

УДК 621, 531

**Особенности применения вектора Эйлера для описания больших поворотов при моделировании элементов конструкций летательных аппаратов на примере стержневого конечного элемента**

**Низаметдинов Ф.Р.\*, Сорокин Ф.Д.\*\***

*Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана,  
ул. 2-ая Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия*

*\*e-mail: [fnizametdinov@list.ru](mailto:fnizametdinov@list.ru)*

*\*\*e-mail: [sorokin\\_fd@mail.ru](mailto:sorokin_fd@mail.ru)*

**Аннотация**

Элементы конструкций летательных аппаратов часто могут быть сведены к балочной модели, подверженной большим перемещениям при малых деформациях. Наиболее удобным и эффективным методом решения задач, описываемых такой расчетной схемой, является метод конечных элементов. В данной работе проведен обзор традиционных подходов к описанию больших перемещений и современных работ по созданию геометрически нелинейных балочных КЭ, а также предложены две модификации, позволяющие описывать неограниченно большие повороты. Отмечены особенности этих модификаций и получены матрицы касательных жесткостей и вектор узловых сил КЭ балки с учетом этих особенностей. Корректность полученных соотношений подтверждается решением тестовой задачи №1, также проводится сопоставление модификаций решением тестовой задачи №2. Отмечаются преимущества и недостатки обеих модификаций.

**Ключевые слова:** вектор Эйлера, тензор поворота, большие перемещения, большие повороты, матрица касательной жесткости, конечный элемент, теневой элемент

## Введение

Часто элементы конструкций в машиностроении, в том числе элементы конструкций летательных аппаратов, с достаточной точностью описываются балочной моделью, для которой характерны большие обобщенные перемещения при малых деформациях. К таким элементам можно отнести, например, лопасти винтов, лонжероны консолей крыла и т.д. [1-4].

Решению задачи описания больших перемещений элементов конструкций, описываемых балочными моделями, с целью определения перемещений и внутренних силовых факторов в них посвящено множество работ и разработано множество методов.

Например, достаточно широкий класс методов основан на использовании систем дифференциальных уравнений [5-10], но использование дифференциальных уравнений удобно лишь при описании конструкции только балочными элементами и при небольшом количестве элементов. Однако в виду роста сложности конструкции современных машин редко удается свести расчетную схему к одной лишь балочной модели, поэтому преобладающее большинство современных методов так или иначе основано на применении метода конечных элементов (МКЭ).

Получение матрицы жесткости геометрически нелинейного конечного элемента (КЭ) является нетривиальной задачей. Если для построения линейного КЭ в целом используется примерно один и тот же подход, то учет больших

перемещений может быть выполнен множеством принципиально различных подходов.

На заре развития вычислительной механики использовался метод представления упругих тел набором твердотельных элементов, упругие свойства деформируемых тел при этом моделировались упругими связями [11-13]. Основной проблемой этого метода является подбор характеристик упругих связей. Далее предпринимались попытки совместить твердотельное моделирование с методом конечного элемента (МКЭ) [14]. Согласно этому методу полное перемещение представляется суммой независимых между собой большого жесткого смещения и малого упругого перемещения за счет деформаций [15]. Моделирование проводится в два этапа. Сначала моделируется твердотельная конструкция для определения сил реакций связей, которые служат исходными данными для второго этапа.

Следующим шагом стал метод последовательных приближений, который был модифицирован до метода присоединенной системы координат, но этот метод не получил широкого применения в следствие появления более прогрессивных подходов, таких как метод абсолютных узловых координат [16-18]. Согласно этому методу интерполяционные функции КЭ вводятся в глобальной системе координат, что приводит к громоздким выражениям для вектора обобщенных упругих сил. Эта формулировка является наиболее полной, но в то же время очень сложной для проведения практических расчетов, поэтому использование метода абсолютных узловых координат в задачах, где элементы конструкции испытывают большие

перемещения при малых деформациях, оказывается неоправданным с точки зрения эффективности [19].

В [20] используется несимметричный тензор Пиолы-Кирхгофа. В [21] положение сечений КЭ задается радиусом вектором и двумя ортами, такой подход увеличивает количество кинематических параметров, но позволяет избежать особых точек. В [22] КЭ строится с использованием независимого описания перемещений и поворотов полиномами Эрмита, что приводит к проблеме сдвигового заклипания. В [23] применяется квадратичная аппроксимация элементов тензора поворота. В [24] используется векторно-тензорная теория больших поворотов, но величина поворотов ограничена углом  $2\pi$ . В работе [19] используется метод Крейга-Бэмптона (метод редукции, метод связанных подструктур). Этот метод состоит из пяти этапов и требует большого количества предварительных расчетов для подготовки редуцированной модели.

Широко распространенным подходом к построению геометрически нелинейного балочного КЭ является коротационный подход [25]. В работе [26] рассматривается коротационный КЭ, в который заложена гипотеза о малости относительных деформаций. Недостатком этого элемента является наличие особых точек при угле поворота  $2\pi$ . Модель [27] лишена такого недостатка за счет введения промежуточного положения, но является значительно более сложной за счет применения аппарата нелинейной теории упругости. Инкрементное описание поворотов было также использовано и в элементе, предложенном в [28] применительно к задачам многотельной динамики, однако полученная там матрица

касательной жесткости была несимметричной даже для случая консервативных нагрузок, что ограничивает применение ряда методов для решения порождаемых в процессе анализа систем линейных уравнений. Такое разнообразие подходов объясняется наличием не одного десятка способа описания больших поворотов [29-31].

Проведенный обзор показывает, что традиционные способы описания больших поворотов и методы на их основе для построения геометрически нелинейных конечных элементов либо не могут быть применены без модификаций, либо являются неоправданными с точки зрения эффективности.

