УДК 62-40

Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой

Ибрагимов Д. Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

rikk.dan@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается алгоритм сведения задачи быстродействия линейной дискретной системой с выпуклым множеством допустимых управлений к случаю, когда ограничения на управление являются линейными. Метод базируется на построение последовательности вложенных многогранников, сходящейся к исходному множеству допустимых управлений. Тем самым, заменяя исходное выпуклое множество многогранником, удается получить допустимое для исходной системы гарантирующее в смысле быстродействия управление.

Ключевые слова: линейная дискретная система, задача быстродействия, многогранник, метрика Хаусдорфа.

1. Введение

Задача быстродействия является классической задачей теории оптимального управления. В монографиях [1,2,3,4,5] опубликованы основные результаты. На сегодняшний день существует несколько общепринятых принципиально различных методов решения задач оптимального управления: принцип максимума Понтрягина [1,3], метод множителей Лагранжа [2] и динамическое программирование [4]. Также существует подход, основанный на построении множеств управляемости [6,7].

В частности на основе семейства множеств 0-управляемости в [6] описана процедура построения оптимального по быстродействию управления для случая, когда управление является скалярным. Продолжение методов, заложенных в [6], на случай, когда множество допустимых управлений представляет собой произвольный многогранник, приведено в [7]. При этом оптимальное управление имеет аналитический вид.

Основной проблемой дальнейшего обобщения данных методов является необходимость построения множеств 0-управляемости, которые в случае общего вида множества допустимых управлений не являются многогранниками. Данный факт приводит к необходимости решения задач выпуклого программирования, вместо задач линейного программирования, как было предложено в [6,7].

2. Постановка задачи

Изучается дискретная линейная система управления с выпуклым компактным множеством допустимых управлений

$$
\begin{aligned}
&x(i+1) = Ax(i) + u(i),\ i = 0,1,2,\ldots \\
&x(0) = x_0, u(i) \in U,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $x(i) \in R^n$ – вектор состояния системы, $U \subset R^n$ – множество допустимых управлений, удовлетворяющее условиям: $0 \in \operatorname{int} U$, U – выпуклый компакт, $A \in R^{n \times n}$ – невырожденная матрица системы.

Для системы (2.1) решается задача быстродействия: для некоторого заданного $x(0) = x_0$ требуется построить набор допустимых управлений, переводящих систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов N_{min}. В [7] приведено решение поставленной задачи на основе множеств 0-управляемости для частного случая системы (2.1), в котором U является многогранником.

Таким образом, если будет построен алгоритм аппроксимации произвольного выпуклого компакта многогранником, то исходную задачу быстродействия системой вида (2.1) можно считать решенной путем сведения к случаю, описанному в [7].

Алгоритм аппроксимации основывается на конструировании последовательности многогранников $\{\hat{U}_k\}_{k \in N}$, сходящейся к выпуклому множеству допустимых управлений U. Каждый элемент последовательности является множеством вложенным в U, то есть состоит только из допустимых управлений. А следовательно, для каждого номера $k \in N$ управление, которое является оптимальным по быстродействию для системы

$$\begin{aligned} &x(i+1) = Ax(i) + u(i),\ i = 0,1,2,\ldots \\ &x(0) = x_0, u(i) \in \hat{U}_k, \end{aligned}$$

также является допустимым для системы (2.1), переводящим её в начало координат.

Для исследования вопросов сходимости будем считать исследуемые множества точками метрического пространства (K_n, ρ_H), где

$$K_n = \{X \subset R^n : X - \quad \varsigma\},$$
$$\rho_H(X,Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \| x - y \|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \| x - y \|\}. \qquad (2.2)$$

Метрическое пространство (2.2), как показано в [9], является полным.

3. Вычисления расстояния Хаусдорфа между многогранниками

Поскольку аппроксимация выпуклого компакта X производится в пространстве (2.2), то в качестве критерия качества аппроксимации $\hat{X}_k$ выступает расстояние Хаусдорфа $\rho_H(X, \hat{X}_k)$. Однако в общем случае вычислить расстояние между многогранником и произвольным выпуклым компактом невозможно. По этой причине в качестве критерия качества аппроксимации можно рассматривать расстояние Хаусдорфа между двумя последовательными приближениями множества X , то есть между двумя многогранниками $\rho_H(\hat{X}_k, \hat{X}_{k+1})$.

Далее продемострируем способ в явном виде вычислить расстояние между двумя произвольными многогранниками X, Y , удовлетворяющими условию $X \subset Y$. Для этого докажем ряд вспомогательных лемм.

Поскольку X, Y – многогранники, то они допускают представление

$$X = conv\{v^1, \ldots, v^N\}, \; ExtX = \{v^1, \ldots, v^N\},$$
$$Y = conv\{w^1, \ldots, w^N\}, \; ExtY = \{w^1, \ldots, w^M\}.$$

Лемма 3.1.

Пусть $X, Y \in K_n$ *– многогранники, причем* $X \subset Y$. *Тогда*

$$\rho_H(X,Y)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\|x-y\|=\sup_{y\in Y\setminus X}\inf_{x\in X}\|x-y\|.$$

Доказательство. Поскольку для каждого $x\in X\subset Y$ верно

$$\inf_{y\in Y}\|x-y\|\le\|x-x\|=0,$$

то

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|x-y\|=0.$$

Таким образом,

$$\rho_H(X,Y)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\|x-y\|=\sup_{y\in Y\setminus X}\inf_{x\in X}\|x-y\|.$$

Лемма 3.2.

