



Научная статья / Original Article

УДК 519.6: 621.396.69

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188113>

EDN: <https://www.elibrary.ru/UMZDUN>

## ОБОБЩЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ УНИФИКАЦИИ 2.5D/3D ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЧ-КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Д.В. Ключкин , А.А. Слободяненко , С.П. Куксенко 

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники»,  
г. Томск, Россия

✉ [dmitrii.v.kliukin@tusur.ru](mailto:dmitrii.v.kliukin@tusur.ru)

---

**Цитирование:** Ключкин Д.В., Слободяненко А.А., Куксенко С.П. Обобщённые интегральные операторы для унификации 2.5d/3d электродинамического моделирования свч-композитных структур методом моментов // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188113>

**Аннотация.** В авиационно-космической технике широко используются СВЧ-устройства, реализуемые в виде сложных композитных структур (межсоединений высокоскоростных печатных плат, СВЧ интегральных схем, рассеивателей, антенных систем и пр.), характеристики которых в существенной степени определяются их геометрическим размерами и материалами, из которых они созданы. Проектирование таких устройств не обходится без применения компьютерного моделирования, основанного на численных методах электродинамики. Среди этих методов широко распространено использование метода моментов, основанного на сведении системы интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений. Для электродинамического моделирования отдельно используются два подхода, применимых к решению двух классов задач – 3D и 2.5D. Для трёхмерных композитных структур используется формулировка EFIE-PMCHWT

(Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai), основанная на совместном применении интегральных уравнений электрического и магнитного полей, а для планарных структур – интегральных уравнений для смешанных потенциалов МРІЕ с использованием диадической функции Грина. Представлены результаты обобщения интегральных операторов, позволяющие унифицировать 2.5D и 3D подходы к электродинамическому моделированию композитных структур методом моментов. На примере трёх типовых структур (микрополосковая линия передачи, катушка индуктивности и фильтр нижних частот) выполнена верификация этого обобщения, используя результаты, полученные в стороннем программном обеспечении. Результаты моделирования S-параметров типовых структур воспроизводят ожидаемое поведение и согласуются с аналогичными результатами из стороннего программного обеспечения, подтверждая корректность предложенного унифицированного подхода и целесообразность его реализации в системах автоматизированного проектирования.

**Ключевые слова:** вычислительная электродинамика; метод моментов; EFIE; MFIE; EFIE-PMCHWT; МРІЕ.

---

## GENERALIZED INTEGRAL OPERATORS FOR UNIFYING 2.5D AND 3D ELECTROMAGNETIC MODELING OF MICROWAVE COMPOSITE STRUCTURES BY THE METHOD OF MOMENTS

D.V. Kliukin  , A.A. Slobodyanenko , S.P. Kuksenko 

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education – Tomsk State  
University of Control Systems and Radioelectronics,  
Tomsk, Russia

 [dmitrii.v.kliukin@tusur.ru](mailto:dmitrii.v.kliukin@tusur.ru)

---

**Citation:** Kliukin D.V., Slobodyanenko A.A., Kuksenko S.P. Generalized integral operators for unifying 2.5D AND 3D electromagnetic modeling of microwave composite structures by the method of moments // Trudy MAI. 2026. No. 147. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188113>

---

**Abstract.** Microwave devices are used a lot in the field of aerospace engineering. They are used in complex composite structures (for example, high-speed interconnects on printed circuit boards, microwave integrated circuits, scattering objects and antenna

arrays). The characteristics of these structures are largely determined by their geometry and material properties. Designing such devices relies heavily on electromagnetic simulation based on numerical methods. Among these, the method of moments (MoM) is widely used, since it reduces systems of integro-differential equations to systems of linear algebraic equations. In practice, two main MoM-based approaches are employed: so-called 2.5D formulations for planar multilayer structures, and fully 3D formulations for arbitrary three-dimensional geometries. For three-dimensional composite structures, we use the EFIE-PMCHWT (Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai) formulation, which combines electric- and magnetic-field integral equations for conducting and dielectric regions. For planar multilayer configurations, we employ mixed-potential integral equations (MPIE) with dyadic Green's functions tailored to layered media. We present the results of the generalization of integral operators, which allow the unification of 2.5D and 3D approaches to the electrodynamic modeling of composite structures using the method of moments. The unified formulation is validated on three representative examples: a microstrip transmission line, an inductive coil, and a low-pass filter. For each structure, S-parameters computed with the generalized operator framework are compared against reference results obtained from independent commercial electromagnetic software. The simulated responses exhibit the expected frequency behavior and show good agreement with the external data over the operating bands. These results confirm the correctness of the proposed unified approach and demonstrate its suitability for implementation in computer-aided design tools for the analysis and optimization of composite microwave structures.

**Keywords:** computational electrodynamics; method of moments; EFIE; MFIE; EFIE-PMCHWT; MPIE.

---

## Введение

Современная авиационно-космическая техника предъявляет строгие требования к массе и габаритам, что, наряду с ростом рабочих частот и скоростей передачи данных, приводит к усложнению конструкции бортовых СВЧ трактов и высокоскоростных межсоединений. В результате в составе бортовой аппаратуры

широко применяются композитные структуры: многослойные печатные платы, СВЧ интегральные схемы, печатные антенно-фидерные устройства, а также различные конструктивные элементы (включая радиопрозрачные элементы, экранирующие и рассеивающие структуры) [1–3]. Кроме того, для бортовой аппаратуры космических аппаратов отмечается практическая значимость задач, связанных с целостностью сигналов в реальных печатных платах, что напрямую зависит от параметров межсоединений и частотных свойств используемых структур [4].

Цена натуральных испытаний таких изделий, а также ограниченность итераций в цикле разработки делают особенно актуальным применение электродинамического моделирования [5–7], позволяющего на этапе эскизного проектирования прогнозировать их характеристики тем самым уменьшить число натуральных испытаний. Одним из самых распространённых методов, используемых для электродинамического моделирования, является метод моментов (МоМ) [8, 9]. На практике выделяют два основных подхода – 2.5D и 3D, а также несколько формулировок интегро-дифференциальных уравнений, отличающихся применимостью к решению разных классов задач. Первый – 2.5D или «планарный 3D» подход, применим для моделирования многослойных композитных структур [10], а второй – трёхмерный (3D) подход, используется при анализе произвольных композитных структур [11, 12]. При этом 2.5D обладает высокой производительностью за счёт использования упрощённой математической модели, где волновые эффекты на границах диэлектрик-диэлектрик и условия отражения граничных поверхностях учитываются аналитически с помощью специальных функций Грина, при этом краевые эффекты либо не учитываются, либо описываются приближённо. При 3D-подходе, напротив, все волновые эффекты, включая краевые, а также граничные условия на поверхностях проводников и диэлектриков учитываются численно, что требует дискретизации всей поверхности композитной структуры. Это обеспечивает более высокую точность результатов, однако приводит к существенному росту вычислительных затрат. В то же время, оба подхода основаны на схожих интегральных уравнениях, отличаясь главным образом видом используемых интегральных операторов и

функций Грина. В работе предлагается обобщенные интегральные операторы, позволяющие представить обе формулировки в единой диадической записи и тем самым реализовать оба подхода в едином вычислительном ядре.

