

УДК 621.396

**Анализ точности определения собственных координат при
использовании радионавигационной системы с малыми базами
между передатчиками**

Кишко Д.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: dykishko@gmail.com

Аннотация

В статье представлен анализ алгоритмов вторичной обработки сигналов для одного из возможных вариантов построения локальной радионавигационной системы с малыми базами. Исследованы характеристики точности оценки координат летательным аппаратом (ЛА) в рассматриваемой радионавигационной системе для нескольких типов алгоритмов: одномоментного метода наименьших квадратов (МНК), расширенного фильтра Калмана (РФК) и сигма-точечного фильтра Калмана (СТФК). Рассмотрено влияние ухода часов приемника на точность определения координат. Сделаны выводы о качестве работы анализируемых алгоритмов.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, определение координат, локальные радионавигационные системы, UKF, сигма-точечный фильтр Калмана, EKF, расширенный фильтр Калмана

Введение

Спутниковые радионавигационные системы (СРНС) находят широкое применение при определении координат движущихся объектов. Однако в некоторых случаях применение данных систем затруднено, например, вследствие сложной помеховой обстановки или плохого геометрического фактора. Одним из возможных путей решения этой проблемы является применение локальных высокопрецензионных радионавигационных систем (РНС) наземного базирования, например, таких как Locata (www.locata.com) или DeckFinder (www.deckfinder.com). Максимальная ошибка определения собственных координат в навигационной аппаратуре потребителя таких систем зависит не только от расположения и количества антенн радиопередатчиков, но и от ряда других факторов, в числе которых важную роль играют алгоритмы определения координат на основе измерений параметров радиосигналов.

В статье рассматривается локальная радионавигационная система определения собственных координат на борту летательного аппарата (ЛА), состоящая из N равномерно распределенных по окружности радиуса R_0 наземных передатчиков, одной контрольно-корректирующей станции (ККС) и бортовой измерительной аппаратуры. Структурная схема системы для случая $N=4$ приведена на рисунке 1. Местоположение передатчиков, ККС определено в связанной с ними прямоугольной системе координат, в которой также производится оценка собственных координат ЛА.

Как показано на рисунке 1, $B_{i,j}$ - наземные базы, где $i, j = \overline{1, N}, i \neq j$, N - число передатчиков, определенные как расстояние между фазовыми центрами антенн передатчиков; R_i - расстояние от i -ой передающей антенны до ЛА. Отношение максимального расстояния R_{\max} к максимальной длине наземной базы B_{\max} определим как характеристику границы ближней и дальней зоны действия радиосистемы, и обозначим как $R_{\text{cross}} = R_{\max} / B_{\max}$.

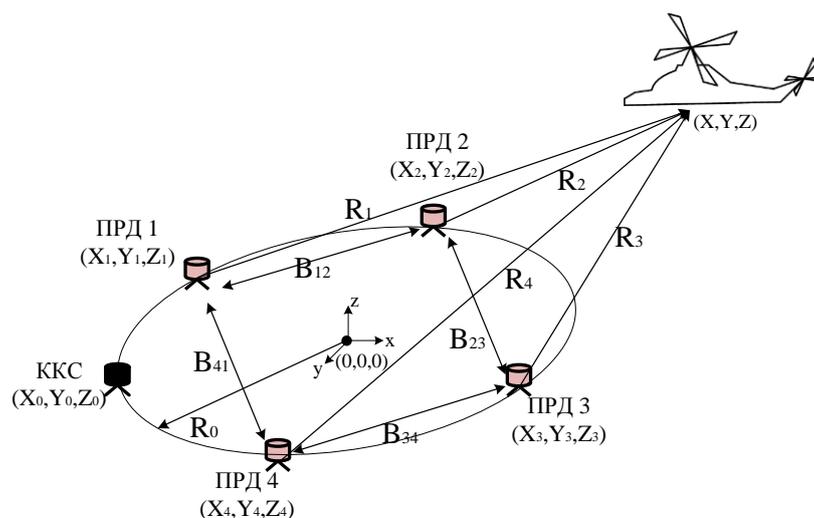


Рисунок 1. Структурная схема системы посадки

Если $R_{\text{cross}} \leq 1$, то ЛА находится внутри сферы радиуса R_0 , то есть в ближней зоне, в ином случае ЛА расположен в дальней зоне. Интерес представляет определение координат в дальней зоне, которая характеризуется плохим геометрическим фактором и, как следствие, низкой точностью определения координат. Одним из вариантов повышения точности определения координат в дальней зоне является применение различных алгоритмов вторичной обработки параметров радиосигналов от наземных передатчиков. Таким образом, применяя различные алгоритмы, удается повысить точность оценки координат ЛА.

Между собой несущие гармонические колебания каждого наземного передатчика частотой $f_1=10\text{ГГц}$ когерентны. Фаза несущего колебания передатчика модулируется двоичной последовательностью, образованной суммированием по модулю два псевдошумового сигнала дальномерного кода (ПШС_i) с периодом T_c и импульсов цифрового двоичного сигнала навигационного сообщения длительностью τ , которая удовлетворяет условию $\tau = T_c$. Сигналы различных радиопередатчиков отличаются структурой ПШС_i, которая выбирается из условия взаимной квазиортогональности любой пары ПШС_{i,j}.

Структура дальномерного кода (ПШС_i) и навигационного сообщения не обсуждаются в данной статье, однако отметим, что такое формирование сигнальной конструкции в результате обработки на борту ЛА позволяет: разделить сигналы от разных наземных передатчиков; сформировать измерения параметров этих сигналов; получить информацию о пространственном расположении передающих антенн (x_i, y_i, z_i) в связанной с ними локальной системе координат.

Контрольно-корректирующая станция производит контроль целостности навигационного поля и оценку расхождения временных шкал каждого передатчика, которая передается на ЛА в навигационном сообщении и учитывается при формировании измерений. Это достигается путем обработки сигналов от каждого передатчика в ККС и вычисления задержек распространения радиосигналов от передатчиков до ККС.

