

Труды МАИ. 2023. № 131
Trudy MAI, 2023, no. 131

Научная статья
УДК 534.134
DOI: [10.34759/trd-2023-131-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-03)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,
Курган, Россия

ip.popov@yandex.ru

Аннотация. Отмечено, что при прочностных расчетах элементов конструкций летательных аппаратов, в том числе, учитываются режимы вынужденных и собственных колебаний. В этой связи принимаются во внимание динамические свойства транспортируемого груза, которые для сплошных и дисперсных материалов являются существенно разными. Рассматривается дисперсный материал, расположенный на платформе, совершающей гармонические колебания. Главная проблема при установлении динамических свойств дисперсного материала заключается в невозможности вычисления усредненного коэффициента динамического трения, т.к. на его значение оказывает влияние взаимодействие дисперсных частиц между собой во всей массе материала, а не только с поверхностью платформы. Описание динамического статуса дисперсного материала

в форме композиции его неустойчивого и устойчивого статусов дает ключ к разрешению этой и сходных проблем.

Ключевые слова: дисперсный материал, динамические свойства, статус системы, комбинация статусов, платформа, устойчивость/неустойчивость

Для цитирования: Попов И.П. Динамические свойства дисперсного материала при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-03)

Original article

DYNAMIC PROPERTIES OF A DISPERSED MATERIAL UNDER HARMONIC VIBRATIONS

Igor P. Popov

Kurgan State University,

Kurgan, Russia

ip.popow@yandex.ru

Abstract. The aim of the work is to establish the dynamic properties of a dispersed material with harmonic vibrations. In strength calculations of structural elements of aircraft, among other things, modes of forced and natural vibrations are taken into account. In this regard, the dynamic properties of the transported cargo are taken into account, which are significantly different for solid and dispersed materials. The research methodology consists in presenting the status of the system under study as a combination of its diametrically opposite limiting statuses. Considered is a dispersed material located on a platform that performs harmonic oscillations. To assess the instability (or stability) of

a dispersed material relative to the platform, a dimensionless quantity ξ is introduced. Its limiting values are ξ_a – absolute stability (complete immobility) relative to the platform and ξ_z – absolute instability. The main problem in establishing the dynamic properties of a dispersed material is the impossibility of calculating the average coefficient of dynamic friction, since its value is influenced by the interaction of dispersed particles with each other in the entire mass of the material, and not only with the surface of the platform. The description of the dynamic status of a dispersed material in the form of a composition of its unstable and stable statuses provides the key to solving this (and similar) problems. Opposite limit statuses of the system under study can be comparable and incomparable in terms of quantitative assessment. The subject of the study are systems with equal limiting statuses. The proposed method is universal and applicable to a wide variety of systems with different statuses and parameters.

Keywords: dispersed material, dynamic properties, system status, combination of statuses, platform, stability/instability

For citation: Popov I.P. Dynamic Properties of Dispersed Material at Harmonic Vibrations. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-03)

При прочностных расчетах элементов конструкций летательных аппаратов, в том числе, учитываются режимы вынужденных и собственных колебаний [1-5]. В этой связи принимаются во внимание динамические свойства транспортируемого

груза, которые для сплошных и дисперсных материалов являются существенно разными.

Целью работы является установление динамических свойств дисперсного материала при гармонических колебаниях [6-11].

Методика исследования заключается в представлении статуса исследуемой системы в виде комбинации ее диаметрально противоположных предельных статусов. Распространенным примером такого представления является состав углеродистой стали, являющийся комбинацией железа и углерода (100% железа в стали – один предельный статус, 100% углерода – диаметрально противоположный предельный статус).

Рассматривается дисперсный материал, расположенный на платформе, совершающей гармонические колебания [12-20].

Для оценки неустойчивости (или устойчивости) дисперсного материала относительно платформы вводится безразмерная величина ξ .

Ее предельными значениями являются ξ_a – абсолютная устойчивость (полная неподвижность) относительно платформы и ξ_z – абсолютная неустойчивость.

При этом

$$\xi \in [\xi_a, \xi_z] \subset \mathbb{R}.$$

Композиция предельных значений может быть представлена в виде:

$$\xi = \varphi_a \xi_a + \varphi_z \xi_z. \quad (1)$$

Здесь φ_a и φ_z – *функции статуса*.