Пусть $X\in K_n$. *Тогда для любого* $y\notin X$

$$\inf_{x\in X}\|x-y\|=\inf_{x\in\partial X}\|x-y\|.$$

Доказательство. Предположим, что существуют такие $y\notin X$ и $\tilde{x}\in\operatorname{int}X$, что

$$\inf_{x\in X}\|x-y\|=\|\tilde{x}-y\|.$$

Но тогда найдется $\varepsilon\in(0;1)$ такое, что $\tilde{x}-\varepsilon(\tilde{x}-y)\in X$.

$$\|\tilde{x}-\varepsilon(\tilde{x}-y)-y\|=\|(1-\varepsilon)(\tilde{x}-y)\|=(1-\varepsilon)\|\tilde{x}-y\|<\|\tilde{x}-y\|.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, для каждого $y\notin X$

$$\inf_{x\in X}\|x-y\|=\inf_{x\in\partial X}\|x-y\|.$$

Будем считать, что $y\notin X$. Обозначим через

$$x^*(y)=arg\ min_{x\in\partial X}\|x-y\|=arg\ min_{x\in X}\|x-y\|.$$

Лемма 3.3.

Пусть $X \in K_n$ *– выпуклое множество. Тогда для любого* $y \notin X$

$$x^*(y) = x^*(x^*(y) + \alpha(y - x^*(y))).$$

Доказательство. Предположим, что существуют $\alpha > 1$ и $y \in X$ такие, что

$$x^*(x^*(y) + \alpha(y - x^*(y))) = \tilde{x} \neq x^*(y).$$

Без ограничения общности будем полагать, что $x^*(y) = 0$.

Найдем ортогональную проекцию y на $Lin\{\tilde{x}\} = Aff\{\tilde{x}, x^*(y)\}$ и обозначим ее $\hat{y}$:

$$\hat{y} = \frac{(y, \tilde{x})}{(\tilde{x}, \tilde{x})}\tilde{x}.$$

Предположим, что $(y, \tilde{x}) \leq 0$. В этом случае

$$\| \tilde{x} - x^*(y) + \alpha(y - x^*(y)) \|^2 = \| \tilde{x} - \alpha y \|^2 = \| (\simeq y) - (\alpha - 1)y \|^2 =$$

$$= \| \tilde{x} - y \|^2 + (\alpha - 1)^2 \| y \|^2 - 2(\tilde{x} - y, y)(\alpha - 1) =$$

$$= \| \tilde{x} - y \|^2 + (\alpha - 1)^2 \| y \|^2 - 2(\alpha - 1)(\tilde{x}, y) + 2(\alpha - 1) \| y \|^2 > \| \tilde{x} - y \|^2 .$$

Пришли к противоречию. Тогда $(\tilde{x}, y) > 0$.

Предположим, что $\frac{(\tilde{x}, y)}{(\tilde{x}, \tilde{x})} > 1$. В этом случае

$$\| \tilde{x} - y \|^2 = \| \tilde{x} \|^2 - 2(\tilde{x}, y) + \| y \|^2 = ((\tilde{x}, \tilde{x}) - (\tilde{x}, y)) - (\tilde{x}, y) + \| y \|^2 < \| y \|^2 = \| y - x^*(y) \|^2 .$$

Пришли к противоречию. То есть $\frac{(\tilde{x}, y)}{(\tilde{x}, \tilde{x})} \leq 1$

Таким образом,

$$0 < \frac{(\tilde{x}, y)}{(\tilde{x}, \tilde{x})} \leq 1.$$

Следовательно $\hat{y} \in conv\{0, \tilde{x}\} = conv\{x^*(y), \tilde{x}\} \subset X$. Причем

$$\| y - \hat{y} \| = \min_{x \in Aff\{\tilde{x}, x^*(y)\}} \| y - x \| < \| y - x^*(y) \| = \min_{x \in X} \| y - x \| \leq \| y - \hat{y} \|.$$

Пришли к противоречию. Тогда $\tilde{x} = x^*(y)$.

Рассмотрим случай $\alpha \in (0;1)$. Введем обозначение $\alpha y = z$. Тогда $y = \frac{1}{\alpha} z$, $\frac{1}{\alpha} > 1$.

Согласно предыдущим рассуждениям

$$x^*\left(\frac{1}{\alpha} z\right) = x^*(z) \Rightarrow x^*(y) = x^*(\alpha y).$$

Лемма 3.4.