Наиболее распространенным и естественным способом для описания конечных поворотов является вектор Эйлера [6,32-34]. Именно этот способ и используется в данной работе. Однако вектор Эйлера имеет недостаток, заключающийся в наличии критического значения угла поворота ( $2\pi$ ). При этом значении угла поворота тензоры, связывающие малые физические повороты с производными кинематических параметров, становятся вырожденными. Для преодоления этой проблемы в данной работе рассматривается две модификации (инкрементное описание и «откат» на  $2\pi$ ), позволяющие описывать неограниченно большие повороты и проводится их сопоставление на примере КЭ стержня. Стоит отметить, что эти модификации не привязаны к базовому способу описания поворотов, и соответственно он может быть любым.

## «Откат» вектора Эйлера на $2\pi$

Как уже было отмечено, вектор Эйлера имеет недостаток при угле поворота  $2\pi$ , для преодоления этой трудности при приближении модуля вектора Эйлера к критическому значению проводится его корректировка («откат»):

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}_* = \mathfrak{g} - 2\pi \mathbf{e} \\ \mathbf{e} &= \frac{\mathfrak{g}}{|\mathfrak{g}|} \end{aligned} ,$$

где  $\mathfrak{g}$  - вектор Эйлера.

Стоит отметить, что с точки зрения численной реализации гораздо безопаснее проводить коррекцию вектора Эйлера, не дожидаясь приближения к значению  $2\pi$ . Например, в данной работе в качестве критического значения установлена величина модуля вектора Эйлера равная  $1.5\pi$ .

Проекция вектора поворота Эйлера и их производные не имеют механического смысла, хотя сам вектор поворота такой смысл имеет. Механический смысл имеют проекции векторов угловой скорости и углового ускорения. Соответственно, при решении задач динамики с большими поворотами должна быть обеспечена непрерывность векторов угловой скорости и углового ускорения (в задачах статики аналогом угловых скоростей выступают малые «физические» повороты). Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  вычисляется с использованием тензора П. А. Жилина  $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \cdot \frac{d\mathfrak{g}}{dt}; \quad \mathbf{T}(\mathfrak{g}) = \mathbf{E} \frac{\sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} + \frac{|\mathfrak{g}| - \sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^3} \mathfrak{g}\mathfrak{g} + \frac{1 - \cos(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^2} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}.$$

Несложно видеть, что при «откате» на  $2\pi$  тензор  $\mathbf{T}(\vartheta)$  изменяется. Однако угловая скорость должна остаться неизменной, поэтому

$$\omega_* = \omega \Rightarrow \mathbf{T}(\vartheta_*) \cdot \frac{d\vartheta_*}{dt} = \mathbf{T}(\vartheta) \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow \frac{d\vartheta_*}{dt} = \mathbf{T}^{-1}(\vartheta_*) \cdot \mathbf{T}(\vartheta) \cdot \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (1)$$

Равенство угловых ускорений до и после «отката» следует из дифференцирования соотношения (1):

$$\frac{d\omega_*}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\vartheta_*}{dt^2} = \mathbf{T}^{-1}(\vartheta_*) \cdot \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}(\vartheta)) \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + \mathbf{T}(\vartheta) \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{d}{dt}(\mathbf{T}(\vartheta_*)) \cdot \frac{d\vartheta_*}{dt} \right) \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) дают новые значения производных компонент вектора поворота после «отката» на  $2\pi$ .

Как будет показано далее, при описании больших поворотов с помощью вектора Эйлера используются не классические моменты, а обобщенные [22,32]. Поэтому при использовании коррекции угла поворота при достижении критического значения необходимо также обеспечивать непрерывность моментов. Самый простой способ заключается в переходе от обобщенных моментов к классическим. Рассмотрим на примере двухузлового элемента. Допустим, есть некоторая процедура, возвращающая матрицу жесткости  $[\mathbf{K}]$  и вектор усилий  $\mathbf{P}$  конечного элемента. При этом вектор усилий содержит в себе обобщенные моменты. Для перехода к классическим моментам обобщенные моменты достаточно умножить на тензор  $(\mathbf{T}^{-1})^T$ :

$$\mathbf{P}_* = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ (\mathbf{T}_1^{-1})^T \cdot \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ (\mathbf{T}_2^{-1})^T \cdot \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{T}_1^{-1})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_2^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_i = \mathbf{T}(\vartheta_i)$$

Однако для сохранения корректности уравнений аналогичное преобразование должно быть выполнено над матрицей жесткости:

$$[\mathbf{K}_*] = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{T}_1^{-1})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_2^{-1})^T \end{pmatrix} [\mathbf{K}]$$

При решении задач динамики аналогичные преобразования должны быть выполнены для матрицы масс, демпфирования и гироскопических эффектов.

### **Описание больших обобщенных перемещений и варьирование кинематических соотношений для малых перемещений и поворотов**

Рассмотрим алгоритм получения матрицы касательной жесткости и вектора узловых сил на примере КЭ стержня. При описании больших перемещений элемента целесообразно выделить его характерные состояния (рис. 1):

- (I) исходное положение элемента – элемент не деформирован;
- (II) промежуточное положение элемента – элемент смещен как жесткое целое в положение близкое к деформированному и не деформирован;
- (III) деформированное состояние элемента – сечения получили малые перемещения и повороты относительно состояния (II).