Цель работы – выполнить обобщение интегральных операторов для унификации 2.5D/3D электродинамического моделирования композитных структур методом моментов.

### Формулировки интегро-дифференциальных уравнений

Традиционно, электродинамическое моделирование выполняется с помощью численного решения системы интегральных уравнений электрического (ИУЭП, EFIE) и магнитного (ИУМП, MFIE) полей, определяемых как

$$\theta(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - (\mathfrak{Z}\mathbf{J})(\mathbf{r}') + (\mathfrak{R}\mathbf{M})(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$\theta(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - (\mathfrak{Z}\mathbf{M})(\mathbf{r}') - \frac{1}{\eta^2}(\mathfrak{R}\mathbf{J})(\mathbf{r}'), \quad (2)$$

где,  $\theta(\mathbf{r})$  – действительный коэффициент, зависящий от принадлежности точки наблюдения  $\mathbf{r}$  свободному пространству, рассеивающему объекту или его границе  $S$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  и  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  – эквивалентные поверхностные электрические и магнитные токи на рассеивающем объекте  $\mathbf{r}' \in \delta S$ ,  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  и  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  – падающие поля,  $\eta$  – волновое сопротивление пространства, а  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{R}$  – линейные интегральные операторы, определяемые как

$$(\mathfrak{Z}\mathbf{X})(\mathbf{r}') = \int_s \left[ j\omega\mu G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \nabla \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \mathbf{X}(\mathbf{r}') dS, \quad (3)$$

$$(\mathfrak{R}\mathbf{X})(\mathbf{r}') = \int_s \mathbf{X}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (4)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина однородной и изотропной среды, определяемая как

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (5)$$

При решении системы уравнений (1)–(2) методом моментов для аппроксимации криволинейных границ поверхностей моделируемой структуры часто используется разбиение на треугольники, а для представления тока в них –

векторные базисные функции RWG [13]. Тогда плотности поверхностных токов записываются как

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{f}_n$  – базисная функция RWG двух смежных треугольников, связанная с общим ребром  $n$ ,  $N$  – общее число RWG-функций.

Применяя частный случай MOM – метод Галёркина (тестирование теми же функциями) к уравнениям (1)–(2) и подставляя разложения (6)–(7), получают систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{EJ} & \mathbf{Z}^{EM} \\ \mathbf{Z}^{HJ} & \mathbf{Z}^{HM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^E \\ \mathbf{V}^H \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Путем решения результирующей СЛАУ (8) определяются искомые коэффициенты  $I_n$  и  $M_n$  разложения плотностей поверхностных токов по базисным функциям. Вычисленные коэффициенты используются для расчета требуемых параметров и характеристик моделируемой структуры.

Для неоднородных и/или анизотропных сред аналитические выражения для функции Грина получены только для некоторых частных случаев, поэтому для расчёта структур, состоящих из композитных (проводящих и диэлектрических) материалов (рисунок 1), известно несколько подходов разной степени сложности.

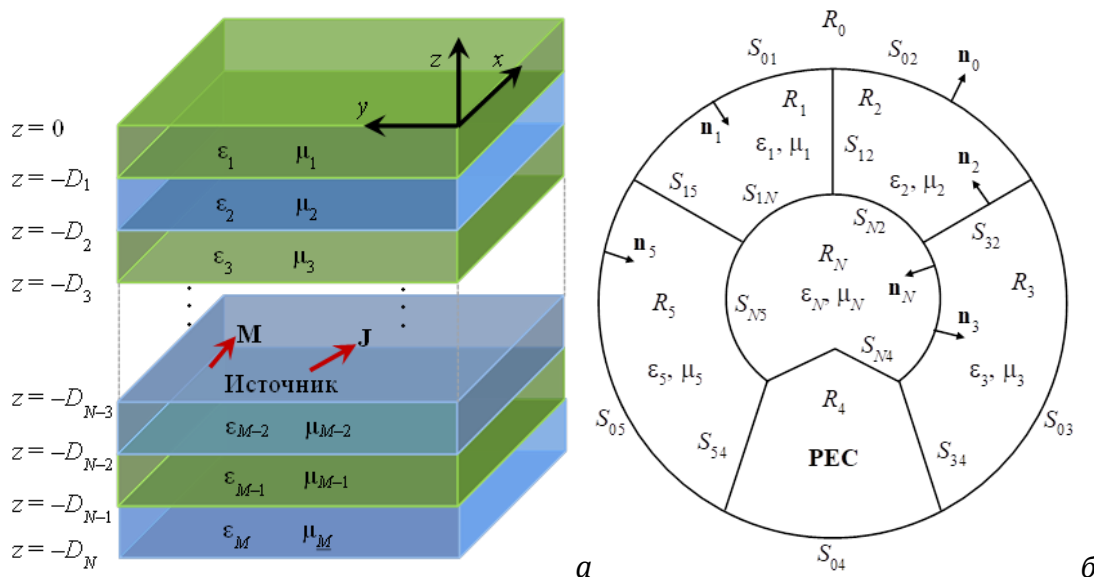


Рисунок 1 - Схематичные представления многослойной (а) и обобщенной (б) композитных структур

Если моделируемая структура представляет собой многослойную планарную среду, которую можно представить в виде набора  $M$  бесконечных плоских слоёв с параметрами  $\epsilon, \mu$  (рисунок 1а), то широко применяется 2.5D или «планарный 3D» подход на основе диадической функции Грина  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , которая является тензором второго ранга, ставящая в соответствие вектору источника –  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  или  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  вектор поля –  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  или  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . Каждый столбец диадической функции Грина, записываемой как

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} G_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ G_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{yz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ G_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{bmatrix}, \quad (9)$$

описывает поле, возбуждаемое единичным диполем, ориентированным вдоль одной из координатных осей.