Главная проблема при установлении динамических свойств дисперсного материала заключается в невозможности вычисления усредненного коэффициента динамического трения, т.к. на его значение оказывает влияние взаимодействие дисперсных частиц между собой во всей массе материала, а не только с поверхностью платформы.

Описание динамического статуса дисперсного материала в форме композиции его неустойчивого и устойчивого статусов дает ключ к разрешению этой и сходных проблем.

Противоположные предельные статусы исследуемой системы могут быть сопоставимыми и несопоставимыми в части количественной оценки.

Предметом исследования являются системы с равновеликими предельными статусами.

Комбинация диаметрально противоположных равновеликих предельных статусов

Для дисперсного материала таковыми являются ξ_a (абсолютная устойчивость) и ξ_z – (абсолютная неустойчивость). Их равновеликость определяется условием

$$|\xi| = |\xi_a| = |\xi_z|. \quad (2)$$

Условие (2) выполняется, в частности, при процентном представлении соответствующих статусов, например, $\xi_a = 100\%$ $\xi_z = 100\%$.

Отсюда вытекает очевидное соотношение

$$\varphi_a + \varphi_z = 1,$$

и комбинация статусов может быть представлена следующим образом:

$$\xi = \varphi_a \xi_a + \varphi_z \xi_z = \varphi_a \xi_a + (1 - \varphi_a) \xi_z = (1 - \varphi_z) \xi_a + \varphi_z \xi_z.$$

Статус ξ_a характеризуется предельно высокой частотой колебаний ω_a , при которой дисперсный материал сохраняет неподвижность (устойчивость) по отношению к *платформе*, благодаря статической силе трения. Таким образом, он совершает колебания вместе с платформой с частотой ω_a относительно неподвижной базы платформы.

Статус ξ_z характеризуется предельно низкой частотой колебаний ω_z , при которой дисперсный материал сохраняет неподвижность по отношению к *базе платформы*, вследствие собственной инерции. Очевидно, что относительно платформы материал совершает колебания с той же амплитудой и той же частотой ω_z .

При этом $\omega_a < \omega_z$.

В рабочем режиме частота имеет некое промежуточное значение $\omega_a < \omega < \omega_z$. При этом условно можно считать, что φ_a -я часть дисперсного материала является абсолютно устойчивой по отношению к платформе, а φ_z -я часть – абсолютно неустойчивой.

Функции статуса зависят от частоты ω , которую можно считать *переменной статуса*.

В других задачах могут быть другие переменные статуса, например, давление, мощность, ток, напряжение и др.

Функции статуса

Далее переменная статуса обозначается x , $x \in [x_a, x_z] \subset \mathbb{R}$. Переменная статуса играет роль аргумента функции статуса.

В самых простых случаях функции статуса являются линейными.

$$\varphi_a(x) = 1 - p(x - x_a), \quad p \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\varphi_z(x) = p(x - x_a),$$

$$p(x_z - x_a) = 1.$$

Часто функции статуса не являются линейными, и их математическая формула, как правило, не определена.

В большинстве практических случаев функции статуса не претерпевают разрывов и являются монотонными на отрезке $[x_a, x_z]$. На этом отрезке функция статуса φ_a пробегает значения от единицы до нуля, а φ_z – от нуля до единицы. Из этого следует, что такие функции статуса можно рассматривать как аналитические на отрезке $[x_a, x_z]$ и поэтому их можно описывать с помощью функциональных рядов, в т.ч., степенного ряда

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(x_w) + \varphi'_a(x_w)(x - x_w) + \frac{\varphi''_a(x_w)}{2!}(x - x_w)^2 + \dots + \frac{\varphi_a^{(n)}(x_w)}{n!}(x - x_w)^n \quad (4)$$

при обязательном условии его сходимости.

Очевидно, что $x_w \in [x_a, x_z]$.

Вполне распространенный случай (3) фактически тоже является рядом Тейлора (вырожденным).

Значения

$$\varphi_a(x_w), \varphi'_a(x_w), \varphi''_a(x_w), \dots, \varphi_a^{(n)}(x_w) \quad (5)$$

являются *параметрами функции статуса*.

Они определяются следующим образом.