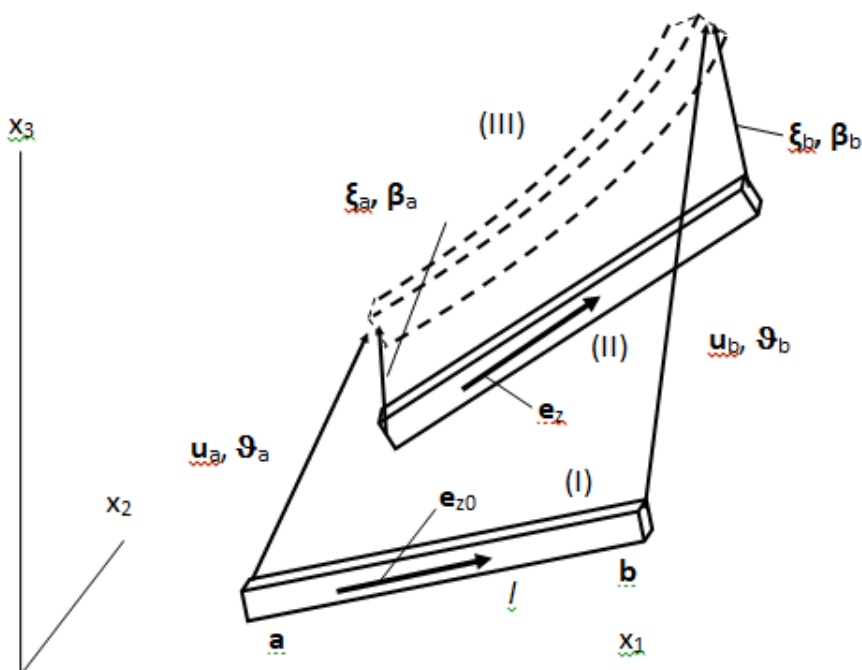


Рис.1 – Стержневой конечный элемент в исходном (I), смещенном (II) и деформированном (III) состояниях ( $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$  – векторы конечных перемещений сечений;  $\vartheta_a, \vartheta_b$  – векторы Эйлера конечных поворотов сечений;  $\xi_a, \beta_a, \xi_b, \beta_b$  – векторы малого относительного перемещения и малого относительного поворота крайних сечений).

Для среднего сечения в промежуточном положении (II) элемента принимается, что перемещение равно среднему арифметическому узловых перемещений, а поворот равен среднему арифметическому узловых поворотов:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b}{2}, \vartheta_0 = \frac{\vartheta_a + \vartheta_b}{2}$$

Такой выбор теневого состояния сделан с целью сохранения равноправности узлов КЭ. Согласно рис.1 векторы малых относительных перемещений находятся как разности положений сечений в состояниях (II) и (III):

$$\begin{aligned} \xi_a &= \left( -\mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} + \mathbf{u}_a \right) - \left( \mathbf{u}_0 - \mathbf{L}(\vartheta_0) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} \right) = \frac{\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b}{2} + \left( \mathbf{L}(\vartheta_0) - \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2}, \\ \xi_b &= \left( \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} + \mathbf{u}_b \right) - \left( \mathbf{u}_0 + \mathbf{L}(\vartheta_0) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} \right) = -\xi_a, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{L}(\vartheta) = \mathbf{E} \cos(|\vartheta|) + \frac{1 - \cos(|\vartheta|)}{|\vartheta|^2} \vartheta \vartheta + \frac{\sin(|\vartheta|)}{|\vartheta|} \vartheta \times \mathbf{E}$  – тензор поворота стержня из

положения (I) в положение (II).

Вектор малого поворота сечений нельзя вычислять как приращение вектора Эйлера, этот вектор согласно [22,32] связан с приращением вектора Эйлера тензором П. А. Жилина  $\mathbf{T}(\vartheta)$ :

$$\begin{aligned} \beta_a &= \mathbf{T}(\vartheta_0) \cdot (\vartheta_a - \vartheta_0) = \mathbf{T}(\vartheta_0) \cdot \frac{\vartheta_a - \vartheta_b}{2}, \\ \beta_b &= \mathbf{T}(\vartheta_0) \cdot (\vartheta_b - \vartheta_0) = \mathbf{T}(\vartheta_0) \cdot \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{2} = -\beta_a. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако соотношения (4) не могут быть применены при использовании модификации, основанной на корректировке вектора Эйлера при достижении критического значения, поскольку векторы Эйлера в сечениях (a) и (b) могут быть скорректированы в разные моменты условного времени.

Оба поворота в сечениях (a) и (b) являются большими, но относительный поворот мал из-за малости деформаций. Будем считать, что поворот сечения (a) получается как некий средний (большой) поворот  $\mathbf{L}_m$  из (I) в (II), а затем дополнительный (малый) поворот  $\mathbf{L}_1$ . Поворот сечения (b) получается как средний поворот и дополнительный поворот в обратную сторону (см.(4)):

$$\mathbf{L}_b = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_m; \mathbf{L}_a = \mathbf{L}_1^T \cdot \mathbf{L}_m. \quad (5)$$

Из (5) следует:

$$\mathbf{L}_b \cdot \mathbf{L}_a^T = (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_m) \cdot (\mathbf{L}_m^T \cdot \mathbf{L}_1) = \mathbf{L}_1^2. \quad (6)$$

Получить вектор поворота  $\mathfrak{Q}_1$ , соответствующий тензору  $\mathbf{L}_1$  можно с помощью операции вычисления векторного инварианта:

$$\mathfrak{Q}_1 = -\frac{1}{4} \left( \frac{2|\mathfrak{Q}_1|}{\sin(2|\mathfrak{Q}_1|)} \right) (\mathbf{L}_b \cdot \mathbf{L}_a^T)_\times$$

Через найденный малый поворот согласно (5) восстанавливается тензор среднего поворота:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(\mathfrak{Q}_1), \mathbf{L}_m = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_a = \mathbf{L}_1^T \cdot \mathbf{L}_b.$$

Тогда соотношения (3) для узловых перемещений не изменяются ( $\mathbf{L}(\mathfrak{Q}_0) \equiv \mathbf{L}_m$ ), а малые повороты  $\beta_a$  и  $\beta_b$  уже вычислены. Малый вектор  $\beta_b$  соответствует дополнительному повороту от большого поворота с тензором  $\mathbf{L}_m$  к большому повороту с тензором  $\mathbf{L}_b$ , но именно такой поворот осуществляется тензором  $\mathbf{L}_1$ . Это значит, что  $\beta_b$  и  $\mathfrak{Q}_1$  имеют одинаковый смысл. На втором краю, поворот от среднего состояния происходит в обратную сторону, т.е.

$$\beta_a = -\mathfrak{Q}_1; \beta_b = \mathfrak{Q}_1 \quad (7)$$

Варьируя соотношения (3) и (7), можно получить:

$$\begin{pmatrix} \Delta \xi_a \\ \Delta \beta_a \\ \Delta \xi_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{e}_z \times \mathbf{T}_a \frac{l}{2} & -\mathbf{E} & -\mathbf{e}_z \times \mathbf{T}_b \frac{l}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_a & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_b \\ -\mathbf{E} & \mathbf{e}_z \times \mathbf{T}_a \frac{l}{2} & \mathbf{E} & \mathbf{e}_z \times \mathbf{T}_b \frac{l}{2} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_a & \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathfrak{Q}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \mathfrak{Q}_b \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathfrak{Q}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \mathfrak{Q}_b \end{pmatrix} \quad (8)$$

Блоками матрицы  $[\mathbf{F}]$  в (8) являются тензоры.