Пусть $X, Y \in K_n$ *– многогранники, а также* $X \subset Y$. *Тогда*

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \| x - y \| = \sup_{y \in \partial Y} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \|.$$

Доказательство. В силу леммы 3.1

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \| x - y \| = \sup_{y \in Y \setminus X} \inf_{x \in X} \| x - y \| = \sup_{y \in Y \setminus X} \| x^*(y) - y \|.$$

Обозначим

$$y^* = arg\,max_{y \in Y \setminus X} \| x^*(y) - y \|.$$

Предположим, что $y^* \in \operatorname{int} Y$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$y^* + (-x^*(y^*) + y^*)\varepsilon \in Y \setminus X.$$

Согласно лемме 3.3

$$x^*(y^* + (y^* - x^*(y))\varepsilon) = x^*(x^*(y^*) + (y^* - x^*(y))(1+\varepsilon)) = x^*(y^*).$$

Тогда

$$\| y^* + (y^* - x^*(y^*))\varepsilon - x^*(y^* + (y^* - x^*(y^*))\varepsilon) \| = \| y^* + (y^* - x^*(y^*))\varepsilon - x^*(y^*) \| =$$

$$= (1+\varepsilon) \| x^*(y^*) - y^* \| > \| x^*(y^*) - y^* \| .$$

Пришли к противоречию, то есть $y^* \in \partial Y$. Тогда, учитывая, что согласно лемме 3.2 $x^*(y^*) \in \partial X$,

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \| x - y \| = \sup_{y \in \partial Y} \inf_{x \in X} \| x - y \| = \sup_{y \in \partial Y} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \| .$$

Лемма 3.5.

Пусть $X, Y \in K_n$ *– многогранники, а также* $X \subset Y$. *Тогда*

$$\sup_{y \in \partial Y} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \| = \sup_{y \in Ext Y} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \| .$$

Доказательство. Обозначим

$$y^* = arg\, max_{y \in \partial Y} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \| .$$

Пусть так же $Y_1, \ldots, Y_K$ – $(n-1)$ -мерные грани множества Y . Так как для многогранника Y объединение всех его $(n-1)$-мерных граней является границей ∂Y , то найдется $k = \overline{1, K}$ такой, что $y^* \in Y_k$.

Покажем, что

$$f(y) = \| x^*(y) - y \|$$

является выпуклым по y на множестве Y_k функционалом.

Выберем произвольные $y_1, y_2 \in Y_k$ и $\lambda \in (0;1)$

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = \| x^*(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) - (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \| = \inf_{x \in X} \| x - (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \| \le$$

$$\le \inf_{x \in X} (\| \lambda x - \lambda y_1 \| + \| (1-\lambda) x - (1-\lambda) y_2 \|) \le \inf_{x \in X} \lambda \| x - y_1 \| + \inf_{x \in X} (1-\lambda) \| x - y_2 \| =$$

$$= \lambda \| x^*(y_1) - y_1 \| + (1-\lambda) \| x^*(y_2) - y_2 \| = \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2).$$

Поскольку, $f(y)$ выпуклая функция, то она достигает свое минимальное на Y_k значение на его границе, то есть на $(n-2)$-мерной грани множества Y.

Продолжая рассуждения по индукции, получим, что y^* принадлежит 0-мерной грани множества Y, то есть

$$y^* \in ExtY.$$

Объединия воедино результаты лемм 3.1-5, получим основную теорему данного раздела.

Теорема 3.1.

Пусть $X, Y \in K_n$ *– выпуклые многогранники,* $X \subset Y$. *Тогда*

$$\rho_H(X, Y) = \sup_{y \in ExtY} \inf_{x \in \partial X} \| x - y \| = \max_{i = \overline{1, M}} \inf_{x \in \partial X} \| w^i - x \|.$$

То есть фактически задача вычисления расстояния между двумя вложенными многогранниками сводится к ортогональному проектированию точки на многогранник

– задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями.

4. Алгоритм аппроксимация выпуклых компактов

В этом разделе приведен метод построения нижней оценки произвольного выпуклого компакта многогранником. Идея метода основывается на построении равномерной сетки на n-мерном кубе и продолжении её на выпуклое множество.

Обозначим через $\Delta = [-1;1]^n \subset R^n$ n-мерный куб с центром в начале координат и длиной ребра равной 2. Очевидно, что справедливо также представление

$$\Delta = \{x \in R^n : \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| \le 1\}. \qquad (4.1)$$

Построим на $\partial\Delta$ равномерную сетку

$$\Delta_m = \bigcup_{i=1}^{n} \{0;\pm\frac{1}{m};\pm\frac{2}{m};\ldots;\pm 1\}^{i-1} \times \{-1;1\} \times \{0;\pm\frac{1}{m};\pm\frac{2}{m};\ldots;\pm 1\}^{n-i}. \qquad (4.2)$$

Лемма 4.1.

Пусть Δ_m *определено соотношением (4.2). Тогда*

$$card\Delta_m = \sum_{i=1}^{n} C_n^i (2m-1)^{n-i} 2^i.$$

Доказательство. Разобьем представление (4.2) на объединение непересекающихся множеств Δ_m^i, где Δ_m^i – множество тех точек из Δ_m, у которых ровно i координат равны по модулю 1. Тогда очевидно, что размер множества Δ_m^i определяется через число сочетаний C_n^k следующим образом:

$$card\Delta_m^i = C_n^i (2m-1)^{n-i} 2^i.$$

Учитывая, что

$$\Delta_m = \bigcup_{i=i}^{n} \Delta_m^i,\ \Delta_m^i \cap \Delta_m^j = \varnothing,\ i \neq j,$$

получим

$$card\Delta_m = \sum_{i=1}^{n} \Delta_m^i = \sum_{i=1}^{n} C_n^i (2m-1)^{n-i} 2^i.$$

Исследуем теперь ассимптотические свойства сетки Δ_m.

Лемма 4.2.

