

Труды МАИ. 2023. № 133  
Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653>

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

**Ван Донг<sup>1</sup>Хоа<sup>1</sup>✉, Евгений Михайлович Зверьев<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

<sup>1</sup>[dong.hoavan@yandex.ru](mailto:dong.hoavan@yandex.ru)✉

**Аннотация.** Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния двухслойной упругой полосы, находящейся в температурном поле, под действием поперечной изгибающей нагрузки. На коротких сторонах полосы могут быть наложены те или иные условия на перемещения или напряжения.

Для построения решения используется метод, названный в [1] методом Сен-Венана–Пикара–Банаха (SVPB). Будучи основанным на обобщении идей полуобратного метода Сен-Венана [2] и метода последовательных приближений Пикара [3], он позволяет для системы уравнений теории упругости найти все неизвестные путем последовательных вычислений без каких-либо предварительных гипотез. Безразмерные дифференциальные уравнения в частных производных с малым параметром тонкостенности для тонкой полосы записываются как

интегральные относительно поперечной координаты подобно тому как это делается в методе Пикара. Затем уравнения и преобразованные соотношения упругости выстраиваются в последовательность, соответственно позволяющую последовательно вычислять неизвестные задачи, выражая их через получившиеся при интегрировании по поперечной координате четыре произвольные функции продольной координаты и интегральные коэффициенты от функции изменения жесткостей слоев в поперечном направлении. Имея такие формулы для всех искомым неизвестных задачи можно записать выражения для граничных условий на длинных сторонах для определения четырех произвольных функций интегрирования по Пикару [4]. Эти выражения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с малыми параметрами при производных по продольной координате. Их решениями являются медленно меняющиеся функции основного напряженно-деформированного состояния и быстро меняющиеся функции типа краевого эффекта. Константы интегрирования обоих решений определяются из граничных условий на коротких сторонах полосы. Для медленно меняющихся условия совпадают с классическими для балки. Не удовлетворенные классическим решением условия удовлетворяются с помощью постоянных интегрирования быстро меняющихся решений, добавляя к медленно меняющемуся решению краевого эффекта и особенности в углах полосы [5]. Подставив эти решения основных неизвестных в ранее полученные после первой итерации

формулы, получим формулы для всех искомым неизвестных задачи теории упругости слоистой полосы, справедливые для каждой точки полосы.

**Ключевые слова:** плоская задача, слоистый материал, термонапряженное состояние, асимптотический подход, итерации, метод Сен-Венана–Пикара–Банаха

**Для цитирования:** Хоа В.Д., Зверьев Е.М. Аналитическое решение для термонапряженной двухслойной упругой полосы // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653>

Original article

## **ANALYTICAL SOLUTION FOR THERMALLY STRESSED TWO-LAYER ELASTIC STRIP**

**Van Dong Hoa<sup>1</sup>✉, Evgeny M. Zveryaev<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia

<sup>1</sup>[dong.hoavan@yandex.ru](mailto:dong.hoavan@yandex.ru)✉

**Abstract.** The authors consider the problem of the stress-strain state determining of a two-layer elastic strip staying in a temperature field under the action of a transverse bending load. Certain conditions may be imposed on the displacement or stress at the short sides of the strip.

A method called in [1] the Saint-Venant–Picard–Banach (SVPB) method is used to construct a solution. Being based on a generalization of the ideas of the Saint-Venant semi-inverse method [2] and the Picard method of successive approximations of [3], it allows

finding all the unknowns for a system of equations of the elasticity theory by sequential calculations without any preliminary hypotheses. The dimensionless partial differential equations with a small thin-walled parameter for a thin strip are being written as integral ones with respect to the transverse coordinate, similar to what is done in the Picard method. Next, the equations and transformed elasticity relationships are being arranged in a sequence that, accordingly, allows sequentially calculate the unknown problems, expressing them through the four arbitrary functions of the longitudinal coordinate obtained by integration along the transverse coordinate and integral coefficients from the function of changing the stiffness of the layers in the transverse direction. Having these formulas for all the unknowns of the problem being searched for, the expressions for the boundary conditions on the long sides to determine four arbitrary integration functions according to Picard [4] may be written. These expressions represent ordinary differential equations with small parameters for derivatives with respect to the longitudinal coordinate. Their solutions are slowly changing functions of the main stress-strain state and rapidly changing functions such as the edge effect. The integration constants for both solutions are being determined from the boundary conditions on the short sides of the strip. For slowly changing ones, the conditions coincide with the classical ones for a beam. The conditions unsatisfied by the classical solution are being satisfied by the integration constants of rapidly changing solutions, adding to the slowly changing solution the edge effect and features in the corners of the strip [5]. Substituting these solutions of the main unknowns into the formulas previously obtained after the first iteration, we obtain formulas for all

the unknown unknowns of the problem of the theory of elasticity of a layered strip, valid for each point of the strip.