Потенциальную энергию элемента можно представить в виде:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{K}_{\Pi}] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $[\mathbf{K}_{\Pi}]$  – матрица жесткости стержня в теневом положении. Она определяется матрицей жесткости  $[\mathbf{K}_{local}]$  в локальных координатах стержня и двумя последовательными поворотами ( $\mathbf{L}_0$  – поворот из глобальной системы координат в локальную,  $\mathbf{L}_m$  – поворот из исходного состояния (I) в теневое (II)).

Компоненты матрицы касательной жёсткости являются вторыми производными потенциальной энергии (9) по обобщённым перемещениям. Аналитические вычисления этих производных, выполненные с использованием, например, Wolfram Mathematica, приводят для матрицы касательной жесткости к весьма громоздкому коду. В связи с этим предлагается использовать приближённое выражение для матрицы касательной жёсткости. Если при варьировании (9) пренебречь изменением матрицы  $[\mathbf{K}_{\Pi}]$  (т.к. векторы обобщенных перемещений являются малыми), то

$$\Delta^2 U \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \xi_a \\ \Delta \beta_a \\ \Delta \xi_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{K}_{\Pi}] \begin{pmatrix} \Delta \xi_a \\ \Delta \beta_a \\ \Delta \xi_b \\ \Delta \beta_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathfrak{g}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \mathfrak{g}_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{F}]^T [\mathbf{K}_{\Pi}] [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathfrak{g}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \mathfrak{g}_b \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, согласно (9) приближённое выражение матрицы касательной жёсткости имеет вид  $[\mathbf{K}_{tI}] \approx [\mathbf{F}]^T [\mathbf{K}_{\Pi}] [\mathbf{F}]$ .

Как было отмечено, в (10) не учтен эффект вращения матрицы  $[\mathbf{K}_{\Pi}]$ . При наличии существенных внутренних сил отсутствие учета этого эффекта может

приводить к расходимости итерационного процесса. Для приближенного учета этого эффекта достаточно рассмотреть вторую вариацию энергии деформации в предположении, что компоненты вектора упругих сил изменяются только за счет поворотов

$$\begin{aligned}\Delta^2 U &\approx \frac{1}{2} \left( \Delta \xi_a \cdot (\Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_a) + \Delta \xi_b \cdot (\Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_b) \right) \\ \Delta \varphi_m &= \frac{1}{2} (\Delta \varphi_a + \Delta \varphi_b) = \frac{1}{2} (\mathbf{T}(\vartheta_a) \cdot \Delta \vartheta_a + \mathbf{T}(\vartheta_b) \cdot \Delta \vartheta_b).\end{aligned}\quad (11)$$

Используя (8) можно представить (11) в виде:

$$\begin{aligned}\Delta^2 U &\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{H}_a^T & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_b^T \\ -\mathbf{H}_a & \mathbf{0} & \mathbf{H}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_a^T & \mathbf{0} & \mathbf{H}_b^T \\ -\mathbf{H}_b & \mathbf{0} & \mathbf{H}_b & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{K}_{t2}] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_a &= \frac{1}{8} \mathbf{T}_a^T \times (\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a) \\ \mathbf{H}_b &= \frac{1}{8} \mathbf{T}_b^T \times (\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a).\end{aligned}\quad (12)$$

Из (10) и (12) следует выражение для суммарной матрицы касательной жесткости  $[\mathbf{K}_t] \approx [\mathbf{K}_{t1}] + [\mathbf{K}_{t2}]$ .

Узловыми силами и моментами являются первые производные выражения (9) по малым перемещениям, взятые с обратным знаком:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{M}_a \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{M}_b \end{pmatrix} = -[\mathbf{K}_{II}] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \end{pmatrix}.$$

Но при описании больших поворотов с помощью векторов Эйлера вместо обычных (классических) моментов должны использоваться обобщённые моменты:

$$\mathbf{M}_a^* = \mathbf{T}_a^T \cdot \mathbf{M}_a$$

$$\mathbf{M}_b^* = \mathbf{T}_b^T \cdot \mathbf{M}_b$$

Поэтому в окончательном выражении для вектора узловых сил (13) учтены соответствующие матричные множители:

$$\mathbf{P}_{tang} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{M}_a^* \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{M}_b^* \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_a^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_b^T \end{bmatrix} \left[ \mathbf{K}_{II} \right] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \end{pmatrix}. \quad (13)$$

### Инкрементное описание больших поворотов

Инкрементное описание основано на том, что в задачах статики и динамики приращения кинематических параметров (перемещения и повороты) всегда малы, поэтому полный поворот предлагается хранить в виде большого накопленного поворота, описываемого соответствующим тензором, и малого дополнительного поворота, описываемого вектором Эйлера. Эта модификация достаточно подробно описана в работе [35], поэтому остановимся лишь на основных моментах.