Пусть семейство сеток $\{\Delta_m\}_{m \in N}$ *рассматривается как последовательность метрического пространства* (K_n, ρ_H). *Тогда*

$$\Delta_m \overset{m \to \infty}{\rightarrow} \partial\Delta.$$

Доказательство. Рассмотрим величину $\rho_H(\Delta_m, \partial\Delta)$. Поскольку $\Delta_m \subset \partial\Delta$ по построению, то

$$\rho_H = \max\{\sup_{x \in \Delta_m} \inf_{y \in \partial\Delta} \| x - y \|; \sup_{y \in \partial\Delta} \inf_{x \in \Delta_m} \| x - y \|\} = \sup_{y \in \partial\Delta} \inf_{x \in \Delta_m} \| x - y \|.$$

В силу того, что множество рациональных чисел является плотным в R, для любого $y \in \partial\Delta$ найдутся $m \in N$ и $m_1, \ldots, m_n = \overline{-m, m}$ такие, что

$$\max_{i=\overline{1,n}} | y_k - \frac{m_i}{m} | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим через

$$\hat{y} = (\frac{m_1}{m}, \ldots, \frac{m_n}{m})^T \in \Delta_m.$$

Тогда

$$\| y - \hat{y} \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | y_k - \frac{m_i}{m} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Тогда для любого $y \in \partial\Delta$

$$\inf_{x \in \Delta_m} \| y - x \| \leq \| y - \hat{y} \| < \varepsilon.$$

Поскольку это справелоиво для любой точки из границы куба, то аналогичное соотношение справедливо и для точной верхней границы

$$\sup_{y \in \partial\Delta} \inf_{x \in \Delta_m} \| y - x \| \leq \| y - \hat{y} \| \leq \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m : \forall \tilde{m} > m \;\; \rho_H(\Delta_{\tilde{m}}, \partial\Delta) < \varepsilon,$$

то есть

$$\Delta_m \xrightarrow{m \to \infty} \partial\Delta.$$

Теперь продолжим сетку Δ_m на некоторый произвольный выпуклый компакт *X*. Для этого построим непрерывное в метрическом пространстве (K_n, ρ_H) преобразование, которое переводит куб Δ в выпуклое множество *X*. Для этого докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.3.

Пусть отображение $T: R^n \to R^n$ *– непрерывно во всем* R^n*. Тогда отображение* $T: K_n \to K_n$ *также является непрерывным во всем* K_n*, где*

$$T(X) = \{y \in R^n : \exists x \in X,\, y = T(x)\}.$$

Доказательство. Т.к. $T: R^n \to R^n$ непрерывно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| T(x) - T(y) \| < \varepsilon.$$

Предположим, что $\rho_H(X,Y) < \delta$, где $X, Y \in K_n$. Тогда

$$\max\{\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \| x - y \|; \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} \| x - y \|\} < \delta.$$

Обозначим через

$$x^*(y) = arg\, min_{x\in X} \| x - y \|,$$
$$y^*(x) = arg\, min_{y\in Y} \| x - y \|.$$

Тогда для любых $\tilde{x} \in X$, $\tilde{y} \in Y$

$$\| y^*(\tilde{x}) - \tilde{x} \| = \inf_{y\in Y} \| \tilde{x} - y \| < \delta,$$
$$\| x^*(\tilde{y}) - \tilde{y} \| = \inf_{x\in X} \| \tilde{y} - x \| < \delta.$$

Тогда

$$\begin{array}{ll} \| T(y^*(\tilde{x})) - T(\tilde{x}) \| < \varepsilon, & \inf_{y\in Y} \| T(y) - T(\tilde{x}) \| < \| T(y^*(\tilde{x})) - T(\tilde{x}) \| < \varepsilon, \\ \| T(x^*(\tilde{y})) - T(\tilde{y}) \| < \varepsilon, \Rightarrow & \inf_{x\in X} \| T(x) - T(\tilde{y}) \| < \| T(x^*(\tilde{y})) - T(\tilde{y}) \| < \varepsilon. \end{array}$$

Поскольку эти соотношения верны для любых точек $\tilde{x} \in X$, $\tilde{y} \in Y$, аналогичные соотношения будут верны и для тех точек, на которых достигается максимум этих выражений, то есть

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|T(x)-T(y)\|<\varepsilon,$$
$$\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\|T(x)-T(y)\|<\varepsilon.$$

Т.о.,

$$\varepsilon>\max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|T(x)-T(y)\|;\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\|T(x)-T(y)\|\}=$$

$$=\max\{\sup_{x\in T(X)}\inf_{y\in T(Y)}\|x-y\|;\sup_{y\in T(Y)}\inf_{x\in T(X)}\|x-y\|\}=\rho_H(X,Y).$$

Определим вспомогательную функцию

$$\alpha(x,X)=\max_{\substack{\alpha x\in X\\ \alpha>0}}\alpha,$$

где $X\in K_n$ – некоторый выпуклый компакт такой, что $0\in\operatorname{int}X$. Построим отображение $T_X:R^n\to R^n$ следующим образом

$$T_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(x,X)}{\alpha(x,\Delta)}\cdot x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\tag{4.3}$$

Сформулируем свойства отоборажения T_X в виде следующей леммы

Лемма 4.4.