Математические модели измерений параметров радиосигнала и уравнения их связи с оцениваемыми параметрами

В приемной аппаратуре ЛА в результате оценивания параметров навигационных радиосигналов формируются измерения псевдодальности до каждой j-ой передающей антенны на момент измерения t_i. Далее и везде будет предполагаться, что момент измерения t_i определятся по шкале времени приемника. Математические модели измерений псевдодальности ρ_j(t_i) от ЛА до j-ого передатчика в момент измерения t_i, в соответствии с известными выражениями, приведенными в [1], [2], имеют вид:

$$r^j(t_i) = R^j(t_i) + c \left(DT(t_i) - DT^j(t_{i,prec}) + T_{atm}^j + T_h^j \right) + m^j, \quad (1)$$

$$R^j(t_i) = \sqrt{(x - x^j)^2 + (y - y^j)^2 + (z - z^j)^2}, \quad (2)$$

где t_{i,prec} - момент, предшествующий моменту измерений t_i и отстоящий на время, равное времени распространения сигнала от i-ой наземной антенны до приемной антенны ЛА (далее, для краткости будем обозначать как момент предшествования);

$R^j(t_i)$ - расстояние между точкой, которую занимал ЛА в момент t_i и точкой расположения j -ого передатчика на момент $t_{i,prec}$; x^j, y^j, z^j - координаты j -ого передатчика в связанной с ними системе координат, определяемые на момент предшествования и передающиеся в излучаемом сигнале; x, y, z - координаты ЛА на момент измерений, определяемые в результате работы исследуемых алгоритмов; $DT^j(t_{i,prec})$ - смещение показаний часов j -го передатчика в момент предшествования, обусловленное неизвестной начальной фазой излучаемого сигнала; $\Delta T(t_i)$ - смещение показаний часов приемной аппаратуры ЛА в момент измерений; T_{atm}^j - задержка, вызванная распространением сигнала в атмосфере; T_h^j - аппаратурные задержки в приемнике ЛА; m^j - ошибка слежения за фазой дальномерного кода; c - скорость света.

Заметим, что в литературе [1], [2] в математическую модель псевдодальности также включают ошибки, связанные с эффектом многолучевости. В данной статье этот эффект не рассматривается.

Так как наземные антенны расположены на малом удалении друг от друга ($B_{ij} \approx 50$ м.), то можно считать трассы распространения радиосигналов от передающих антенн в сторону ЛА одинаковыми, а, следовательно, ошибки, связанные с атмосферными искажениями в каждом канале приема ЛА можно считать сильно коррелированными между собой. С учетом данного допущения справедливо равенство:

$$T_{atm}^j = T_{atm}, j = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Так как навигационные радиосигналы от наземных передатчиков формируются и излучаются на одной частоте f_1 , аналоговый тракт в приемной аппаратуре ЛА будет общим для всех сигналов, что позволяет считать аппаратурные искажения для разных каналов одинаковыми, и соответственно

$$T_h^j = T_h, j = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Смещение показаний часов $DT^j(t_{i,prec})$ каждого j -го передатчика, вычисляется в ККС и передается в навигационный приемник ЛА. Так что далее будем полагать этот параметр скомпенсированным в измерениях.

Из выражений (3), (4) следует, что в каждом канале приема сигнала от каждой из N антенн в измерениях псевдодальностей присутствуют коррелированные ошибки, связанные с одинаковыми аппаратурными и атмосферными искажениями. Для компенсации этих ошибок существуют два подхода:

1) Первый из них заключается во включении в вектор оцениваемых параметров членов, характеризующих влияние атмосферы, аппаратурные задержки и несоответствие шкал времени. Далее эти параметры оцениваются в процессе работы исследуемых алгоритмов. Такой подход называется псевдодальномерным. Тогда при формировании измерений можно записать систему из N нелинейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1(t_i) = \sqrt{(x - x^1)^2 + (y - y^1)^2 + (z - z^1)^2} + \Delta\tau + \Delta\xi_1 \\ \vdots \\ \rho_j(t_i) = \sqrt{(x - x^j)^2 + (y - y^j)^2 + (z - z^j)^2} + \Delta\tau + \Delta\xi_j \\ \vdots \\ \rho_N(t_i) = \sqrt{(x - x^N)^2 + (y - y^N)^2 + (z - z^N)^2} + \Delta\tau + \Delta\xi_N \end{array} \right. , \quad (5)$$

где $\Delta\tau$ - уход часов приемника, включающий в себя смещения, вызванные атмосферными искажениями, аппаратурными задержками, а также характеризует несовпадение шкал времени приемника и передатчиков; $\Delta\xi_j$ - шумовая ошибка формирования псевдодальности.

2) Во втором случае оперируют разностными измерениями псевдодальностей, формируемых путем вычитания измерений по одной из антенн, назовем ее базовой и обозначим индексом b , из измерений по другим антеннам. Тогда математическая

модель разностей псевдодальностей с учетом компенсации расхождений шкал по двум передающим антеннам можно в виде:

$$Dr_b^j(t_i) = r^j(t_i) - r^b(t_i) = R^j(t_i) - R^b(t_i) + Dx_b^j,$$

где Dx_b^j - шумовая ошибка формирования разности псевдодальностей.

Если в качестве неизвестных параметров в математической модели измерений разности псевдодальностей принять координаты ЛА, и объединить эти измерения по всем передатчикам, то получим в общем случае систему нелинейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\rho^{1,b}(t_i) = \sqrt{(x-x^1)^2 + (y-y^1)^2 + (z-z^1)^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} + \Delta\xi^{1,b} \\ \vdots \\ \Delta\rho^{j,b}(t_i) = \sqrt{(x-x^j)^2 + (y-y^j)^2 + (z-z^j)^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} + \Delta\xi^{j,b} \\ \vdots \\ \Delta\rho^{N-1,b}(t_i) = \sqrt{(x-x^{N-1})^2 + (y-y^{N-1})^2 + (z-z^{N-1})^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} + \Delta\xi^{N-1,b} \end{array} \right. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) для удобства запишем в матричном виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\Theta) + \Xi, \quad (7)$$

где \mathbf{Z} - вектор наблюдений (вектор измеряемых параметров), $\mathbf{H}(\Theta)$ - нелинейная вектор-функция связи оцениваемого вектора Θ с вектором измерений \mathbf{Z} ; вектор аддитивных шумов Ξ .