В начале шага интегрирования известны тензоры поворотов всех узлов, а вектор Эйлера равен нулю. В процессе численного интегрирования накопленную часть поворота произвольного узла предлагается оставлять неизменной, а изменять только дополнительную часть. По завершению шага вектор Эйлера превращается в тензор дополнительного поворота, который перемножается с тензором накопленного поворота, а вектор Эйлера обнуляется. Поскольку вектор Эйлера в начале шага всегда равен нулю, а его изменение на шаге мало, то это и обеспечивает отсутствие особых точек. Описанный алгоритм получения матрицы касательной

жесткости стержневого КЭ при использовании инкрементного способа описания претерпевает незначительные изменения. Соотношение (6) принимает вид:

$$\beta_a = \vartheta_a - \vartheta_1 \text{ и } \beta_b = \vartheta_b + \vartheta_1.$$

Выражение для потенциальной энергии деформаций может быть представлено в виде:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{y}_0^T [\mathbf{K}_{II}] \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{H}] \mathbf{y},$$

$$\text{где } [\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} +(\mathbf{L}_m - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} \\ -\vartheta_1 \\ -(\mathbf{L}_m - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{l}{2} \\ +\vartheta_1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \vartheta_a \\ \mathbf{u}_b \\ \vartheta_b \end{pmatrix}$$

Дифференцирование по вектору перемещений дает выражение для вектора упругих сил и основной части матрицы касательной жесткости:

$$\mathbf{P} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = -[\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] (\mathbf{y}_0 + [\mathbf{H}] \mathbf{y})$$

$$[\mathbf{K}_{r1}^{inc}] = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{y}^2} = [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{H}] \quad (14)$$

Отметим что вектор сил в выражении (14) уже содержит в себе обобщенные моменты, поэтому матричный множитель, как в выражении (13), не требуется. Выражение (14) для матрицы жесткости не учитывает дополнительных эффектов от вращения матрицы  $[\mathbf{K}_{II}]$ . Приближенный учет этих эффектов выполняется аналогично (11) и (12):

$$[\mathbf{K}_{t2}^{inc}] = \frac{1}{4}([\mathbf{S}] + [\mathbf{S}]^T); [\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_a & \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_b & \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Полная матрица касательной жесткости складывается из основной и дополнительной частей

$$[\mathbf{K}_t^{inc}] \approx [\mathbf{K}_{t1}^{inc}] + [\mathbf{K}_{t2}^{inc}].$$

### Тестовые примеры и сравнение результатов

Для верификации описанных модификаций, матриц касательной жесткостей и вектора сил была решена тестовая задача №1. Криволинейный стержень квадратного поперечного сечения с осью в виде дуги окружности заделан на одном краю и нагружен силой 600 Н из своей плоскости на другом краю (Рис. 2). Радиус кривизны оси стержня  $R = 100$  м, дуга окружности  $\varphi = 45^\circ$ , поперечное сечение – квадрат со стороной  $a = 1$  м, модуль упругости  $E = 10^7$  Па, коэффициент Пуассона  $\mu = 0$ .

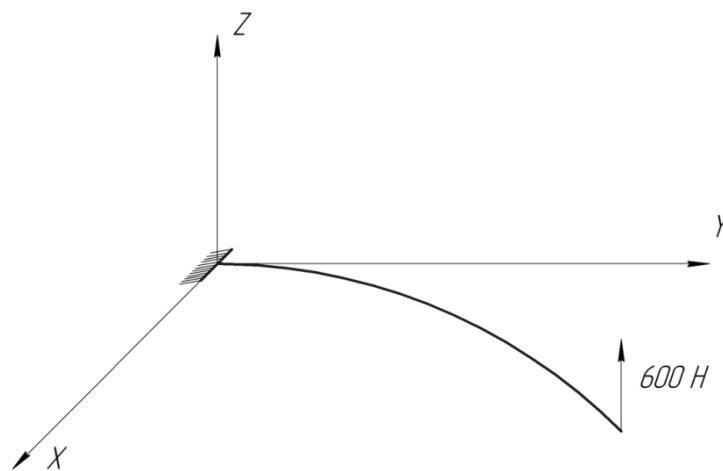


Рисунок 2 – Схема тестового примера №1



Задача, изображенная на рисунке 2, была решена с помощью МКЭ пакета общего назначения (рис. 3), а также с помощью инкрементного и не инкрементного КЭ. В инкрементном и не инкрементном вариантах использовано по 20 элементов. Координаты крайней точки представлены в таблице 1.

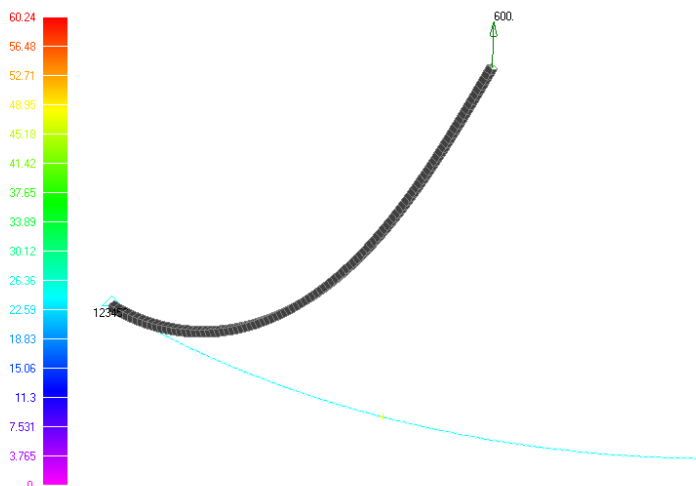


Рисунок 3 – Решение тестовой задачи №1 в МКЭ комплексе

Таблица 1

Способ решения	Координаты крайней точки, м
МКЭ	{46.8947; 15.5593; 53.607}
Инкрементный КЭ	{46.8436;15.5594;53.6617}
Не инкрементный КЭ	{46.8445;15.5631;53.6634}

Из таблицы 1 видно, что результаты решения с использованием инкрементного и не инкрементного КЭ хорошо совпадают с результатами моделирования в МКЭ пакете общего назначения.

Также было проведено сравнительное тестирование модификаций, упомянутых в данной работе. Схема тестовой задачи №2 представлена на рисунке 4. Задача представляет собой сплошной вал диаметра  $d$ , нагруженный силой  $F_x$  и моментом  $M_z$ . Вал на одном конце закреплен по всем степеням свободы кроме

поворота вокруг оси  $Z$ , а на другом конце запрещены повороты вокруг осей  $X$  и  $Y$  и перемещения вдоль этих же осей.