1) Отображение T_X – биекция;

2) $x\in\partial\Delta$ тогда и только тогда, когда $T_X(x)\in\partial X$.

Доказательство. Выберем произвольное положительное число $\gamma>0$.

$$\alpha(\gamma x, X) = \max_{\substack{\alpha\gamma x\in X\\ \alpha>0}} \alpha = \frac{1}{\gamma}\max_{\substack{(\alpha\gamma)x\in X\\ (\alpha\gamma)>0}} \alpha\gamma = \frac{1}{\gamma}\alpha(x, X).$$

Для проверки биективности построим отображение обратное к T_X :

$$T_X(y)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(y,\Delta)}{\alpha(y,X)}\cdot y, & y\neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Для точки 0 свойство биекции очевидно выполнено. Рассмотрим произвольную точку $y \neq 0$.

$$T_X(T_X^{-1}(y)) = \frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha(y,\Delta)}{\alpha(y,X)}\cdot y, X\right)}{\alpha\left(\dfrac{\alpha(y,\Delta)}{\alpha(y,X)}\cdot y, \Delta\right)}\cdot\frac{\alpha(y,\Delta)}{\alpha(y,X)}\cdot y = \frac{\dfrac{\alpha(y,X)}{\alpha(y,\Delta)}\cdot\alpha(y,X)}{\dfrac{\alpha(y,X)}{\alpha(y,\Delta)}\cdot\alpha(y,\Delta)}\cdot\frac{\alpha(y,\Delta)}{\alpha(y,X)}\cdot y = y.$$

Рассмотрим произвольную точку $x \neq 0$.

$$T_X^{-1}(T_X(x)) = \frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha(x,X)}{\alpha(x,\Delta)}\cdot x, \Delta\right)}{\alpha\left(\dfrac{\alpha(x,X)}{\alpha(x,\Delta)}\cdot x, X\right)}\cdot\frac{\alpha(x,X)}{\alpha(x,\Delta)}\cdot x = \frac{\dfrac{\alpha(x,\Delta)}{\alpha(x,X)}\cdot\alpha(x,\Delta)}{\dfrac{\alpha(x,\Delta)}{\alpha(x,X)}\cdot\alpha(x,X)}\cdot\frac{\alpha(x,X)}{\alpha(X,\Delta)}\cdot x = x.$$

Таким образом, отображение T_X обратимо, то есть является биективным.

По построению верно, что $\alpha(x, X) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \partial X$. Выберем произвольную точку $x \in \partial\Delta$. Тогда

$$T_X(x) = \alpha(x, X)\cdot x,$$

$$\alpha(T_X(x), X) = \alpha(\alpha(x, X)\cdot x, X) = \frac{\alpha(x, X)}{\alpha(x, X)} = 1.$$

Откуда следует, что

$$T_X(x) \in \partial X.$$

Выберем произвольную точку $y \in \partial X$. Тогда

$$T_X^{-1}(y) = \alpha(y, \Delta) \cdot y,$$

$$\alpha(T_X^{-1}(y), \Delta) = \alpha(\alpha(y, \Delta) \cdot y, \Delta) = \frac{\alpha(y, \Delta)}{\alpha(y, \Delta)} = 1.$$

Откуда следует, что

$$T_X^{-1}(x) \in \partial \Delta.$$

Лемма 4.5.

Отображение $T_X : R^n \to R^n$ *непрерывно в каждой точке* R^n.

Доказательство. Сначала докажем, что отображение T_X непрерывно в точке 0. Выберем произвольную последовательность $\{x_k\}_{k \in N} \subset R^n$ такую, что

$$\| x_k \| \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Тогда в силу того, что $0 \in \operatorname{int} X$, $0 \in \operatorname{int} \Delta$,

$$\exists m : \forall k \geq m \;\; x_k \in \operatorname{int} X \cap \operatorname{int} \Delta.$$

Обозначим через

$$y_{1k} = \alpha(x_k, X) x_k,$$
$$y_{2k} = \alpha(x_k, \Delta) x_k.$$

Из определения функции $\alpha(x, X)$ следует, что $y_{1k} \in \partial X$, $y_{2k} \in \partial \Delta$. Очевидно, что справедливо представление

$$\alpha(x_k, X) = \frac{\| y_{1k} \|}{\| x_k \|},\ \alpha(x_k, \Delta) = \frac{\| y_{2k} \|}{\| x_k \|}.$$

Причем

$$\| y_{1k} \| \leq \text{diam } X < \infty,\ \| y_{2k} \| \geq 1.$$

Тогда

$$\| T_X(x_k) \| = \left| \| \frac{\alpha(x_k, X)}{\alpha(x_k, \Delta)} \cdot x_k \right| \| = \frac{\| y_{1k} \|}{\| x_k \|} \cdot \frac{\| x_k \|}{\| y_{2k} \|} \cdot \| x_k \| = \frac{\| y_{1k} \|}{\| y_{2k} \|} \cdot \| x_k \| \leq$$

$$\leq \frac{\text{diam } X}{1} \cdot \| x_k \| \xrightarrow{k \to \infty} 0 = \| T_X(0) \|.$$

Теперь покажем, что T_X непрерывна в любой точке $x \neq 0$. Пусть $\{x_k\}_{k \in N} \subset R^n$, $x_k \xrightarrow{k \to \infty} x$.