При записи матриц в случае использования псевдодальномерного метода будем указывать индекс ρ , а в случае разностно-дальномерного подхода $\Delta\rho$. Тогда при разностно-дальномерном подходе вектор-функция $\mathbf{H}(\Theta)$ и векторы \mathbf{Z} , Θ , Ξ имеют вид

$$\Theta_{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{Z}_{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} \Delta\rho^{1,b}(t_i) & \dots & \Delta\rho^{N-1,b}(t_i) \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\Delta\rho}(\Theta) &= \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{(x-x^1)^2 + (y-y^1)^2 + (z-z^1)^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x^j)^2 + (y-y^j)^2 + (z-z^j)^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x^{N-1})^2 + (y-y^{N-1})^2 + (z-z^{N-1})^2} - \sqrt{(x-x^b)^2 + (y-y^b)^2 + (z-z^b)^2} \end{bmatrix}, \quad (10) \\
\Xi_{\Delta\rho} &= \begin{bmatrix} \Delta\xi^{1,b} & \dots & \Delta\xi^{N-1,b} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

В случае псевдодальномерного подхода получаем

$$\Theta_\rho = \begin{bmatrix} x & y & z & \Delta\tau \end{bmatrix}^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{Z}_\rho = \begin{bmatrix} \rho^j(t_i) & \dots & \rho^N(t_i) \end{bmatrix}^T, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_\rho(\Theta) &= \begin{bmatrix} \sqrt{(x-x^1)^2 + (y-y^1)^2 + (z-z^1)^2} + c\Delta\tau \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x^j)^2 + (y-y^j)^2 + (z-z^j)^2} + c\Delta\tau \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x^N)^2 + (y-y^N)^2 + (z-z^N)^2} + c\Delta\tau \end{bmatrix}, \quad (13) \\
\Xi_\rho &= \begin{bmatrix} \Delta\xi^1 & \dots & \Delta\xi^N \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Для определения оцениваемого вектора Θ существуют различные подходы, наиболее распространенными из которых являются:

1. Одномоментные алгоритмы, позволяющие определять оцениваемый вектор системы, использующие измерения только на текущий момент времени, без учета предыдущих состояний системы.

2. Использование математического аппарата калмановской фильтрации. При таком подходе используется информация о состоянии системы в предыдущий момент, что позволяет более точно производить оценку вектора неизвестных. Далее рассмотрим особенности реализации и применения каждого из них.

Одномоментные определения навигационных параметров ЛА по критерию наименьших квадратов

Применение метода наименьших квадратов (МНК) позволяет минимизировать сумму квадрата невязок оцениваемого вектора. Строго говоря, МНК применяется для линейных систем уравнений, а использование его для решения нелинейных систем уравнений, таких как (7), в большинстве случаев оказывается не такой уж тривиальной задачей [3]. Для преодоления этих трудностей, связанных с нелинейностью, применяют итерационные алгоритмы, одним из которых является метод линеаризации с использованием оценки линейного МНК. В таком случае вектор оцениваемых параметров на k -ом шаге итерации определяется согласно [3] следующим образом

$$\Delta \Theta_k = \left(\mathbf{H}_{k-1}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_{k-1} \right)^{-1} \mathbf{H}_{k-1}^T \mathbf{B} d\mathbf{Z}, \quad (14)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}$, \mathbf{R} - ковариационная матрица ошибок измерений; \mathbf{H} - матрица направляющих косинусов; $d\mathbf{Z}$ - невязки вектора измерений.

Для псевдодальномерного метода матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H} согласно [2] принимают вид:

$$\mathbf{H}_{k,p} = \begin{bmatrix} h_{k,x}^1 & h_{k,y}^1 & h_{k,z}^1 & 1 \\ h_{k,x}^2 & h_{k,y}^2 & h_{k,z}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{k,x}^N & h_{k,y}^N & h_{k,z}^N & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{R}_p^{-1} = \left(\sigma_p^2 \cdot \mathbf{I}_{N \times N} \right)^{-1}, \quad (16)$$

$$h_{k,x}^j = \frac{x_k - x^j}{R_k^j}, h_{k,y}^j = \frac{y_k - y^j}{R_k^j}, h_{k,z}^j = \frac{z_k - z^j}{R_k^j}$$

где S_r^2 -дисперсия ошибок вектора измерений, $\mathbf{I}_{N \times N}$ - единичная матрица размером $N \times N$; R_k^j - грубая дальность от ЛА до передатчиков

$$R_k^j = \sqrt{(x_k - x^j)^2 + (y_k - y^j)^2 + (z_k - z^j)^2}$$

При формировании разностей псевдодальностей в векторе измерений появляются корреляционные зависимости, которые необходимо учитывать при формировании матриц \mathbf{B} и \mathbf{H} [2]

$$\mathbf{H}_{k,\Delta\rho} = \begin{bmatrix} h_{k,x}^1 - h_{k,x}^b & h_{k,y}^1 - h_{k,y}^b & h_{k,z}^1 - h_{k,z}^b \\ h_{k,x}^2 - h_{k,x}^b & h_{k,y}^2 - h_{k,y}^b & h_{k,z}^2 - h_{k,z}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{k,x}^{N-1} - h_{k,x}^b & h_{k,y}^{N-1} - h_{k,y}^b & h_{k,z}^{N-1} - h_{k,z}^b \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_\rho = (\mathbf{G}\mathbf{R}_\rho\mathbf{G}^T)^{-1}, \quad (18)$$

где \mathbf{G} - матрица размерностью $(N-1) \times (N)$, которая может быть получена добавлением к единичной матрице, размером $(N-1) \times (N-1)$, столбца из элементов равных минус единице. Место добавления столбца в единичную матрицу соответствует номеру базовой антенны.

Таким образом, записав выражение для матриц \mathbf{B} , \mathbf{H} и используя (14), удастся построить итерационный процесс определения оценки вектора неизвестных по МНК, характеристики точности которого будут приведены далее.