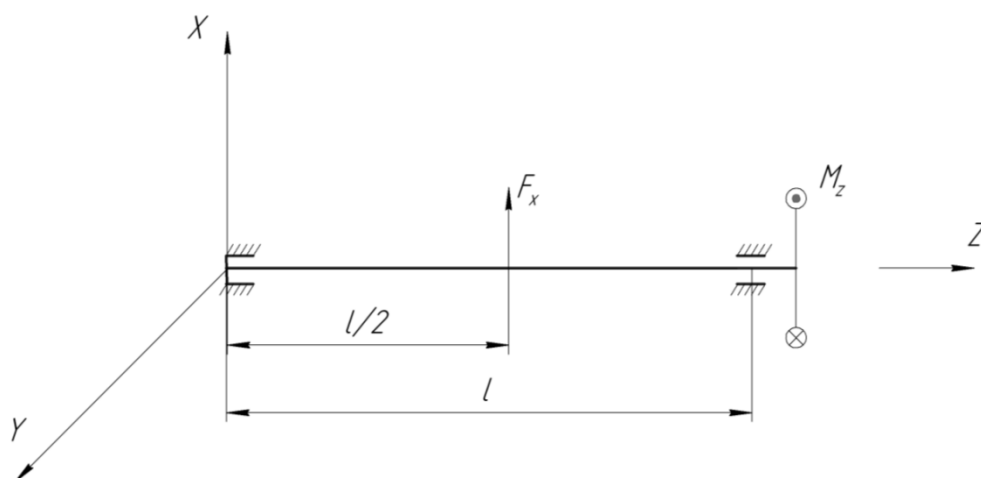


Рисунок 4 – Схема тестового примера №2

Поскольку в данной работе упор делался на модификации, позволяющие описывать неограниченно большие повороты и не описана процедура получения согласованной матрицы масс, то для упрощения будем использовать для обеих модификаций вариант несогласованной диагональной матрицы масс. Такая матрица распределяет массу элемента поровну между каждым из узлов. Модель принимает вид точечных масс, которые при повороте системы не меняются, т.е. учитывать вращение такой матрицы масс не нужно.

Задача была решена при следующем наборе исходных данных, одинаковом для обеих модификаций:  $l = 1000$  мм,  $F_x = 50$  Н,  $M_z = 5$  Н·мм,  $d = 10$  мм, модуль упругости материала  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа, плотность материала  $\rho = 7.85 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ . Для интегрирования системы уравнений движения был использован метод Ньюмарка. Вал был разбит на 20 КЭ. На рисунках 5,6

представлены графики изменения компонент линейных перемещений и скоростей в точке приложения силы для двух модификаций.

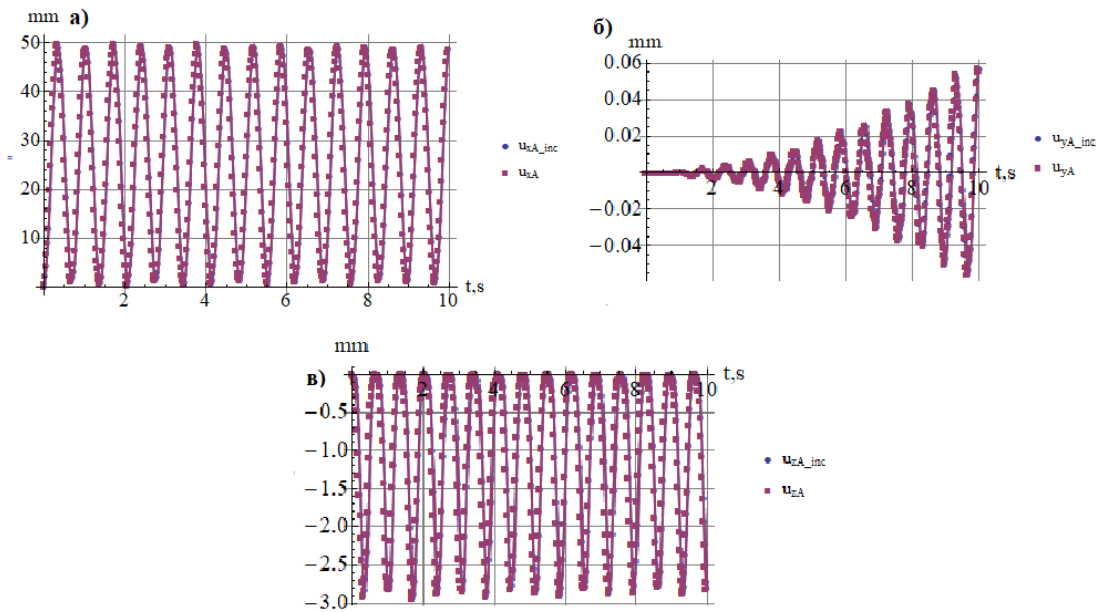


Рисунок 5 – Сопоставление графиков компонент линейных перемещений для инкрементного и не инкрементного способа описания