Обозначим через

$$y_k = \alpha(x_k, X) x_k \in \partial X,$$
$$y = \alpha(x, X) x \in \partial X.$$

При этом в силу того, что X – выпуклый компакт, справедливо соотношение

$$y_k \xrightarrow{k \to \infty} y.$$

Причем в силу того, что $\| x \| \neq 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \alpha(x_k, X) = \lim_{k \to \infty} \frac{\| y_k \|}{\| x_k \|} = \lim_{k \to \infty} \frac{\| y \|}{\| x \|} = \alpha(x, X).$$

То есть функция $\alpha(x, X)$ непрерывна по первому аргументу во всех точках $x \neq 0$.

Тогда отображение T_X является произведением трех непрерывных функций, то есть также является непрерывным в любой точке $x \neq 0$.

Окончательно получаем, что $T_X \in C(R^n)$.

Лемма 4.6.

Пусть отображение $\operatorname{conv} : K_n \to K_n$ *определяется следующим образом:*

$$convX = \{x \in R^n : \exists m \in N, x_1, \ldots, x_m \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0;1], \sum_{i=1}^{m} = 1 : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = x\}.$$

Тогда отображение *conv* непрерывно в (K_n, ρ_H).

Доказательство. По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке

$$convX = \{x \in R^n : \exists x_1, \ldots, x_{n+1} \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0;1], \sum_{i=1}^{n+1} = 1 : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x\}.$$

Выберем два множества $X, Y \in K_n$ так, чтобы $\rho_H(X,Y) < \delta$, то есть

$$\max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \| x - y \|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \| x - y \|\} < \delta,$$

$$\begin{array}{l} \forall x \in X \ \inf\limits_{y \in Y} \| x - y \| < \delta, \\ \forall y \in Y \ \inf\limits_{x \in X} \| x - y \| < \delta, \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \forall x \in X \ \ \exists y \in Y : \| x - y \| < \delta, \\ \forall y \in Y \ \ \exists x \in X : \| x - y \| < \delta. \end{array}$$

Выберем две точки $x \in convX$, $y \in convY$. Тогда по теореме Каратеодори

$$\begin{array}{l} \exists x_1, \ldots, x_{n+1} \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0;1], \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 : x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \\ \exists y_1, \ldots, y_{n+1} \in Y, \mu_1, \ldots, \mu_{n+1} \in [0;1], \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1 : y = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i. \end{array}$$

Тогда для любого $i = \overline{1, n+1}$ найдутся точки $\tilde{x}_i \in X$, $\tilde{y}_i \in Y$ такие, что $\| x_i - \tilde{y}_i \| < \delta$, $\| y_i - \tilde{x}_i \| < \delta$. Причем, верно включение

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \tilde{x}_i \in convX, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \tilde{y}_i \in convY.$$

$$\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \tilde{y}_i \| \le \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \| x_i - \tilde{y}_i \| < \delta,$$
$$\| \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i - \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \tilde{x}_i \| \le \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \| y_i - \tilde{x}_i \| < \delta.$$

То есть

$$\begin{array}{ll} \forall x \in convX \ \exists \tilde{y} \in Y : \| x - \tilde{y} \| < \delta, & \inf\limits_{y \in convY} \| x - y \| < \delta, \\ \forall y \in convY \ \exists \tilde{x} \in X : \| y - \tilde{x} \| < \delta, \Rightarrow & \inf\limits_{x \in convX} \| x - y \| < \delta. \end{array}$$

Поскольку это справедливо для любых точек $x \in convX$, $y \in Y$, то аналогичные соотношения будут справедливы и для точной верхней грани

$$\sup_{x \in convX} \inf_{y \in convY} \| x - y \| \le \delta,$$
$$\sup_{y \in convY} \inf_{x \in convX} \| x - y \| \le \delta.$$

$$\rho_H(convX, convY) = \max\{ \sup_{x \in convX} \inf_{y \in convY} \| x - y \|; \sup_{y \in convY} \inf_{x \in convX} \| x - y \| \} \le \delta.$$

Теперь на основе доказанных лемм сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 4.1.

Пусть $X \in K_n$ *– выпуклый компакт,* $0 \in \operatorname{int} X$.

Тогда

$$T_X(\Delta_m) \xrightarrow{m \to \infty} \partial X,$$

$$convT_X(\Delta_m) \xrightarrow{m \to \infty} X,$$

Доказательство. Согласно лемме 4.2 последовательность $\{\Delta_m\}_{m \in N}$ сходится в метрическом пространстве (K_n, ρ_H) к границе куба $\partial\Delta$. Поскольку отображение

$T_X : R^n \to R^n$ согласно лемме 4.5 непрерывно, то по лемме 4.3 соответствующее ему отображние $T_X : K_n \to K_n$ также непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Тогда

$$T_X(\Delta_m) \overset{m\to\infty}{\to} T_X(\Delta) = \partial X,$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы 4.4.

Поскольку по лемме 4.6 процедура построеения выпуклой оболочки является непрерывным отображением в (K_n, ρ_H), то

$$conv T_X(\Delta_m) \overset{m\to\infty}{\to} conv(\partial X) = X.$$

Заметим, что множество $conv T_X(\Delta_m)$ является многогранником, причем, очевидно включение

$$Extconv T_X(\Delta_m) \subset T_X(\Delta_m).$$

То есть фактически теорема 4.1 гарантирует, что, выбирая номер *m*, можно с любой степенью точности (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимировать произвольный выпуклый компакт вложенным в него многогранником, число вершин которого оценивается с помощью леммы 4.1.