Алгоритмы определения навигационных параметров ЛА по критерию максимума апостериорной функции плотности вероятности

Одним из альтернативных подходов к решению задачи определения вектора оцениваемых параметров системы Θ является использование критерия максимума апостериорной функции плотности вероятности. Предполагается, что вектор параметров состояния Θ задан на множестве дискретных моментов времени t_i , далее для краткости обозначаемых индексом i . Изменение вектора состояния Θ в общем случае описывается дифференциальным уравнением, однако при переходе к

дискретным моментам времени эволюцию вектора состояния системы можно описать нелинейным уравнением, которое удобнее всего представить аналогично [4]:

$$\Theta_i = F(\Theta_{i-1}) + \Xi_{\Theta}, \quad (19)$$

где $F(\Theta_{i-1})$ - нелинейная функция перехода, описывающая эволюцию системы; Ξ_{Θ} - вектор аддитивных гауссовских шумов процесса с известной матрицей ковариации Q .

Известно также, что вектор оцениваемых параметров системы связан с вектором состояния через нелинейную функцию (7), которую запишем с учетом индексов i , аналогично как это сделано в [4]:

$$Z_i = H(\Theta_i) + \Xi_Z, \quad (20)$$

где $H(\Theta_i)$ - нелинейная функция связи вектора оцениваемых параметров системы с вектором наблюдаемых величин, Ξ_Z - вектор аддитивных гауссовских шумов измерений с известной матрицей ковариации R .

Оценка вектора Θ_i может быть произведена путем вычисления максимума функции условной плотности вероятности этого процесса $p(\Theta_i | Z_i)$. Для этого необходимо эту функцию $p(\Theta_{i-1} | Z_{i-1})$, известную на предыдущий момент, экстраполировать на i -ый момент времени, используя уравнения Колмогорова-Чепмена:

$$p(\Theta_i | Z_{i-1}) = \int p(\Theta_i | \Theta_{i-1}) p(\Theta_{i-1} | Z_{i-1}) d\Theta_{i-1} \quad (21)$$

где $p(\Theta_i | \Theta_{i-1})$ - функция плотности вероятности перехода системы, вычисляемой на основе (19).

Затем экстраполированную функцию плотности вероятности необходимо скорректировать с учетом текущего вектора измерений Z_i , используя правило Байеса. В итоге, искомая функция условной плотности вероятности принимает вид:

$$p(\Theta_i | Z_i) = p(\Theta_i | Z_i, Z_{i-1}) = \frac{p(Z_i | \Theta_i, Z_{i-1})p(\Theta_i | Z_{i-1})}{p(Z_i | Z_{i-1})} = b^{-1}p(\Theta_i | Z_{i-1})p(\Theta_i | \Theta_{i-1}) \quad (22)$$

где коэффициент $b = p(Z_i | Z_{i-1})$ может быть вычислен из условия нормировки (22); $p(\Theta_i | Z_{i-1})$ - условная плотность вероятности (21); $p(Z_i | \Theta_i, Z_{i-1})$ - функция правдоподобия измеряемой величины.

С учетом вышесказанного, оценку вектора Θ_i можно получить путем вычисления максимума апостериорной функции плотности вероятности $p(\Theta_i | Z_i)$, которое выполняется в два этапа: прогноз с учетом (21) и коррекция в соответствии с (22). Заметим, что оперирование функциями плотностей вероятности в общем случае является сложной задачей, так как требует её вычисление на бесконечном множестве значений. Однако, в некоторых случаях, например, в предположении что функции F и H в (19) и (20) являются линейными, а шумы аддитивными и гауссовскими, задача вычисления оценки сводится к удобной для вычислений записи рекуррентных алгоритмов фильтра Калмана [4].

Существует распространенный подход [5], который расширяет алгоритмы калмановской фильтрации на класс нелинейных систем. Основная суть данного подхода заключается в линеаризации функции (19), (20) при использовании линейного фильтра Калмана. Данный алгоритм фильтрации носит название расширенный фильтр Калмана (РФК) и сводится к двухэтапной процедуре прогноз-коррекция. Данный алгоритм хорошо известен на практике, поэтому ограничимся общим описанием его применения к рассматриваемой задаче.

Алгоритм РФК требует задания начального значения вектора оцениваемых параметров Θ_{i-1} (или его значение на предыдущем шаге фильтрации), а также ковариационной матрицы этого процесса P_{i-1} , при условии, что случайный процесс Θ_{i-1} является гауссовским с ковариационными матрицами шума прогноза Q и шума измерений R . Ковариационная матрица P_{i-1} в начальный момент времени может

быть задана как диагональная матрица с элементами равными предполагаемой дисперсии каждой компоненты априорно известного вектора Θ_{i-1} . Матрица шума прогноза Q может быть задана аналогично матрице P_{i-1} , однако при выборе значений ее диагональных элементов должны быть учтены следующие особенности: если диагональный элемент матрицы Q стремится к бесконечности, то соседние по времени значения соответствующего ему элемента вектора оцениваемых параметров будут слабо коррелированы между собой, а если значение диагонального элемента матрицы Q стремится к нулю, то будет наблюдаться сильная корреляция вектора оцениваемых параметров. Эволюция системы описывается согласно известным нелинейным функциям F , способы ее формирования будут рассмотрены далее, и H , согласно (10) и (13).

Строго говоря, оценки вектора состояния, полученные в результате работы расширенного фильтра Калмана, не являются оптимальными, так как были получены в результате разложения нелинейных функций F и H в ряд Тейлора, ограниченный членами в степени не выше первой. Однако этот подход позволяет формально подойти к задаче нелинейной фильтрации и получить квазиоптимальные оценки с приемлемой точностью.

