С. 373 - 385.

9. Леб Х.В., Могулкин А.И., Обухов В.А., Петухов В.Г., Попов Г.А. Анализ многоцветного лунного транспортного корабля, использующего ядерную энергетическую установку // Труды МАИ. 2013. № 70. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=44497>

10. Константинов М.С., Петухов В.Г., Леб Х.В. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте "Интергелио-Зонд" // Труды МАИ. 2012. № 60.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35372>

11. Леб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца // Труды МАИ. 2011. №

42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24275>

12. Константинов М.С., Мин Тейн. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 5. С. 282 - 290.

13. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. - М.: Наука, 1978. - 488 с.

14. Kelly H.J. Gradient theory of optimal flight path // ARS Journal, 1960, vol. 30, no. 10, pp. 59 - 64. DOI:[10.2514/8.5282](https://doi.org/10.2514/8.5282)
15. Caillau J.B., Gergaud J., Noailles J. 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite: Continuation on the Thrust // Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, no. 118 (3), pp. 541 - 565.
16. Jasper T. Low-thrust trajectory analysis for the geosynchronous mission // 10th Electric Propulsion Conference, International Electric Propulsion Conference, 1973. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-1072>
17. Jung-Hyun Jo, In-Kwan Park, Nam-Mi Choe, Man-Soo Choi. The Comparison of the Classical Keplerian Orbit Elements, Non-Singular Orbital Elements (Equinoctial Elements), and the Cartesian State Variables in Lagrange Planetary Equations with J2 Perturbation: Part I // Journal of Astronomy and Space Sciences, 2011, vol. 28, issue 1, pp. 37 – 54. DOI: [10.5140/JASS.2011.28.1.037](https://doi.org/10.5140/JASS.2011.28.1.037)
18. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 1993, Springer, DOI: [10.1007/978-3-540-78862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1)
19. Казмерчук П.В. Верификация метода линеаризации для задач оптимизации траекторий КА с малой тягой // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2018. № 1. С. 36 - 41.
20. Вернигора Л.В., Казмерчук П.В. Оптимизация траекторий КА с малой тягой методом линеаризации // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105759>

## **Linearization method in the problems of spacecraft with electric propulsion power plant transfer to geostationary orbit**

**Kazmerchuk P.V.\*, Vernigora L.V.\*\***

*Lavochkin Research and Production Association, NPO Lavochkin, 24, Leningradskay str., Khimki, Moscow region, 141400, Russia*

*\*e-mail: [pavel.kazmerchuk@gmail.com](mailto:pavel.kazmerchuk@gmail.com)*

*\*\*e-mail: [vlv@laspace.ru](mailto:vlv@laspace.ru)*

### **Abstract**

The work “Optimization of non-coplanar low-thrust flights by the linearization method” by P.V. Kazmerchuk and L.V. Vernigora solved the problem of non-coplanar flight from a high elliptical orbit to a geostationary orbit (GSO) within the minimum time (the task of optimal response) employing modified linearization method. In this task, the thrust acts continuously, with a constant level, and control is performed by the thrust vector turn. Another important class of optimization problems of transferring the spacecraft (SC) with electric propulsion power plant to the GSO are the problems of the final mass maximization under the limitations on the transfer time (the problem with the fixed time). The flight time increase relative to the optimal response problem allows reducing fuel consumption and increase the final mass by disabling the propulsion system at the trajectory legs with less efficient control. The article considers the non-adjustable EPPs, which thrust can be either zero, or maximum.

Maximum principle is widely used to solve the tasks of the EPP SC flight optimization. Application of the Maximum principle allows reducing the original optimization task to solving a boundary value problem. When solving such boundary value

problems, researchers face convergence problems, the initial approximation selection, stipulated by the locality of the Maximum principle, and the existence and uniqueness of solutions to the systems of nonlinear equations. To overcome the above said difficulties, the authors use various approaches, such as the continuation method, sequential refinement of motion models, combinations of numerical methods, and others. A specific feature of the fixed time task consists in the presence of a large number of local extrema, which further complicates the solution of the boundary value problem of the Maximum principle. This happens due to the fact that partial derivatives matrix of the discrepancy of a boundary value problem by its unknown parameters, one way or another used in all indirect methods, degenerates at the boundaries of the domains of attraction of local extrema.