5. Пример

Рассмотрим предложенный метод аппроксимации выпуклого компакта на примере построения оценки множества допустимых управлений в системе управления угловым движением аэростата. Уравнения, описывающие движение движение модели аэростата в пространстве, представляют собой систему обычных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm\frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V^2), \\ \dot{\alpha} = \omega, \\ V = |\omega R|, \end{cases} \tag{5.1}$$

Подробный вывод уравнений (5.1) можно найти в [11].

Здесь α и ω представляют собой угловое отклонение и угловую скорость исследуемого объекта соответственно; управление на практике осуществляется за счёт изменения скорости вращения лопастей вентиляторных двигателей – V_e. S – площадь диска вентилятора, ρ – плотность воздуха, R – расстояние от оси вращения до вентилятора, V_{max} – скорость воздуха после выхода из вентилятора в случае работы вентилятора на максимально допустимой мощности, J – момент инерции тела относительно оси вращения, δ – коэффициент вязкого трения о воздух.

В результате линеаризации и дискретизации была получена следующая система управления:

$$\begin{aligned} &x(i+1) = Ax(i) + u(i),\ x(i) = (\alpha(i), \omega(i))^T, \\ &u(i) \in U = \{u \in R^2 : u^T H u \le 1\}, i \in N, \\ &A = \begin{pmatrix} 1.10 & 0.29 \\ 2.90 & 3.71 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 6267.38 & -329.50 \\ -329.50 & 24.14 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Параметры системы получены приближенно на основании модели, описанной в [11].

В силу удобства в качестве прямоугольника, на который накладывается сетка выберем

$$\Delta = conv\left\{\begin{pmatrix}0.024\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.024\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.024\\-0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.024\\-0.4\end{pmatrix}\right\}.$$

Поскольку по построению $\Delta_{2^m} \subset \Delta_{2^{m+1}}$, то аппроксимацию согласно теореме 4.1 будем проводить для $m \in \{1,2,4,8,\ldots\}$. Результаты расчетов проиллюстрируем графически.

$$T_U(\Delta_1) = \left\{\begin{pmatrix}-0.0224\\-0.3737\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0064\\0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0064\\-0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0224\\0.3737\end{pmatrix}\right\}.$$

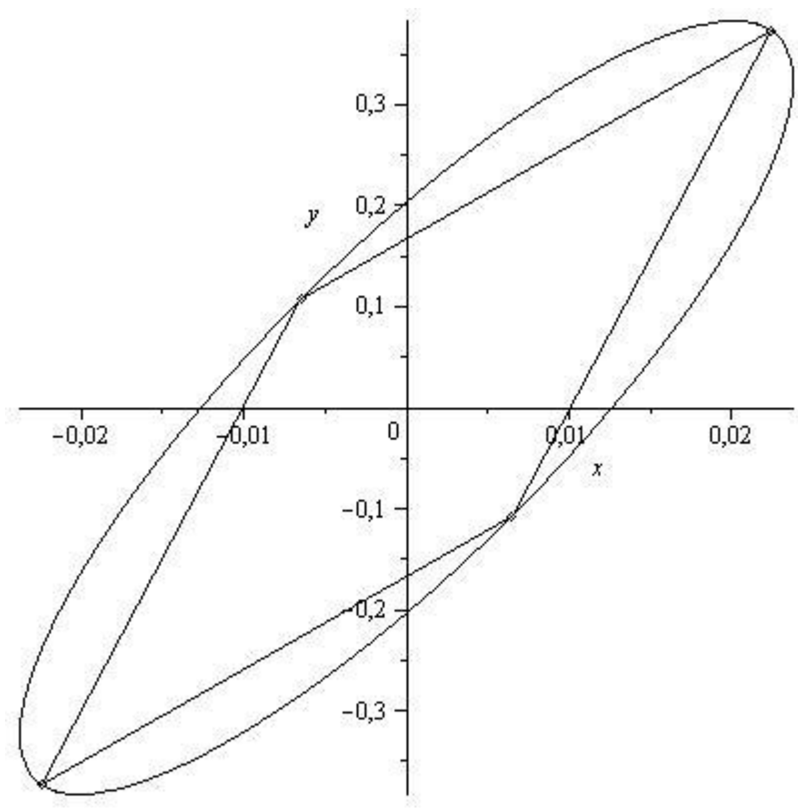

Рис. 1. Множество допустимых управлений системы (5.2) и его аппроксимация многогранником с вершинами $T_U(\Delta_1)$.

$$T_U(\Delta_2) = \left\{\begin{pmatrix}-0.0224\\-0.3737\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0064\\0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0064\\-0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0224\\0.3737\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-0.0126\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-0.2035\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0.2035\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0126\\0\end{pmatrix}\Bigg\}.$$