Широкое распространение получили алгоритмы нелинейной фильтрации, использующие аппроксимацию условных плотностей вероятности (21) и (22) с помощью набора точек в пространстве оцениваемых параметров. Сигма-точечный фильтр Калмана (СТФК или Unscented Kalman Filter (UKF)) использует идею о сигма-точечной трансформации (UT) с использованием $2L+1$ сигма-точек [5],[6],[7] где L - размерность вектора состояния. Далее и везде под сигма-точкой понимается значение вектора оцениваемых параметров, полученное по определенному правилу их генерации. В [5] показано, что, используя UT трансформацию для функций F и H , удастся более достоверно оценить положение максимума апостериорной плотности вероятности вектора оцениваемых параметров Θ_i , по сравнению с оценкой фильтром РФК.

Как показано в [6]-[8], СТФК можно представить в виде процедуры прогноз-коррекция:

Инициализация.

На каждом i -ом шаге фильтрации полагаются известными: Θ_{i-1} , P_{i-1} , Q , R , F и H . Осуществляется вычисление весовых коэффициентов для каждой из $2L+1$ точек согласно правилу:

$$W_j^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{(L + \lambda)}, j = 1 \\ \frac{\lambda}{2(L + \lambda)}, j = 2 \dots (2L + 1) \end{cases},$$

$$W_j^{(c)} = \begin{cases} \frac{1}{(L + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta), j = 1 \\ \frac{\lambda}{2(L + \lambda)}, j = 2 \dots (2L + 1) \end{cases},$$

где $l = a^2(L + k) - L$, β , $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$ - параметры, определяющие положение сигма-точек в пространстве состояний. Согласно [5]-[7] a и k регулируют разброс точек относительно математического ожидания, β зависит от априорной функции плотности вероятности распределения вектора оцениваемых параметров, обычно данные параметры выбираются следующим образом $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$, $k = 0$ и для случая, если вектор оцениваемых параметров распределен по гауссовскому закону $b = 2$.

1) Этап прогноза.

Осуществляется генерирование $2L+1$ сигма-точек, которые помещаются в матрицу Ω_{i-1} по столбцам согласно правилу:

$$\Omega_{i-1} = [\Theta_{i-1} \quad \Theta_{i-1} + \gamma\sqrt{P_{i-1}} \quad \Theta_{i-1} - \gamma\sqrt{P_{i-1}}],$$

где $\sqrt{P_{i-1}}$ - процедура извлечения матричного квадратного корня.

Далее для обозначения столбца матрицы Ω_{i-1} будем указывать его номер индексом j . Так, например, запись $\Omega_{j,i-1}$ означает вектор столбец, сформированный из j -ого столбца матрицы Ω_{i-1} .

Далее, следуя алгоритму, производится экстраполирование вектора Ω_{i-1} и матрицы ковариации процесса на i -ый момент времени

$$\Omega_{i-1}^* = \mathbf{F}(\Omega_{i-1}),$$

$$\mathbf{P}_i^- = \sum_{j=1}^{2L+1} W_j^{(c)} (\Omega_{i-1}^* - \Theta_i^-) (\Omega_{i-1}^* - \Theta_i^-)^T + \mathbf{Q},$$

где

$$\Theta_i^- = \sum_{j=1}^{2L+1} W_j^{(m)} \Omega_{i-1}^*,$$

2) Этап коррекции.

Производится генерация сигма-точек на основе экстраполированного вектора состояния Θ_i^- и матрицы ковариации \mathbf{P}_i^- :

$$\Omega_i^- = [\Theta_i^- \quad \Theta_i^- + \gamma \sqrt{\mathbf{P}_i^-} \quad \Theta_i^- - \gamma \sqrt{\mathbf{P}_i^-}]$$

Затем осуществляется корректировка вектора состояния и матрицы ковариации:

$$\tilde{\Theta}_i = \Theta_i^- + \mathbf{K}(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_i^-),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i^- - \mathbf{K} \mathbf{P}_i^- \mathbf{K}^T,$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_{zz}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \sum_{j=1}^{2L+1} W_j^{(c)} (\Omega_{j,i}^- - \Theta_i^-) (\mathbf{Y}_{j,i}^- - \mathbf{Z}_i^-)^T,$$

$$\mathbf{P}_{zz} = \sum_{j=1}^{2L+1} W_j^{(c)} (\mathbf{Y}_{j,i}^- - \mathbf{Z}_i^-) (\mathbf{Y}_{j,i}^- - \mathbf{Z}_i^-)^T + \mathbf{R},$$

$$\mathbf{Y}_i^- = \mathbf{H}(\Theta_i^-),$$

$$\mathbf{Z}_i^- = \sum_{j=1}^{2L+1} \mathbf{W}_j^{(m)} \mathbf{Y}_{j,i}^-.$$

СТФК является более мощным инструментом по сравнению с РФК, так как в его реализации отсутствует линейаризация нелинейных функций \mathbf{F} и \mathbf{H} и исключены сопутствующие этому ошибки. Причем, согласно [7], затраты машинных ресурсов для работы СТФК возрастают незначительно по сравнению с РФК.

Результаты моделирования алгоритмов вторичной обработки сигналов радионавигационных систем с малыми базами

Анализ характеристик точности алгоритмов вторичной обработки проводится путем моделирования в среде Matlab радиосистемы посадки, включающей группу из N передатчиков ($N=4$), расположенных на окружности радиусом $R_0 = 50$ м и приемник радионавигационных сигналов, расположенный на борту ЛА. Оценивание параметров радиосигналов на борту ЛА производится 100 раз в секунду (с темпом выдачи измерений равным 100 Гц). Схема эксперимента приведена на рисунке 2.

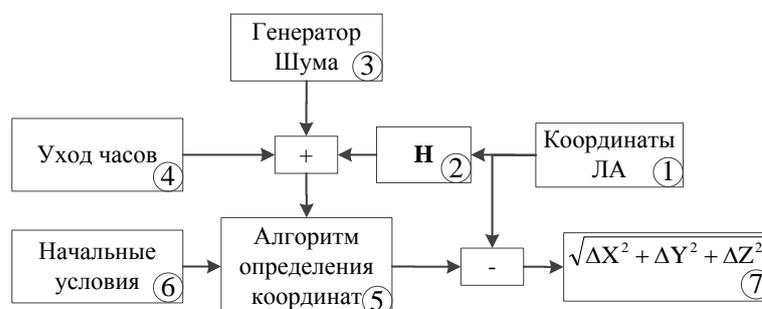


Рисунок 2. Схема эксперимента

В схеме на рисунке 2 блоки 1-4 задают модель измерений параметров радионавигационных сигналов наземных передатчиков согласно выражению (5). Для этого координаты ЛА вычисляются в блоке 1 согласно предполагаемой модели движения. В работе приняты следующие траектории движения ЛА:

- траектория №1- висение в точках, удаленных от центра окружности (точка «О») расположения антенн на расстояние 50, 100, 250; 500, 1000 и 1500м..