При прямой записи исходных уравнений (1)–(2) через диадические функции Грина возникают гиперсингулярные ядра, из-за наличия смешанного векторного произведения  $(\nabla \nabla \cdot)$  в операторе (3). Одним из способов устранения этой ситуации является приведение уравнений к смешанной потенциальной формулировке (mixed-potential integral equations, MPIE), тогда поля выражаются через векторный и скалярный потенциалы [14, 15]. Используя теорему Гаусса и интегрирования по частям, частные производные переносятся на плотность тока. В результате уравнения (1)–(2) преобразуются к виду

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iint_s \mathbf{G}^{AJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') ds' + \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \iint_s G^{VJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') ds' - \iint_s \mathbf{G}^{EM} \mathbf{M}(\mathbf{r}') ds' \quad (1)$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon \iint_s \mathbf{G}^{AM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') ds' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \iint_s G^{VM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') ds' - \iint_s \mathbf{G}^{HJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') ds' \quad (1)$$

где  $\mathbf{G}^{AJ/AM}$  – диадические функции Грина для векторных потенциалов, обусловленных электрическим и магнитным источниками,  $G^{VJ/VM}$  – функции Грина для электрического и магнитного скалярных потенциалов, а  $\mathbf{G}^{HJ/EM}$  – диадические функции Грина, описывающие перекрёстные возбуждения электрического и магнитного полей.

Вычисление диадических функций Грина выполняется в два этапа. На первом выполняется аналитическая запись функций Грина в спектральной

области, используя метод дипольного источника (dipole source method) [16, 17]. При этом для каждой компоненты функции Грина рассматривается единичный электрический или магнитный диполь в заданном слое, ориентированный вдоль одной из координатных осей. Компоненты поля такого диполя раскладываются на ТЕ/ТМ-составляющие, после чего вводятся функции, описывающие суперпозицию падающих и отражённых волн. Через эти функции и обобщённые коэффициенты отражения и прохождения на границах слоёв записываются компактные матричные выражения для спектральных диадических функций Грина  $\tilde{\mathbf{G}}^{AJ/AM}$  и  $\tilde{\mathbf{G}}^{HJ/EM}$ , а также скалярных функций  $\tilde{G}^{VJ/VM}$ .

Второй этап – расчет функций Грина в пространственной области из обратных преобразований Фурье спектральных функций Грина, которые сводятся к интегралам Зоммерфельда [18]. Поскольку эти интегралы являются осциллирующими и медленно сходятся, для их численного вычисления применяются специальные методы, такие как модифицированное быстрое преобразование Ханкеля (Fast/Modified Hankel Transform) или метод дискретных комплексных изображений (DCIM) [19–21], в котором, например, спектральные функции аппроксимируются суммой экспоненциальных слагаемых, что позволяет свести интегралы к конечной сумме быстро вычисляемых компонентов.

В такой форме ядра интегральных уравнений обладают только слабой сингулярностью и легко поддаются численному интегрированию. Использование RWG-функций позволяет свести систему уравнений (10)–(11) к СЛАУ вида (8). Однако в общем случае для произвольных композитных объектов, форма которых не может быть аппроксимирована набором слоёв, использование аналитических диадических функций Грина для многослойных сред становится невозможным. Для таких структур применяется 3D подход – PMCHWT (Poggio–Miller–Chang–Harrington–Wu–Tsai) [22, 23], основанный на комбинации EFIE и MFIE.

Рассмотрим обобщенную композитную структуру, представленную на рисунке 1б и состоящую из  $N$  однородных диэлектрических или идеально проводящих (ПЕС) областей  $R_1, \dots, R_N$ . Каждая диэлектрическая область  $R_l$  описывается электрофизическими параметрами –  $\mu_l$  и  $\varepsilon_l$ . Область  $R_0$  представляет собой неограниченное внешнее пространство с  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$ . Граница  $R_l$  –

ограничивающая поверхность  $S_l$ , а граница раздела между областями  $R_l$  и  $R_m - S_{lm}$  (или  $S_{ml}$ ), которая может содержать часть или всю поверхность  $S_l$ . Вектор нормали  $\mathbf{n}_l$  указывает на  $R_l$  на каждой из его границ. Проводящие области могут быть закрытыми конечного объема ( $R_4$  на рисунке 1б) или открытыми бесконечно тонкими листами. Поля внутри каждой области выражаются через поверхностные эквивалентные токи на её границе.

Строгая постановка задачи рассеяния электромагнитного поля требует выполнения соответствующих граничных условий. На проводящих поверхностях тангенсальные (касательные) составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей обращаются в ноль, т.е.  $\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ . С учётом определения эквивалентного магнитного тока, следует, что  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$ , поэтому на проводящих поверхностях определен только электрический поверхностный ток  $\mathbf{J}$ .

Для диэлектрических поверхностей  $S_{lm}$  между областями  $R_l$  и  $R_m$  тангенсальные составляющие векторов напряжённости электрического и магнитного полей непрерывны, т.е.  $\mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times (\mathbf{E}_l - \mathbf{E}_m) = 0$ ,  $\mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times (\mathbf{H}_l - \mathbf{H}_m) = 0$ , при этом  $\mathbf{n}_m = -\mathbf{n}_l$ . В терминах эквивалентных токов это означает, что на каждой стороне  $S_{lm}$  присутствуют оба вида токов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{M}$ . Подстановка интегральных представлений полей (1)–(2) для каждой области в эти условия приводит к паре связанных интегральных уравнений EFIE и MFIE, в которых для учёта диэлектрических границ происходит суммирование уравнений EFIE и MFIE с каждой стороны от границ, т.е.

$$\mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times (\mathfrak{I}_l + \mathfrak{I}_m) \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times (\mathfrak{R}_l + \mathfrak{R}_m) \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times (\mathfrak{R}_l + \mathfrak{R}_m) \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}_l \times \mathbf{n}_l \times \left( \frac{1}{\eta_l^2} \mathfrak{I}_l + \frac{1}{\eta_m^2} \mathfrak{I}_m \right) \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Для учета границ проводник-диэлектрик, если рассматриваемые проводящие поверхности не имеют общих участков соприкосновения на этой границе, то для двух любых из них производится суммирование EFIE (12), а плотность магнитного тока  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  обращается в нуль.

В результате при использовании RWG-функций, анализ композитной структуры также сводится к СЛАУ вида (8), путем решения которой определяются

искомые коэффициенты разложения плотностей поверхностных токов по базисным функциям. Однако, при этом требуется дискретизация не только границ проводник-диэлектрика, но и границ диэлектрик-диэлектрика, что приводит к росту числа неизвестных и тем самым к увеличению вычислительных затрат.

### Обобщенная формулировка

Оба подхода – 2.5D и 3D, имеют общий вид при использовании одностипных базисных и тестовых функций, различаются лишь используемыми ядрами интегральных операторов и способами учёта среды. Основным отличием системы интегральных уравнений (10)–(11) от системы (12)–(13) является структура функций Грина. Поэтому если привести оба случая к единой диадической записи операторов, вычислительное ядро при 3D подходе может быть использовано в качестве основы для реализации 2.5D подхода.