Экспериментально находятся $\varphi_a(x_w)$ и еще n величин $\varphi_a(x_1), \varphi_a(x_2), \dots, \varphi_a(x_n)$.

С помощью этих значений и ряда (4) составляется n уравнений с n неизвестными, объединенными в систему. Решением системы уравнений являются величины (5), которые однозначно определяют функцию статуса в форме (4).

По известной функции статуса и ее предельным значениям (ноль и единица) находятся конкретные значения границ отрезка $[x_a, x_z]$.

Так как ξ_a – абсолютная устойчивость, а ξ_z – абсолютная неустойчивость дисперсного материала, то $\varphi_a(x)$ уместно трактовать как *функцию устойчивости*, а $\varphi_z(x)$ – напротив, как *функцию неустойчивости*.

В соответствии с этим величины (5) можно рассматривать как параметры функций устойчивости и неустойчивости.

Подобным способом можно устанавливать функции для иных статусов.

Пример. Имея в виду, что $n = \omega/2\pi$, опытным путем установлены величины:

$$n_w = 8\text{с}^{-1} \text{ (оптимальная частота)}, \varphi_a(n_w) = 0,320; n_1 = 3\text{с}^{-1}, \varphi_a(n_1) = 0,822; n_2 = 5\text{с}^{-1}, \varphi_a(n_2) = 0,579; n_3 = 12\text{с}^{-1}, \varphi_a(n_3) = 0,122.$$

С помощью этих значений и ряда (4) составляется три уравнения с тремя неизвестными, объединенные в систему.

$$\begin{cases} 0,822 = 0,320 + \varphi'_a(8)(3-8) + \frac{\varphi''_a(8)}{2!}(3-8)^2 + \frac{\varphi'''_a(8)}{3!}(3-8)^3 \\ 0,579 = 0,320 + \varphi'_a(8)(5-8) + \frac{\varphi''_a(8)}{2!}(5-8)^2 + \frac{\varphi'''_a(8)}{3!}(5-8)^3 \\ 0,122 = 0,320 + \varphi'_a(8)(12-8) + \frac{\varphi''_a(8)}{2!}(12-8)^2 + \frac{\varphi'''_a(8)}{3!}(12-8)^3 \end{cases} .$$

Эта система имеет следующие решения:

$$\varphi'_a(8) = -6,825 \cdot 10^{-2},$$

$$\frac{\varphi''_a(8)}{2!} = 5,456 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{\varphi'''_a(8)}{3!} = -1,977 \cdot 10^{-4}.$$

В соответствии с этим и формулой (4) определяется функция устойчивости

$$\varphi_a(n) = 0,320 - 6,825 \cdot 10^{-2}(n-8) + 5,456 \cdot 10^{-3}(n-8)^2 - 1,977 \cdot 10^{-4}(n-8)^3.$$