В этом случае вектор-функцию $F(\Theta_{i-1})$ можно представить в виде произведения единичной матрицы на вектор оцениваемых параметров;

- траектория №2- движение со скачкообразно меняющейся угловой скоростью. Начало движения в точках удаленных от центра окружности расположения антенн на расстояние 500, 1000, 1500 и 2000 м. На рисунке 3 представлен пример такой траектории с началом движения в точке $X_0 = 1000\text{м}$. $Y_0 = 0\text{м}$. Согласно [8], вектор функцию $F(\Theta_{i-1})$ для такой траектории можно записать следующим образом

$$F(\Theta_{i-1}) = F_1(\omega) \cdot \Theta_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sin(\omega \cdot dT)}{\omega} & \frac{\cos(\omega \cdot dT) - 1}{\omega} \\ 0 & 1 & \frac{1 - \cos(\omega \cdot dT)}{\omega} & \frac{\sin(\omega \cdot dT)}{\omega} \\ 0 & 0 & \cos(\omega \cdot dT) & -\sin(\omega \cdot dT) \\ 0 & 0 & \sin(\omega \cdot dT) & \cos(\omega \cdot dT) \end{bmatrix} \cdot \Theta_{i-1},$$

где dT период дискретизации, ω - круговая скорость движения ЛА.

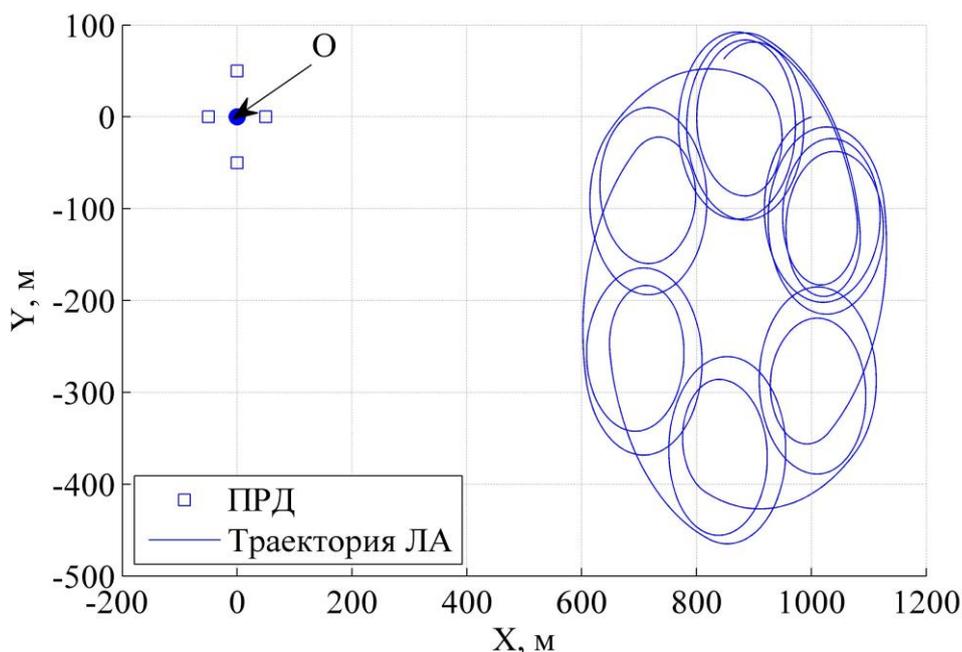


Рисунок 3. Траектории №2 - движение со скачкообразно меняющейся угловой скоростью

В блоке 4 учитывается расхождение шкал времени приемника и передатчиков. На расхождение шкал времени влияют множество факторов, наиболее существенными из которых являются: неточность установки номинальной частоты опорного генератора и изменение его температуры, нестабильность питающего напряжения и фактор старения, а также кратковременная нестабильность номинальной частоты. Современные кварцевые резонаторы обладают точностью установки номинальной частоты $\Delta f/f_0 = 0,5 \dots 100 \cdot 10^{-6}$, что при номинальной частоте $f_0 = 10$ МГц соответствует неточности установки частоты $Df = 5 \dots 1000$ Гц. Будем считать температуру кварцевого резонатора на протяжении всей работы алгоритмов постоянной, а кратковременную нестабильность опорной частоты равной 10^{-8} . Данные упрощения позволяют задать модель расхождения шкал времени как функцию от времени $\Delta\tau = \Delta f \cdot \lambda \cdot t + \tau_0$ (где Δf - неточность задания опорной частоты, λ - длина волны несущего колебания, τ_0 - константа, численно характеризующая несоответствие начальных фаз генераторов).

Так как в статье проводится сравнительный анализ алгоритмов и интерес представляет результат их работы при одинаковых условиях, то далее можно принять значения для ранее введенных параметров, соответствующие наиболее типичным значениям: $\sigma_p = 0,5$ м, $\Delta f = 20$ Гц, $\lambda = 0,03$ м, $\tau_0 = 0$.

Среднюю квадратичную ошибку (СКО) определения координат для каждого из алгоритмов будем вычислять в соответствии с формулой

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2},$$

где σ_x^2 , σ_y^2 , σ_z^2 - дисперсия ошибки определения координат по осям x, y, z соответственно.

Анализ характеристик точности будем проводить для следующих алгоритмов:

- Одномоментный разностно-дальномерный МНК (МНК-Рд);
- Одномоментный псевдодальномерный МНК (МНК-Пд);

- Фильтрация на основе расширенного фильтра Калмана при разностно-дальномерных измерениях (РФК-Рд);
- Фильтрация на основе расширенного фильтра Калмана при псевдодальномерных измерениях (РФК -Пд).
- Фильтрация на основе сигма-точечного фильтра Калмана при разностно-дальномерных измерениях (СТФК-Рд);
- Фильтрация на основе сигма-точечного фильтра Калмана при псевдодальномерных измерениях (СТФК-Пд).