Умножив скалярную функцию Грина свободного пространства (однородной среды) на единичный диад, получим

$$\mathbf{G}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & 0 \\ 0 & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 \\ 0 & 0 & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{bmatrix}, \quad (14)$$

тогда

$$G_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{X}(\mathbf{r}') = \begin{bmatrix} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & 0 \\ 0 & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 \\ 0 & 0 & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{X}(\mathbf{r}'). \quad (15)$$

Тогда стандартный 3D подход со скалярной функцией Грина является частным случаем диадической записи, когда ядро пропорционально единичному диаду.

Запишем градиент скалярной функции Грина свободного пространства как [24]

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{(1 + jkR)}{4\pi R^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{-jkR}, \quad (16)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , и введем обозначение

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{(1 + jkR)}{4\pi R^3}e^{-jkR}, \quad (17)$$

тогда

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (18)$$

С учётом того, что  $\mathbf{X}(\mathbf{r}')$  зависит только от  $\mathbf{r}'$ , оператор  $\mathfrak{R}$  можно записать как [24]

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}\mathbf{X})(\mathbf{r}') &= \nabla \times \int_s G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{X}(\mathbf{r}') ds' = \int_s [\nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{X}(\mathbf{r}')] ds' = \\ &= - \int_s [\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times \mathbf{X}(\mathbf{r}') ds'. \end{aligned} \quad (19)$$

Представим  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  в виде кососимметричной матрицы

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}']_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -(z - z') & y - y' \\ z - z' & 0 & -(x - x') \\ -(y - y') & x - x' & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

для которой выполняется тождество

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{X}(\mathbf{r}') = [\mathbf{r} - \mathbf{r}']_{\times} \mathbf{X}(\mathbf{r}'). \quad (21)$$

Тогда векторное произведение в (19) преобразуется к виду

$$(\mathfrak{R}\mathbf{X})(\mathbf{r}) = - \int_s \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \begin{bmatrix} 0 & -(z - z') & y - y' \\ z - z' & 0 & -(x - x') \\ -(y - y') & x - x' & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(\mathbf{r}') ds', \quad (22)$$

а ядро оператора  $\mathfrak{R}$  можно записать в диадической форме как

$$G_{\mathfrak{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \begin{bmatrix} 0 & -(z - z')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & (y - y')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ (z - z')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & -(x - x')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ -(y - y')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & (x - x')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & [\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times \mathbf{X}(\mathbf{r}') = G_{\mathfrak{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{X}(\mathbf{r}') = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & -(z - z')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & (y - y')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ (z - z')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & -(x - x')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ -(y - y')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & (x - x')\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Как видно, оба интегральных оператора при 3D подходе записываются в общем виде через диадические ядра. При 2.5D подходе та же структура сохраняется, но вместо функций Грина однородной среды и производных от них используются диадические функции Грина многослойной среды, что обеспечивает унифицированную реализацию обоих подходов. Используя эти особенности, выполнена программная реализация обобщённого алгоритма

2.5D/3D электродинамического моделирования методом моментов. Рассмотрим основные этапы его работы.

На первом шаге задаются входных параметров задачи: диапазон частот моделирования, конфигурация портов возбуждения, подход (2.5D или 3D), электрофизические параметры материалов и граничные условия.

Далее следует вычислительная часть, начинающаяся с блока предобработки. Если выбран 2.5D подход, дискретизация выполняется только на проводящих поверхностях геометрической модели, поскольку токи определяются именно на проводниках, а влияния диэлектриков учитываются через диадические функции Грина. На границах раздела слоев рассчитываются частотно зависимые коэффициенты отражения и передачи Френеля. При 3D подходе расчетная сетка строится как на проводящих, так и на диэлектрических поверхностях, при этом геометрическая модель разбивается на подобласти, а в местах их стыков вводятся корректные граничные условия для сшивания полей и токов. На завершающем этапе предобработки на всех дискретизированных поверхностях строятся базисные RWG-функции, определяющие представление поверхностных токов.

После блока предобработки выполняется последовательный расчёт по всем частотам моделирования. Так, на каждой частоте формируется матрица взаимодействия и вектор возбуждения, после чего решается СЛАУ. По полученному вектору коэффициентов выполняется постобработка, восстанавливаются поля, вычисляются напряжения и токи в портах и формируются требуемые выходные характеристики модели, после чего происходит переход к следующему значению частоты.

Сборка матрицы взаимодействий осуществляется по блочно-иерархическому алгоритму. Для каждой области геометрической модели последовательно обрабатываются входящие в неё поверхности, поблочно формируя локальные матрицы. Если поверхность является диэлектрической, то, в блок матрицы записываются вклады операторов EFIE и MFIE с использованием функций Грина однородной среды в диадической форме. Если поверхность проводящая, то при 3D используется функция Грина однородной среды, а при 2.5D для той же поверхности вычисляется диадическая функция Грина многослойной

среды. После обхода всех поверхностей, сформированы все локальные матрицы областей, которые затем собираются в глобальную матрицу с учетом граничных условий. Поскольку в 2.5D сетка строится только на проводящих поверхностях, а расчетная область не разделяется на подобласти, локальные блоки фактически совпадают с глобальными, и сборка сводится к непосредственному заполнению глобальной матрицы.

### Вычислительные эксперименты

Верификация обобщённой формулировки интегральных операторов для 2.5D/3D электродинамического моделирования методом моментов выполнена на примере вычисления параметров рассеяния трех планарных структур: микрополосковой линии передачи, катушки индуктивности и фильтра нижних частот. Поверхностные сингулярные интегралы вычислялись с использованием квадратур Гаусса [25, 26]. Результаты моделирования сравнивались с аналогичными результатами, полученными методом моментов в стороннем программном обеспечении (ПО) при использовании 2.5D (стороннее ПО1) и 3D (стороннее ПО 2) подходов.

На рисунке 2 представлена первая тестовая структура – микрополосковая линия передачи с шириной проводника  $w = 0,04$  мм и длиной  $l = 0,5$  мм, расположенная на диэлектрической подложке высотой  $h = 0,1$  мм с  $\epsilon_r = 9,6$ . При 3D моделировании размер подложки составлял  $0,4 \times 1$  мм<sup>2</sup>. Расчетная сетка на проводящих поверхностях задавалась с фиксированным шагом 0,02 мм, а на диэлектрических – дискретизация выполнялась по верхнему значению частоты с шагом  $\lambda/10$ . Результаты вычисления S-параметров и расчетные сетки при 3D и 2.5D моделировании представлены на рисунке 3.