Функция неустойчивости

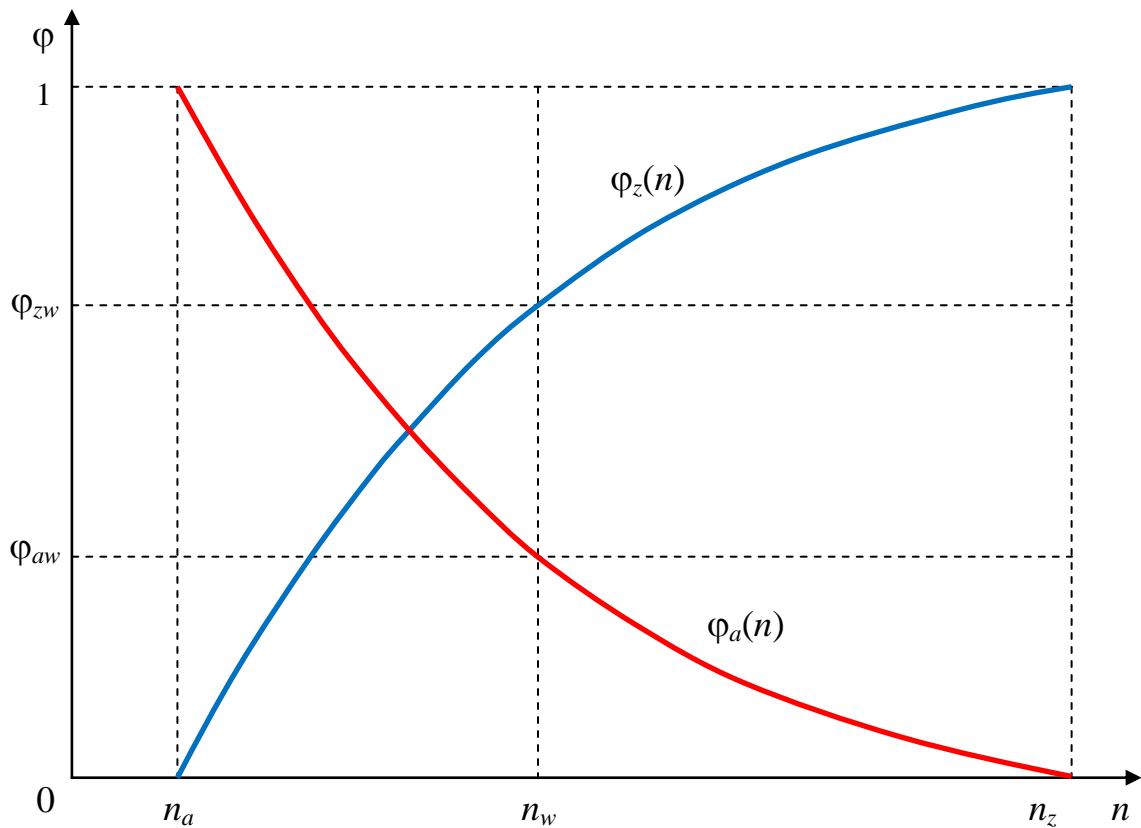
$$\varphi_z(n) = 0,680 + 6,825 \cdot 10^{-2}(n-8) - 5,456 \cdot 10^{-3}(n-8)^2 + 1,977 \cdot 10^{-4}(n-8)^3.$$

Очевидно, что аргументом обеих функций является частота колебаний.

По известной функции устойчивости и ее предельным значениям (нуль и единица) находятся конкретные значения границ отрезка $[n_a, n_z]$.

$$n_a = 1,8\text{с}^{-1}, \quad n_z = 17,2\text{с}^{-1}.$$

Функции статуса для полученных данных представлены на рисунке.



$\varphi_a(n)$ – функция устойчивости, $\varphi_z(n)$ – функция неустойчивости
Функции статуса

Статус дисперсного материала на оптимальной частоте колебаний $n_w = 8c^{-1}$ является композицией его предельных статусов

$$\xi = \varphi_a(n_w)\xi_a + \varphi_z(n_w)\xi_z = 0,32\xi_a + 0,68\xi_z. \quad (6)$$

Для выполнения инженерных расчетов композицию предельных статусов целесообразно обобщить на массу дисперсного материала m . С этой целью в формуле (6) достаточно заменить величины ξ на величины m (формально разделить (6) на ξ и умножить на m).

$$m = \varphi_a(n_w)m_a + \varphi_z(n_w)m_z = 0,32m + 0,68m.$$

Это выражение наглядно демонстрирует, что (условно) часть дисперсного материала ($0,32m$) осуществляет колебания вместе с платформой, увеличивая суммарную инерционную нагрузку, при этом другая часть дисперсного материала ($0,68m$) перемещается по платформе, увеличивая суммарную диссипативную нагрузку (тепловые потери).

Этот метод является универсальным и применим для самых разнообразных систем с иными статусами и параметрами.

Список источников

1. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
2. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
3. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>

4. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
5. Благодарёва О.В. Применение метода Рунге и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
6. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
7. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
8. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>
9. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161406>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
10. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>

11. Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)
12. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
13. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
14. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
15. Попов И.П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168986>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
16. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>

17. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
18. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
19. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
20. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>

References

1. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
2. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)

3. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>
4. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
5. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>
6. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>
7. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
8. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>
9. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161406>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
10. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
11. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)
12. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)

13. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
14. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
15. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168986>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
16. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
17. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
18. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
19. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
20. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>

Статья поступила в редакцию 08.06.2023

Одобрена после рецензирования 14.06.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 08.06.2023; approved after reviewing on 14.06.2023; accepted for publication on 28.08.2023