Согласно методу Монте-Карло оценка дисперсии случайного стационарного процесса с нулевым математическим ожиданием при достаточно большом количестве опытов определяется выражением [9]

$$\tilde{\sigma}_{\Sigma}^2 = \frac{\sum \sigma_{i,\Sigma}^2}{N_{\text{exp}}}, i = 1 \dots N_{\text{exp}},$$

где $S_{i,S}^2$ - дисперсия, полученная в i -ом опыте.

Для уровня доверия $Q = 0.95$ количество опытов соответствует выражению [9]

$$N_{\text{exp}} = 6.63 \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\Sigma}}{\varepsilon} \right)^2,$$

где $\tilde{\sigma}_{\Sigma}$ - предполагаемая СКО оценки координат; ε - точность оценки предполагаемой СКО. Так, при соотношении $\frac{\tilde{\sigma}_{\Sigma}}{\varepsilon} = 50$ количество опытов равно $N_{\text{exp}} \approx 17000$. Это означает, например, что с достоверностью 0.95 возможно оценить СКО равную 100 метрам с погрешностью 2 метра. В условиях данной задачи данная точность вполне подходит для сравнения результатов работы алгоритмов. Время моделирования в этом случае составляет $T \geq \Delta T \cdot N_{\text{exp}} = 170$ с, для $\Delta T = 0.01$ с- шаг дискретизации, равный темпу выдачи измерений.

Предполагаемый характер движения ЛА определяет функцию перехода системы \mathbf{F} (19). Заметим, что ранее были выбраны такие траектории движения как

висение в точках и движения со скачкообразно меняющейся угловой скоростью. В связи с этим оптимальным является принятие \mathbf{F} совпадающую с функцией, с помощью которой вычисляется траектория движения ЛА. Однако для реализации алгоритмов ограничимся линейной моделью движения ЛА. С одной стороны она будет не оптимальной, но с другой более общей и охватывающей при определенных условиях оба случая движения (по траекториям №1 и №2). Так, например, при нулевой скорости линейная модель движения описывает траекторию висения в точках, а при высоком темпе выдачи будет нивелировать нелинейные эффекты связанные со скачкообразно меняющейся угловой скоростью. Тогда при гипотезе о линейном движении ЛА вектор оцениваемых параметров и функция перехода \mathbf{F} для разностно-дальномерных методов примут вид:

$$\Theta_{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{F}_{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta T \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ - единичная матрица размерности 3×3 ; $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ - нулевая матрица размерности 3×3 . Заметим, что для линейной модели движения необходимо расширить вектор оцениваемых параметров $\Theta_{\Delta\rho}$ членами, которые являются оценками скорости движения ЛА.

Для псевдодальномерных методов наряду с ранее описанными параметрами в вектор Θ_{ρ} входит дополнительный параметр $\Delta\tau$, характеризующий уход часов приемника. Вектор оцениваемых параметров и функция перехода в этом случае примут вид:

$$\Theta_{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \Delta\tau \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{F}_{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ошибка определения координат в зависимости от дальности до антенн R_{\max} для траектории №1 представлены на рисунке 4, для траектории №2 на рисунке 5.

Фильтрационные алгоритмы РФК и СТФК (рисунок 4а и 5а) в условиях поставленной задачи производят оценку координат с одинаковыми точностями. С учетом работ [5]-[8], в которых описаны эти два алгоритма, подчеркнем, что в нелинейных задачах и при воздействии небелых шумов достигаются более точные оценки вектора состояния в алгоритме СТФК по сравнению с РФК.