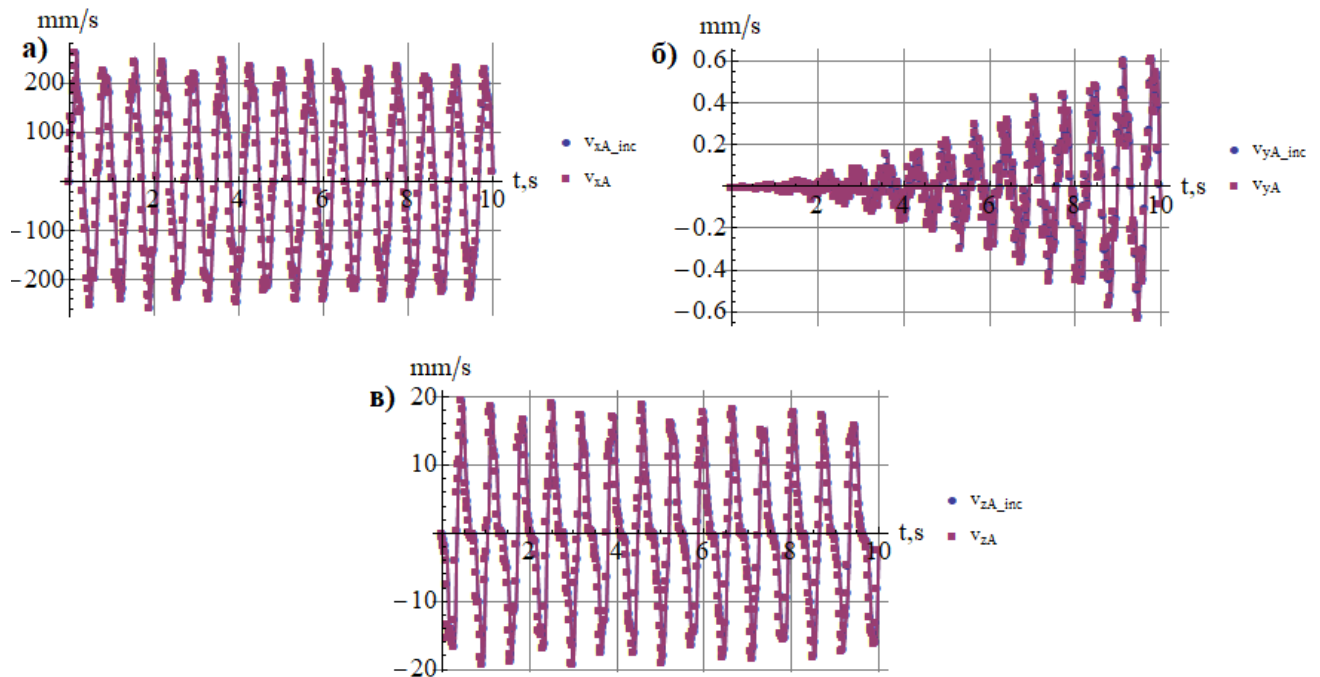


Рисунок 6 – Сопоставление графиков компонент линейных скоростей для инкрементного и не инкрементного способа описания

На рисунке 7 представлены графики угловой скорости (рис. 7а) и углового ускорения вокруг (рис.7б) оси z.

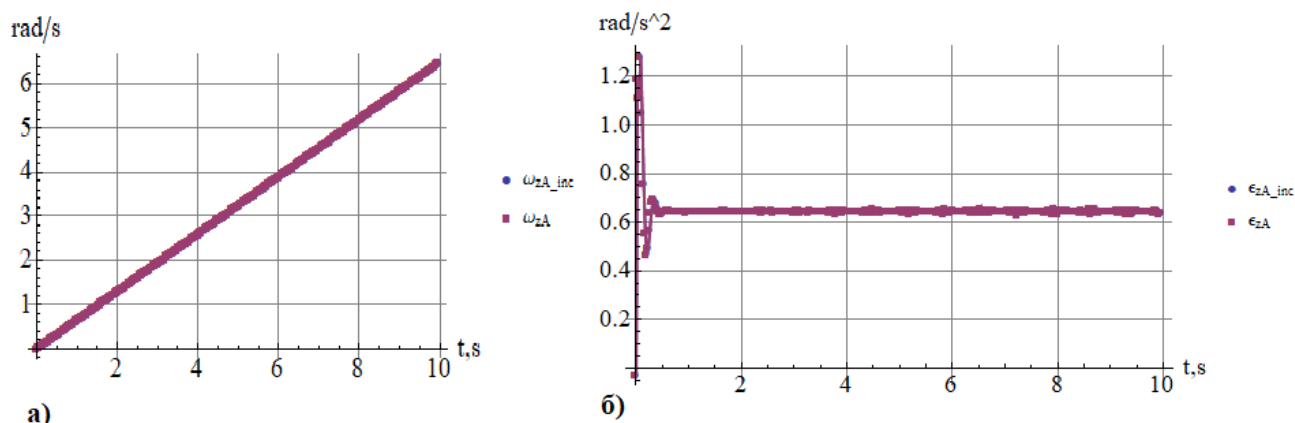


Рисунок 7 – Сопоставление графиков угловой скорости (а) и углового ускорения (б) вокруг оси Z для инкрементного и не инкрементного способа описания

Из рисунков 5-7 видно, что результаты, полученные с использованием двух модификаций, достаточно хорошо совпадают, но стоит отметить, что скачкообразное изменение вектора Эйлера усложняет процедуру численного интегрирования и может приводить к выбросам на графиках угловых скоростей и ускорений. Инкрементный же способ описания лишен такого недостатка.

### Заключение

В статье проведен обзор традиционных подходов к описанию больших перемещений и современных работ по созданию геометрически нелинейных стержневых КЭ. Проведенный обзор показал, что традиционные способы описания больших поворотов и методы на их основе для построения геометрически нелинейных конечных элементов либо не могут быть применены без модификаций, либо являются неоправданными с точки зрения эффективности.

В данной работе предложены две модификации, позволяющие описывать неограниченно большие повороты. Обе модификации основаны на использовании вектора Эйлера. В работе описаны особенности обеих модификаций и получены в замкнутом аналитическом виде матрицы касательной жесткости и вектор узловых

сил КЭ стержня с учетом этих особенностей. Решение тестовых задач двумя подходами при абсолютно идентичных условиях и анализ программного кода (для решения тестовой задачи) позволили выявить преимущества и недостатки обеих модификаций.

Модификация, основанная на корректировке вектора Эйлера при достижении критического значения поворота, крайне проста в реализации, корректировка требуется не на каждом шаге решения. Под простой реализации стоит также понимать и возможность интегрирования этой модификации в МКЭ пакет без значительных изменений в его архитектуре. Однако эта модификация не лишена недостатков: скачкообразное изменение вектора Эйлера при достижении критического значения, несимметричная матрица жесткости (для сохранения непрерывности моментов). Отметим, что проблема несимметричной матрицы жесткости может быть преодолена, достаточно лишь не переходить от обобщенных моментов к «классическим», но в таком случае будет скачкообразное изменение приведенного момента.