Being a direct method operating in the controls space, the MLM belongs to the class of gradient methods (first order methods), which stipulates its large convergence domain. It turned out to be possible to use trivial initial approximations in the task of optimal response that allows expect its successful application for the tasks with a fixed time as well.

MLM also belongs to the class of local methods, but it is desirable to have an algorithm that allows getting solutions close to global ones. Looking ahead, we note that it was possible to parameterize the task with only two quantities: the initial value of the true longitude of the flight and the initial value of the EPS thrust. The resulting two-parameter family can be easily studied by direct enumeration to find the global minimum without the need to invoke global optimization methods.

The main problem when trying to use MLM for solving a task with a fixed time consists in determining the number of thrust switching points and their location on the trajectory, since there is no explicit information about the switching function. The solution

algorithm should automatically determine the optimal values of these parameters along with the thrust vector direction optimizing at the active legs of trajectory. The article proposes an algorithm that allows regularly solving the tasks of EPP SC flight to the GSO with a fixed time.

**Keywords:** linearization method, low thrust, nonlinear optimization, geostationary orbit, electrical propulsion power plant.

### References

1. Vernigora L.V., Kazmerchuk P.V. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*, 2019, no. 4, pp. 19 - 26.
2. Starinova O.L. *Raschet mezhplanetnykh pereletov kosmicheskikh apparatov s maloi tyagoi* (Interplanetary flights computing for a spacecraft with low thrust), Samara, Samarskii nauchnyi tsentr RAN, 2007, 196 p.
3. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2004, vol. 42, no. 3, pp. 260 - 279.
4. Salmin V.V., Starinova O.L., Volotsuev V.V., Petrukhina K.V., Tkachenko I.S., Gogolev M.Yu., Chetverikov A.S., Materova I.L. *Trudy MAI*, 2012, no. 60. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35070>
5. Grodzovskii G.L., Ivanov Yu.N., Tokarev V.V. *Mekhanika kosmicheskogo poleta. Problemy optimizatsii* (Space flight Mechanics. Optimization problem), Moscow, Nauka, 1975, 702 p.
6. Kim M. *Continuous Low-Thrust Trajectory Optimization: Techniques and Applications*, Doctoral dissertation, Virginia Tech, Blacksburg, USA, 2005, 136 p.

7. Haberkorn T., Martinon P. and Gergaud J. *Low Thrust Minimum-Fuel Orbital Transfer: A Homotopic Approach*, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, no. 27 (6). DOI: [10.2514/1.4022](https://doi.org/10.2514/1.4022)
8. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2019, vol. 57, no. 5, pp. 373 - 385.
9. Leb Kh.V., Mogulkin A.I., Obukhov V.A., Petukhov V.G., Popov G.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44497>
10. Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Leb Kh.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 60. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35372>
11. Leb Kh.V., Petukhov V.G., Popov G.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 42, URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24275>
12. Konstantinov M.S., Min Tein. *Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 5, pp. 282 - 290.
13. Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* (Approximate solution of optimal control problems), Moscow, Nauka, 1978, 488 p.
14. Kelly H.J. Gradient theory of optimal flight path, *ARS Journal*, 1960, vol. 30, no. 10, pp. 59 - 64. DOI: [10.2514/8.5282](https://doi.org/10.2514/8.5282)
15. Caillau J.B., Gergaud J., Noailles J. 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite: Continuation on the Thrust, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2003, no. 118 (3), pp. 541 - 565.
16. Jasper T. Low-thrust trajectory analysis for the geosynchronous mission, *10th Electric Propulsion Conference, International Electric Propulsion Conference*, 1973. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-1072>
17. Jung-Hyun Jo, In-Kwan Park, Nam-Mi Choe, Man-Soo Choi. The Comparison of the

Classical Keplerian Orbit Elements, Non-Singular Orbital Elements (Equinoctial Elements), and the Cartesian State Variables in Lagrange Planetary Equations with J2 Perturbation: Part I, *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 2011, vol. 28, issue 1, pp. 37 – 54. DOI: [10.5140/JASS.2011.28.1.037](https://doi.org/10.5140/JASS.2011.28.1.037)

18. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 1993, Springer, DOI: [10.1007/978-3-540-78862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1)

19. Kazmerchuk P.V. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*, 2018, no. 1, pp. 36 - 41.

20. Vernigora L.V., Kazmerchuk P.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105759>