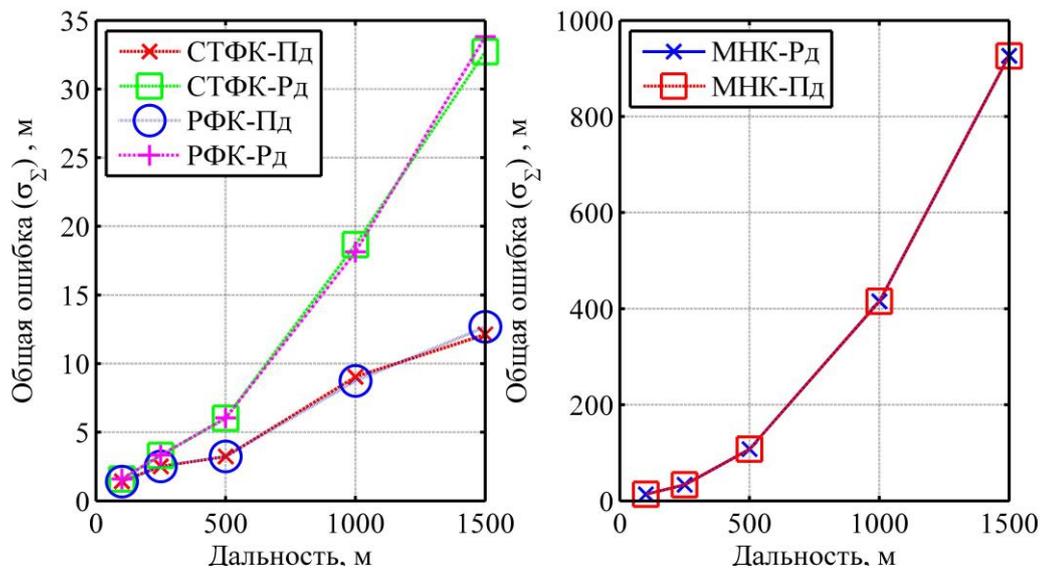


Рисунок 4. Зависимость общей СКО определения координат для траектории №1

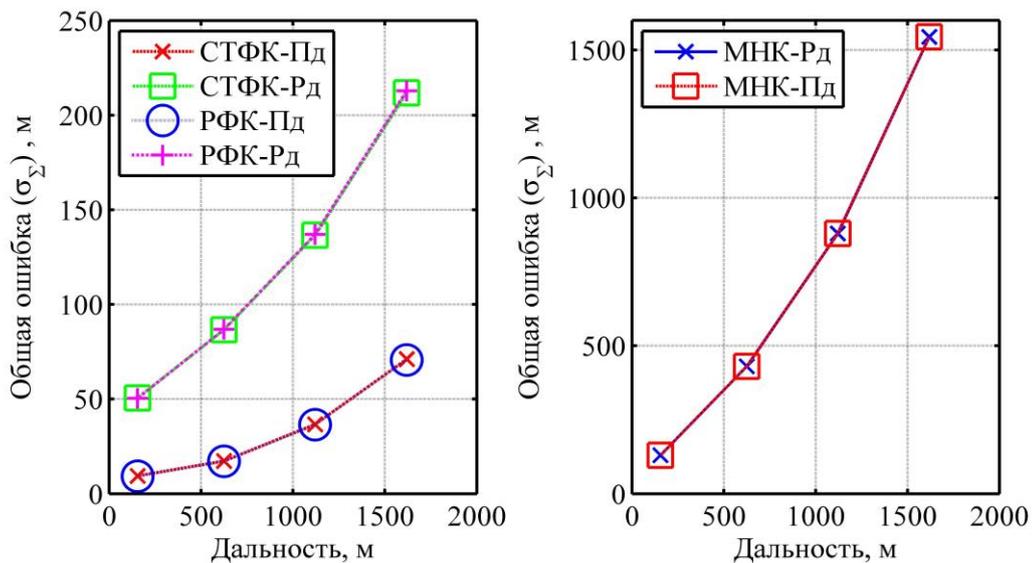


Рисунок 5. Зависимость общей СКО определения координат для траектории №2

Сравнивая результаты разностно-дальномерных и псевдодальномерных алгоритмов можно отметить, что одномоментные алгоритмы МНК-Рд и МНК-Пд в результате своей работы производят оценку координат с одинаковыми точностями, однако фильтрационные алгоритмы с псевдодальномерной моделью измерений дают лучшую оценку вектора состояния по сравнению с алгоритмами, использующими разностно-дальномерные измерения. Это обусловлено тем, что в алгоритмах с псевдодальномерной моделью уход часов $\Delta\tau$ оценивается совместно с координатами ЛА, а в алгоритмах с разностно-дальномерной моделью этот уход часов компенсируется за счет формирования разностных измерений и отсутствует в векторе оцениваемых параметров. Таким образом, в фильтрах с псевдодальномерными измерениями появляется возможность учесть модель ухода часов $\Delta\tau$, и как видно из рисунков 4 и 5 позволяет повысить точность определения координат более чем в 2 раза.

В проводимых исследованиях в структуре фильтрационных алгоритмов с измерениями псевдодальномерности используется модель расхождения показаний часов в виде полинома нулевой степени $\Delta\tau = \text{const}$, как видно она не соответствует модели измерений псевдодальномерности, в которой была принята линейная модель расхождения показаний часов $\Delta\tau = \Delta f \cdot \lambda \cdot t + \tau_0$. В ходе проверок работоспособности алгоритмов было выявлено, что данное упрощение несущественно влияет на увеличение ошибки определения координат, однако в то же время позволяет снизить вычислительные затраты. Существуют другие подходы к заданию модели ухода часов в структуре алгоритма, например, к ним относится модель часов в виде белого гауссовского шума, при использовании которой алгоритмы с разностно-дальномерными и псевдодальномерными измерениями становятся сравнимыми по точности.

Выводы:

1. Наиболее точные результаты определения координат в дальней зоне радионавигационных систем с малыми базами дают алгоритмы РФК и СТФК, использующие псевдодальномерные измерения;

2. Фильтрационные алгоритмы на основе измерений псевдодальностей обеспечивают более точные оценки координат по сравнению с алгоритмами, использующими разностно-дальномерные измерения. Это достигается за счет учета модели расхождения шкал времени в векторе состояния псевдодальномерных алгоритмов. Так, например общая ошибка алгоритма СТФК-Пд при дальности 1000 м до передатчиков и движению по траектории №1 составляет около 10 м, а для алгоритма СТФК-Рд - 20 м, а для траектории №2 30 м и 140 м соответственно. Данные выводы подтверждаются тем, что при использовании модели ухода часов в виде белого гауссовского шума точности псевдодальномерного и разностно-дальномерно подходов становятся сравнимыми;
3. Характеристики точности, полученные алгоритмами СТФК и РФК в условиях поставленной задачи, практически совпадают, несмотря на приведенные в работах [5]-[8] преимущества СТФК по сравнению с РФК.

При подготовке статьи к печати были использованы научные результаты, полученные при проведении исследований в рамках гранта 14.Z57.14.5589-НШ.

Библиографический список

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. Изд. 4-е, перераб. и доп.– М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
2. Поваляев А.А. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. – М.: Радиотехника, 2008, 328 с.
3. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ, 3-е изд.: Пер с англ. – М.: ИД «Вильямс», 2007. - 912 с.
4. Kalman R.E.. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering 82 (1): pp. 35–45.

5. Julier S.J., Uhlmann J.K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems, in Proc. Of AeroSense: The 11-th Int/Symp/ on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Control., 1997.
6. Wan E.A., R. van der Merwe, The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation», in Proc. of IEEE Symposium 2000 (AS-SPXX), Lake Louise, Alberta, Canada, 2000.
7. Wan, E.A. and R. van der Merwe, The Square-Root Unscented Kalman Filter for state and parameter-estimation, in Proc. of IEEE Symposium 2000 (AS-SPXX), Lake Louise, Alberta, Canada, 2000.
8. Optiz F., Kausch T., UKF controlled Variable-Structure IMM Algorithms using Coordinated Turn Model, in Proc. of the 7th International Conference on Information Fusion, Stockholm, 2004, pp. 123-129.
9. Вентцель Е. С. Исследование операций. - М.: «Советское радио», 1972, 552 с.