Инкрементный способ описания лишен таких недостатков, как скачкообразное изменение вектора Эйлера, несимметричная матрица касательной жесткости (если нет необходимости использовать «классические» моменты), но эта модификация гораздо сложнее в реализации и требует совершенно иной системы хранения результатов по сравнению с предыдущей: после каждого шага решения необходимо обнулять вектор Эйлера, а накопленный поворот хранить отдельно. Кроме того

архитектура должна предусматривать возможность сопряжения инкрементных и не инкрементных элементов, что также является нетривиальной задачей.

Результаты решения тестовых задач для обеих модификаций хорошо коррелируют между собой, несмотря на свои незначительные недостатки, обе модификации обладают высокой производительностью (благодаря полученным замкнутым аналитическим выражениям для матриц касательных жесткостей и вектора узловых сил) и могут успешно применяться для расчета элементов конструкций летательных аппаратов, подверженных большим обобщенным перемещениям при малых деформациях. Также отметим, что хоть описанные модификации и рассмотрены на примере стержневого элемента, они без значительных изменений могут быть распространены на другие двухузловые КЭ, например: КЭ фермы, КЭ пружины, КЭ жесткой связи и т.д.

### **Благодарность**

*Данная работа проведена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках гранта РФФИ № 18-31-00128 мол\_а.*

### **Библиографический список**

1. Братухина А.И. Об усталостной прочности лопасти несущего винта вертолета при действии ветровых нагрузок // Труды МАИ. 2001. № 4. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34669>

2. Братухина А.И. Некоторые особенности исследования динамической прочности лопастей несущего винта с бесшарнирным креплением при полете в неспокойной атмосфере // Труды МАИ. 2001. № 4. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34668>
3. Загордан А.А. Исследование работоспособности упругого отклоняемого носка крыла под действием внешних нагрузок // Труды МАИ. 2010. № 38. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=14145>
4. Комаров В.А., Кузнецов А.С., Лаптева М.Ю. Оценка эффекта учета деформаций крыла на ранних стадиях проектирования // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24759>
5. Светлицкий В.А. Механика стержней. Статика. - М.: Высшая школа, 1987. - 320 с.
6. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008.- 95 с.
7. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней.- СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2007. - 101 с.
8. Бадиков Р.Н. Расчётно-экспериментальное исследование напряжённо-деформированного состояния и резонансных режимов вращения винтовых пружин в пружинных механизмах: дисс. ...канд. техн. наук. - М.: 2009. - 166 с.
9. Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1994. № 1. С. 164 - 168.
10. Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. - 208 с.

11. Дмитроченко О.Н. Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Брянск: 2003. - 16 с.
12. Kreuzer E., Ellermann K. Multibody system dynamics in ocean engineering // Proceedings of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1, Prague, June 23 - July 3, 2002, pp. 108 - 129.
13. Pogorelov D. Multibody system approach in simulation of underwater cable dynamics // Abstracts of Euromech 398. Colloquium on Fluid-Structure Interaction in Ocean Engineering, Germany, Hamburg Technical University, Hamburg-Harburg, October 11-14, 1999, pp. 40.
14. Shabana A.A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments // Multibody System Dynamics, 1997, no.1, pp. 189 - 222.
15. Синельщиков А.В. Большие перемещения в задачах динамического анализа грузоподъемных кранов // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2007. № 2 (37). С. 10 – 16.
16. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of higher and lower order elements for the absolute nodal coordinate formulation // Proceedings of the ASME 5th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, ASME, N.-Y., 2005, pp. 1311-1318, doi:10.1115/DETC2005-84827.
17. Dombrowski S.V. Analysis of Large Flexible Body Deformation in Multibody Systems Using Absolute Coordinates // Multibody System Dynamics, 2002, no. 8, pp. 409 - 432.



18. Yakoub R.Y., Shabana A.A. Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications // Journal of Mechanical Design, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 614 - 623
19. Юдаков А.А. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга–Бэмптона и их практически значимых приближений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 3. С. 126 - 140.
20. Pimenta P.M., Yoho T. Geometrically exact analysis of spatial frames // Applied Mechanics Reviews, 1993, vol. 46, no. 1, pp. 118 - 128.
21. Левяков С.В. Нелинейный пространственный изгиб криволинейных стержней с учетом поперечного сдвига // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 128 - 136.
22. Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach, New York, Wiley, 2000, 327 p.
23. Лалин В.В., Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера // Жилищное строительство. 2013. № 5. С. 51 - 55.
24. Семенов П.Ю. Стержневой конечный элемент для расчетов с большими перемещениями и вращениями // Труды II международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (Казань, 8 - 11 декабря 2009). – Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2009. С. 24 - 29.

25. Felippa C.A., Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, vol. 194, no. 21, pp. 2285 – 2335.
26. Crisfield M.A., Galvanetto U., Jelenić G. Dynamics of 3-D co-rotational beams // *Computational Mechanics*, 1997, vol. 20, no. 6, pp. 507 – 519.
27. Jelenić G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 171, no. 1, pp. 141 – 171.
28. Cardona A., Geradin M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol. 26, no. 11, pp. 2403 - 2438.
29. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. - М.: Наука, 1992. - 280 с.
30. Bremer H. *Elastic multibody dynamics: a direct Ritz approach*, Springer, 2008, 449 p.
31. Сорокин Ф.Д. Особенности рационального способа описания больших поворотов в задачах нелинейной динамики роторных машин // III Международная Школа-конференция молодых ученых "Нелинейная динамика машин"-School-NDM – 2016. Сборник трудов. (Москва, 12-15 апреля 2016). – М.: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, 2016. С. 87 – 93.
32. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. - СПб.: Нестор, 2001. - 276 с.

33. Rankin C.C., Brogan F.A. An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotation // Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of The ASME, 1986, vol. 108, no 2, pp. 165 - 174.
34. Crisfield M.A. Nonlinear Finite Element Analysis of Solid and Structures, John Wiley & Sons, Chichester, 1996, 493 p.
35. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>