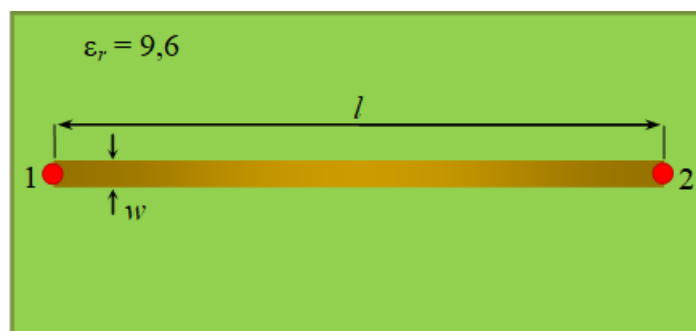


Рисунок 2 - Геометрическая модель микрополосковой линии передачи

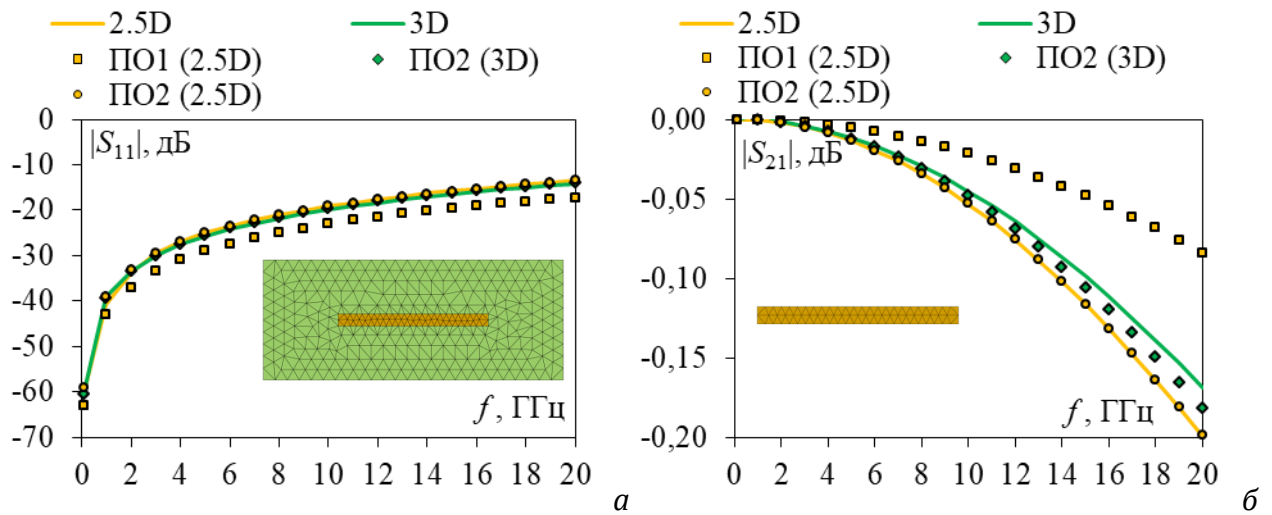


Рисунок 3 - S-параметры микрополосковой линии передачи:  $|S_{11}|$  (а),  $|S_{21}|$  (б)

Как видно из графиков, кривые имеют схожий характер со сторонним ПО 1 и 2. Среднеквадратическое отклонение (СКО) результатов 2.5D моделирования от ПО1 составляет 3,76 дБ с максимумом 3,97 дБ на частоте 6 ГГц по  $|S_{11}|$  и 0,05 дБ с максимумом 0,11 дБ на частоте 20 ГГц по  $|S_{21}|$ . В сравнении с ПО2 СКО результатов 2.5D моделирования составило 0,45 дБ с максимумом 1,66 дБ на частоте 1 ГГц по  $|S_{11}|$  и 0,0003 дБ по  $|S_{21}|$ .

Результаты 3D моделирования имеют СКО 0,31 дБ с максимальным отклонением 0,44 дБ на частоте 1 ГГц по  $|S_{11}|$  и 0,01 дБ с максимумом 0,01 дБ на частоте 20 ГГц по  $|S_{21}|$ . СКО результатов 2.5D и 3D моделирования составило для  $|S_{11}|$  – 0,76 дБ с максимальным отклонением 1,68 дБ на частоте 0,1 ГГц, а для  $|S_{21}|$  – 0,01 дБ с максимальным отклонением 0,03 дБ на частоте 20 ГГц. При этом для 2.5D моделирования потребовалось существо меньше машинной памяти. Так, размерность матрицы  $\mathbf{Z}$  при 3D моделировании составила  $N = 4884$  элементов ( $\sim 89$  МБ), а при 2.5D –  $N = 158$  элементов ( $\sim 0,4$  МБ).

Вторая тестовая структура – катушка индуктивности (рисунок 4) со следующими параметрами:  $w = 0,02$  мм,  $s = 0,02$  мм,  $l_1 = 0,257$  мм,  $l_2 = 0,277$  мм, расположенная на диэлектрической подложке высотой  $h = 0,1$  мм с  $\epsilon_r = 12$ . При 3D моделировании размер подложки составлял  $0,8 \times 0,6$  мм<sup>2</sup>. Расчётная сетка на проводящих поверхностях задавалась с фиксированным шагом 0,02 мм, а на диэлектрических – с шагом  $\lambda/10$  на верхней частоте.

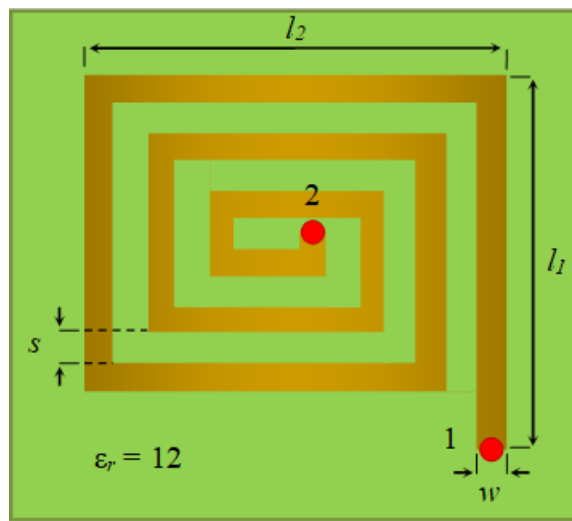


Рисунок 4 - Геометрическая модель катушки индуктивности

Результаты вычисления  $S$ -параметров и расчетные сетки при 3D и 2.5D моделировании представлены на рисунке 5. При 2.5D моделировании (рисунок 5а) различия по СКО со сторонним ПО1: для  $|S_{11}|$  – 0,5 дБ, максимум 0,8 дБ на частоте 2 ГГц; для  $|S_{21}|$  – 0,15 дБ, максимум 0,23 дБ на частоте 14 ГГц, а со сторонним ПО2: для  $|S_{11}|$  – 0,74 дБ, максимум 3,24 дБ на частоте 0,1 ГГц; для  $|S_{21}|$  – 0,07 дБ, максимум 0,1 дБ на частоте 12 ГГц. При 3D моделировании (рисунок 5б) различия составили: для  $|S_{11}|$  – 0,11 дБ, максимальное отклонение 0,45 дБ на 1 ГГц; для  $|S_{21}|$  – 0,01 дБ, максимум 0,02 дБ на 1 ГГц. СКО результатов 2.5D и 3D моделирования составило для  $|S_{11}|$  – 1,1 дБ с максимальным отклонением 0,2 дБ на частоте 20 ГГц, а для  $|S_{21}|$  – 0,24 дБ с максимальным отклонением 0,33 дБ на частоте 14 ГГц. Размерность матрицы  $\mathbf{Z}$  при 3D моделировании составила  $N = 4978$  (~ 378 МБ), а при 2.5D –  $N = 633$  (~ 6 МБ).