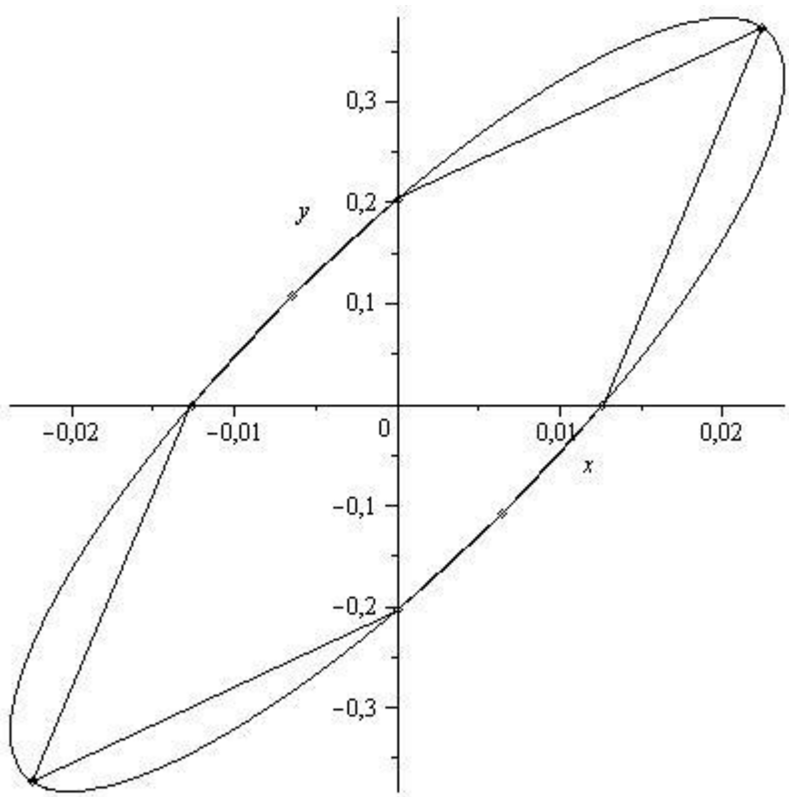

Рис. 2. Множество допустимых управлений системы (5.2) и его аппроксимация многогранником с вершинами $T_U(\Delta_2)$.

$$T_U(\Delta_4)=\Bigg\{\begin{pmatrix}-0.0224\\-0.3737\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0064\\0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0064\\-0.1076\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0224\\0.3737\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.0126\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\-0.2035\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0.2035\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0126\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0020\\-0.1682\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0094\\-0.3160\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0086\\0.0718\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0.0020\\0.1682\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0094\\0.3160\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0086\\-0.0718\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.0042\\0.1420\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.0042\\-0.1420\end{pmatrix}\Bigg\}.$$

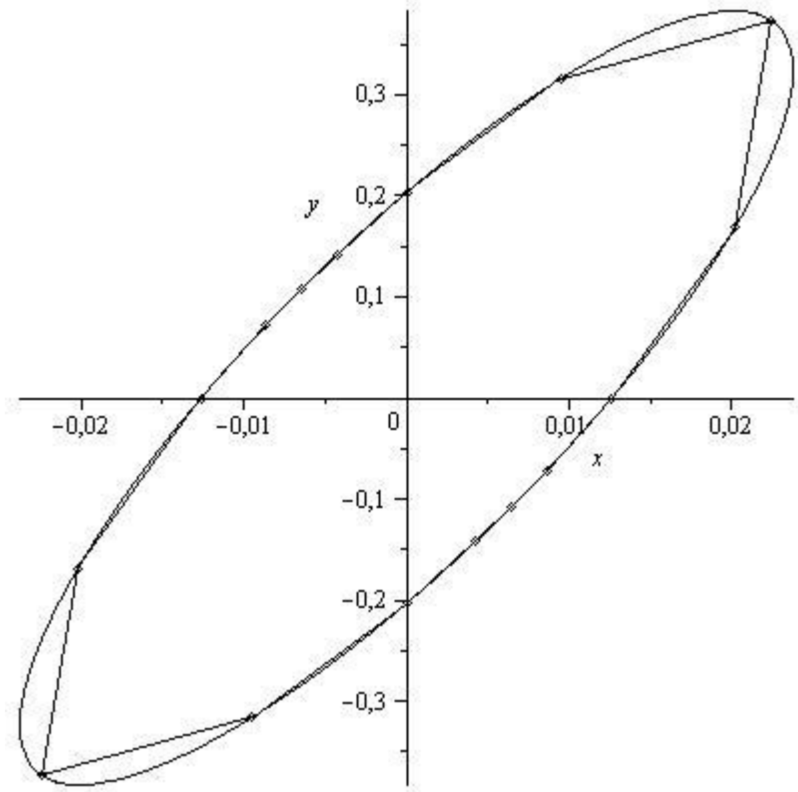

Рис. 3. Множество допустимых управлений системы (5.2) и его аппроксимация многогранником с вершинами $T_U(\Delta_4)$.

Погрешность аппроксимации многогранником $convT_U(\Delta_4)$ в смысле метрики Хаусдорфа составляет

$$\rho_H(U, convT_U(\Delta_4)) = 0.0048.$$

Библиографический список

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972. – 576 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979. – 430 с.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969. – 393 с.

4. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.

5. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969. – 408 с.

6. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и Телемеханика. 2015. №9. С.3-30.

7 Ибрагимов Д.Н. Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Журнал «Труды МАИ», 2015, №83: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=62313

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

9. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. - М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000. – 352 с.

10. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.

11. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №1. С. 107-119.