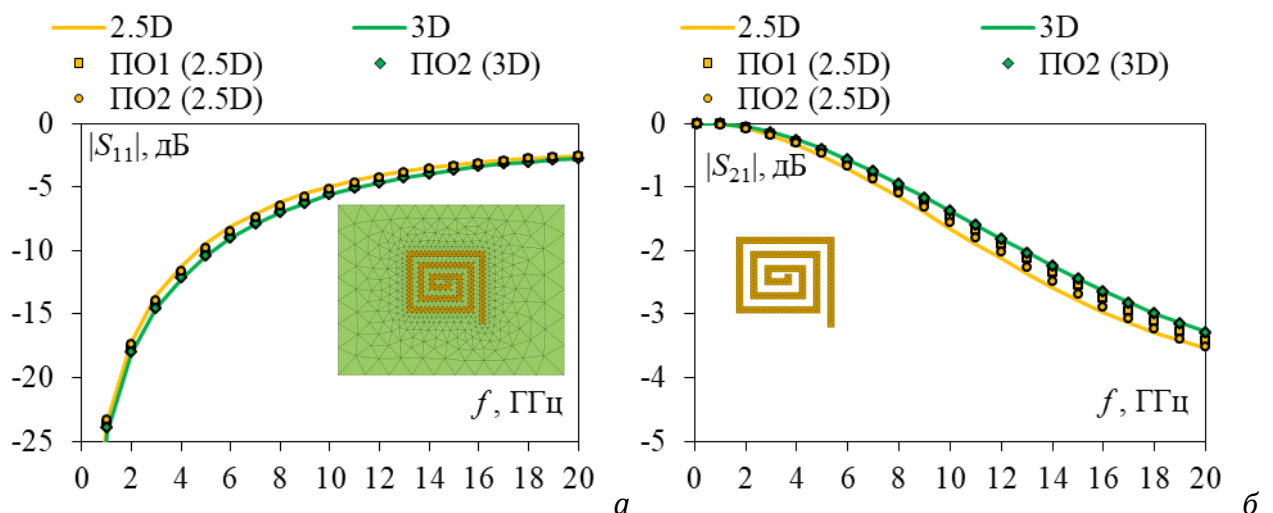


Рисунок 5 -  $S$ -параметры катушки индуктивности:  $|S_{11}|$  (а),  $|S_{21}|$  (б)

Третья тестовая структура (рисунок 6) – фильтр нижних частот с параметрами:  $w_1 = 0,57$  мм,  $w_2 = 0,8$  мм,  $w_3 = 0,08$  мм,  $l_1 = l_4 = 5,68$  мм,  $l_2 = 2,3$  мм,  $l_3 = 5,1$  мм. Фильтр расположен на подложке высотой  $h = 0,254$  мм с  $\epsilon_r = 3,48$  и  $\text{tg}\delta = 0,0037$ . При 3D моделировании размер подложки составлял  $24 \times 16,4$  мм<sup>2</sup>. Шаг расчетной сетки на проводящих поверхностях – 0,3 мм, а на диэлектрических –  $\lambda/10$  на верхней частоте. Результаты вычисления  $S$ -параметров и расчетные сетки при 3D и 2.5D моделировании представлены на рисунке 7.

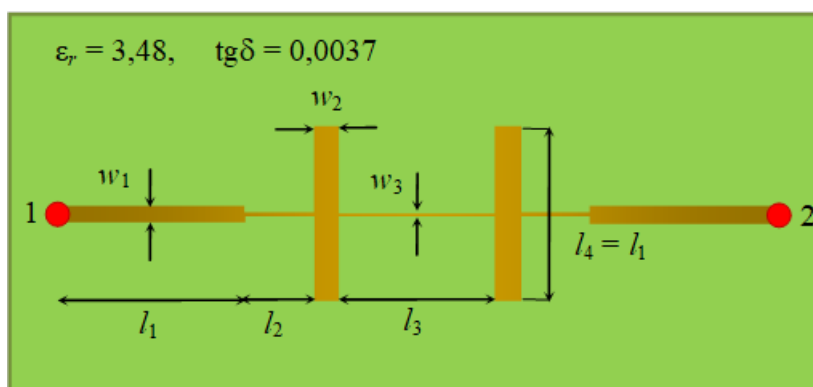


Рисунок 6 - Геометрическая модель фильтра нижних частот

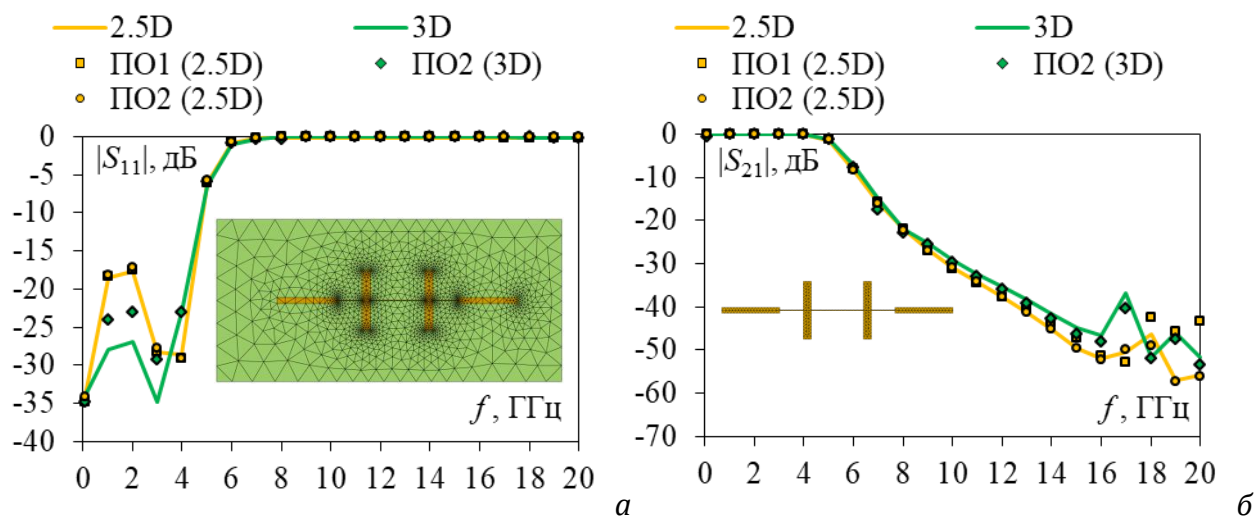


Рисунок 7 -  $S$ -параметры фильтра нижних частот:  $|S_{11}|$  (а),  $|S_{21}|$  (б)

При 2.5D моделировании СКО по  $|S_{21}|$  – 3,87 дБ, а по  $|S_{11}|$  – 0,25 дБ по сравнению с ПО1. В диапазоне частот 18–20 ГГц наблюдается существенные различия по  $|S_{21}|$ , достигающие 12,45 дБ. В сравнении с ПО2 СКО по  $|S_{11}|$  – 0,21 дБ с максимумом 0,49 дБ на частоте 4 ГГц, а по  $|S_{21}|$  – 0,59 дБ с максимумом 2,58 дБ на частоте 18 ГГц. При 3D моделировании СКО по  $|S_{21}|$  – 1,25 дБ, а по  $|S_{11}|$  – 1,72 дБ во

всем диапазоне частот. Наибольшие различия наблюдаются на низких частотах в полосе пропускания по  $|S_{11}|$  – 3,43 дБ. СКО результатов 2.5D и 3D моделирования составило для  $|S_{11}|$  – 3,44 дБ с максимальным отклонением 9,36 дБ на частоте 2 ГГц, а для  $|S_{21}|$  – 4,56 дБ с максимальным отклонением 13,45 дБ на частоте 17 ГГц. Порядок матрицы  $\mathbf{Z}$  при 3D подходе –  $N = 15176$  (~ 3514 МБ), а при 2.5D –  $N = 1219$  (~ 23 МБ).

### **Заключение**

Представлена обобщённая форма интегральных операторов, обеспечивающая единую 2.5D/3D формулировку для электродинамического моделирования композитных структур методом моментов. На её основе выполнена программная реализация унифицированного подхода и проведена верификация на трёх типовых структурах: микрополосковой линии передачи, катушке индуктивности и фильтре нижних частот. Сравнение с результатами стороннего программного обеспечения показало, что среднеквадратичное отклонение по модулю коэффициентов передачи и отражения не превышает 4 дБ. Полученные выходные характеристики воспроизводят ожидаемое поведение исследованных структур и хорошо согласуются с аналогичными расчётами в стороннем ПО. Это свидетельствует о корректности предложенного унифицированного подхода и подтверждает возможность его дальнейшей интеграции в системы автоматизированного проектирования СВЧ-устройств.

---

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

### **Список источников**

1. Гаджиев Э.В. Пути построения малогабаритных, невыступающих бортовых антенно-фидерных систем космических аппаратов // Труды МАИ. 2014. № 76.
2. Овчинникова Е.В., Рыбаков А. М. Печатная антенная решетка для бортовой РЛС // Труды МАИ. – 2012. – № 52.

3. Азаров А.В. и др. Сравнительный анализ вариантов построения антенной решетки бортовой аппаратуры высокоскоростной радиолинии //Труды МАИ. – 2023. – № 128. – С. 10.
4. Суровцев Р.С., Газизов Т.Р. Оценка целостности сигналов в печатных платах системы автономной навигации космического аппарата //Труды МАИ. – 2015. – №. 83. – С. 16.
5. Balanis C.A. Advanced Engineering Electromagnetics. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2012, 1045 p.
6. Козлов К.В. и др. Численное моделирование электромагнитного поля бортовой РЛС землеобзора для обеспечения электромагнитной совместимости // Труды МАИ. – 2022. – № 122. – С. 11.
7. Денисенко Д.В. Применение методов граничных интегральных уравнений в проектировании планарных устройств сверхвысоких частот // Труды МАИ. – 2014. – №. 73. – С. 25.
8. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. М.: Физматлит, 2013. 430 с.
9. Makarov S.N. Antenna and EM Modeling with MATLAB. New York: John Wiley & Sons, 2002, 288 p.
10. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008, 272 p.
11. Yla-Oijala P., Taskinen M., Sarvas J. Surface integral equation method for general composite metallic and dielectric structures with junctions. Progress in Electromagnetics Research. 2005, vol. 52, pp. 81–108.
12. Michalski K.A., Zheng D. Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media. I. Theory. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2002, vol. 38, no. 3, pp. 335–344.
13. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982, vol. 30, no. 3, pp. 409–418.
14. Umashankar K., Taflove A., Rao S.M. Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric bodies. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1986, vol. 34, pp. 758–766.

15. Rao M., Cha C.C., Cravey R.L., Wilkes D.L. Electromagnetic scattering from arbitrary shaped conducting bodies coated with lossy materials of arbitrary thickness. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1991, vol. 39, pp. 627–631.
16. Michalski K.A. The mixed-potential electric field integral equation for objects in layered media. *Arch. Elektr. Ubertragung*. 1985, vol. 39, pp. 317–322.
17. Michalski K.A., Mosig J.R. Multilayered media Green's functions in integral equation formulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2002, vol. 45, no. 3, pp. 508–519.
18. Pan S. Modelling of Interconnects in 3DIC Based on Layered Green's Functions. Missouri University of Science and Technology, 2015.
19. Simsek E., Liu Q.H., Wei B. Singularity subtraction for evaluation of Green's functions for multilayer media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2006, vol. 54, no. 1, pp. 216–225.
20. Ling F., Jin J.M. Discrete complex image method for Green's functions of general multilayer media. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 2000, vol. 10, no. 10, pp. 400–402.
21. Aksun M.I. A robust approach for the derivation of closed-form Green's functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2002, vol. 44, no. 5, pp. 651–658.
22. Kipp R.A., Chan C.H. Complex image method for sources in bounded regions of multilayer structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2002, vol. 42, no. 5, pp. 860–865.
23. Hua Y., Sarkar T.K. Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1989, vol. 37, no. 2, pp. 229–234.
24. Medgyesi-Mitschang L.N., Putnam J.M., Gedera M.B. Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1994. – Т. 11. – №. 4. – С. 1383-1398.
25. Ключкин Д.В., Мочалов Д.М., Куксенко С.П. О способах вычисления поверхностных сингулярных интегралов при решении антенных задач методом моментов // *Доклады ТУСУР*. 2024. Т. 27, № 1. С. 23–34.

26. Ключкин Д.В. и др. Об использовании квадратур Гаусса в вычислении поверхностных сингулярных интегралов при решении задач рассеяния методом моментов // Доклады ТУСУР. 2024. Т. 27, № 4. С. 13–22.

### References

1. Gadzhiev E. V. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2014, no. 76, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=50113> (accessed 15.01.2026).
2. Ovchinnikova E. V., Rybakov A. M. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2012, no. 52, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29558> (accessed 15.01.2026).
3. Azarov A. V. et al. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2023, no. 128, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171392> (accessed 15.01.2026).
4. Surovtsev R. S., Gazizov T. R. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2015, no. 83, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=62204> (accessed 15.01.2026).
5. Balanis C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 2012, 1045 p.
6. Kozlov K. V., Volkov A. P., Starovoytov E. I., Popov E. V. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2022, no. 122, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164200> (accessed 06.12.2025).
7. Denisenko D. V. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2014, no. 73, available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=48568> (accessed 06.12.2025).
8. Grigor'ev A. D. *Metody vychislitel'noi elektrodinamiki* (Methods of Computational Electrodynamics), Moscow, Fizmatlit, 2013, 430 p.
9. Makarov S. N. *Antenna and EM Modeling with MATLAB*, John Wiley & Sons, New York, 2002, 288 p.
10. Gibson W.C. *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2008, 272 p.
11. Yla-Oijala P., Taskinen M., Sarvas J. Surface integral equation method for general composite metallic and dielectric structures with junctions. *Progress in Electromagnetics Research*. 2005, vol. 52, pp. 81–108.
12. Michalski K. A., Zheng D. Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media. I. Theory, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 335–344.

13. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982, vol. 30, no. 3, pp. 409–418.
14. Umashankar K., Taflove A., Rao S.M. Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1986, vol. 34, pp. 758–766.
15. Rao M., Cha C.C., Cravey R.L., Wilkes D.L. Electromagnetic scattering from arbitrary shaped conducting bodies coated with lossy materials of arbitrary thickness. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1991, vol. 39, pp. 627–631.
16. Michalski K.A. The mixed-potential electric field integral equation for objects in layered media. *Arch. Elektr. Ubertragung*. 1985, vol. 39, pp. 317–322.
17. Michalski K.A., Mosig J.R. Multilayered media Green's functions in integral equation formulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2002, vol. 45, no. 3, pp. 508–519.
18. Pan S. Modelling of Interconnects in 3DIC Based on Layered Green's Functions. Missouri University of Science and Technology, 2015.
19. Simsek E., Liu Q.H., Wei B. Singularity subtraction for evaluation of Green's functions for multilayer media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2006, vol. 54, no. 1, pp. 216–225.
20. Ling F., Jin J.M. Discrete complex image method for Green's functions of general multilayer media. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 2000, vol. 10, no. 10, pp. 400–402.
21. Aksun M.I. A robust approach for the derivation of closed-form Green's functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2002, vol. 44, no. 5, pp. 651–658.
22. Kipp R.A., Chan C.H. Complex image method for sources in bounded regions of multilayer structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2002, vol. 42, no. 5, pp. 860–865.
23. Hua Y., Sarkar T.K. Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1989, vol. 37, no. 2, pp. 229–234.

24. Medgyesi-Mitschang L.N., Putnam J.M., Gedera M.B. Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers //Journal of the Optical Society of America A. – 1994. – Т. 11. – №. 4. – С. 1383-1398.

25. Klyukin D. V., Mochalov D. M., Kuksenko S. P. *Doklady TUSUR*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 23–34, available at: <https://journal.tusur.ru/ru/arhiv/1-2024/o-sposobah-vychisleniya-poverhnostnyh-singulyarnyh-integralov-pri-reshenii-antennyh-zadach-metodom-momentov> (accessed 06.12.2025).

26. Klyukin D. V. *Doklady TUSUR*, 2024, vol. 27, no. 4, pp. 13–22, available at: <https://journal.tusur.ru/ru/arhiv/4-2024/ob-ispolzovanii-kvadratur-gaussa-v-vychislenii-poverhnostnyh-singulyarnyh-integralov-pri-reshenii-zadach-rasseyaniya-metodom-momentov> (accessed 06.12.2025).

### Информация об авторах

**Дмитрий Владимирович Клюкин**, аспирант, ассистент кафедры телевидения и управления ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия; SPIN-код: 5650-1868; Web of Science ResearcherID: OHT-8867-2025; SCOPUS AuthorID: 57783638800; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0343-482X>; e-mail: [dmitrii.v.kliukin@tusur.ru](mailto:dmitrii.v.kliukin@tusur.ru)

**Александр Александрович Слободяненко**, кандидат технических наук, инженер НИЛ «Безопасность и электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств», г. Томск, Россия; SPIN-код: 7161-3289; Web of Science ResearcherID: AEB-5638-2022; SCOPUS AuthorID: 57221834458; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9197-2213>; e-mail: [sepwood@gmail.com](mailto:sepwood@gmail.com)

**Сергей Петрович Куksенко**, доктор технических наук, доцент, проректор по научной работе и инновациям ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия; SPIN-код: 4866-0025; Web of Science ResearcherID: F-5303-2017; SCOPUS AuthorID: 55651039800; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9713-458X>; e-mail: [sergei.p.kuksenko@tusur.ru](mailto:sergei.p.kuksenko@tusur.ru)

## Information about the authors

**Dmitry V. Klyukin**, Postgraduate Student, Teaching Assistant at the Department of Television and Control, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR), Tomsk, Russia; SPIN-код: 5650-1868; Web of Science ResearcherID: OHT-8867-2025; SCOPUS AuthorID: 57783638800; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0343-482X>; e-mail: [dmitrii.v.kliukin@tusur.ru](mailto:dmitrii.v.kliukin@tusur.ru)

**Alexander A. Slobodyanenko**, Candidate of Technical Sciences, Engineer at the Research Laboratory “Safety and Electromagnetic Compatibility of Radioelectronic Equipment”, Tomsk, Russia; SPIN-код: 7161-3289; Web of Science ResearcherID: AEB-5638-2022; SCOPUS AuthorID: 57221834458; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9197-2213>; e-mail: [sepwood@gmail.com](mailto:sepwood@gmail.com)

**Sergey P. Kuksenko**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Research and Innovation, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR), Tomsk, Russia; SPIN-код: 4866-0025; Web of Science ResearcherID: F-5303-2017; SCOPUS AuthorID: 55651039800; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9713-458X>; e-mail: [sergei.p.kuksenko@tusur.ru](mailto:sergei.p.kuksenko@tusur.ru)

---

Получено 24 декабря 2025 ● Принято к публикации 20 марта 2026 ● Опубликовано 30 апреля 2026  
Received 24 December 2025 ● Accepted 20 March 2026 ● Published 30 December 2026

---