**Keywords:** planar problem, layered material, thermally stressed state, asymptotic approach, iterations, Saint-Venant–Picard–Banach method

**For citation:** Hoa V.D., Zveryaev E.M. Analytical solution for thermally stressed two-layer elastic strip. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177653>

## **Введение**

Широкое применение композиционных материалов в ответственных силовых и специальных конструкциях требует тщательного подхода к учету особенностей их структуры, зачастую имеющей слоистое строение [6–8]. Уточнение модели, повышение ее детализации влечет увеличение масштаба системы учитываемых факторов и их взаимосвязей, повышение уровня сложности задачи. Обычно применяемыми в практике путями решения в таком случае являются: локализация области рассматриваемого эффекта, осреднение искомым величин по толщине, введение гипотез, определяющих форму неизвестных функций, осреднения и численное получение результата. Анализ подходов к решению проблем механики в отношении структур из слоистых материалов приведен в работах [9-17].

Решение задачи теории упругости для полосы из композиционного материала при действии механической нагрузки, учет температуры в уравнениях теории

упругости явились объектом исследований в работах [1, 9, 10, 18, 19, 21, 23]. Метод рассматривает всю область решения, учитывая специфику как «спокойных», так и «возмущенных» зон, характерных для краев, стыков и иных неоднородностей [23]. При этом использование аппарата асимптотик, основанного на учете малого параметра тонкостенности позволяет взаимно взвешивать составляющие уравнений, оставляя из них главные.

**1. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса при действии поля температуры.** Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$ . Лицевые ее стороны  $z^* = \pm h$  несут произвольную механическую нагрузку, короткие стороны могут быть закреплены или нагружены. В материале полосы задано стационарное поле температуры. Известные уравнения плоской задачи теории упругости [1]:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (1)$$

– соотношения упругости с учетом влияния температуры [9]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}(\sigma_x^* - \nu \sigma_z^*) + \alpha T, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E^*}(\sigma_z^* - \nu \sigma_x^*) + \alpha T, \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E^*} \tau^* \quad (2)$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}, \quad (3)$$

описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, будучи приведенными к безразмерным координатам  $x = x^* / l$ ,  $z = z^* / h$ , перемещениям  $u = u^* / h$ ,  $w = w^* / h$  (вдоль осей  $x^*$ ,  $z^*$ , соответственно), нормальным  $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h^*$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h^*$  и касательным  $\tau = \tau^* / E_h^*$  напряжениям (размерные перемещения и напряжения отмечены звездочкой), принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0 \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, & \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, & \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon = h/l$  - малый параметр.

Здесь  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  - компоненты деформаций вдоль осей  $x$  и  $z$ ,  $\gamma$  - деформация сдвига. Температурная деформация  $\alpha T$  задается величиной температуры  $T(x, z)$  (отсчитываемой температуры от величины, при которой температурная деформация не возникает) и коэффициентом линейного температурного расширения  $\alpha(x, z)$ .

Примем  $E^* = E(z)E_h^*$ , где  $E_h^*$  - некоторое среднее значение модуля упругости,  $E(z)$  - безразмерная ступенчатая функция, заданная по слоям. Коэффициент Пуассона в общем случае также можно считать заданным ступенчатой функцией

$$\nu = \nu(z).$$

Перенеся в левые части уравнений (4) производные по переменной  $z$  и, проинтегрировав по ней, получим следующую запись

$$u = -\varepsilon \int_0^z w' dz + \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \tau dz + u_0(x),$$

$$\sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x),$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z - E\alpha T \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z + (1+\nu)\alpha T,$$

$$w = \int_0^z \varepsilon_z dz + w_0(x), \quad \tau = -\varepsilon \int_0^z \sigma_x' dz + \tau_0(x),$$

где произволы интегрирования  $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$ , зависят только от переменной  $x$  и штрих означает дифференцирование по координате  $x$ .

Выражения записаны таким образом, что дифференцирование в них выполняется только по  $x$ , а интегрирование – по  $z$ . Произвольные функции  $w_0(x), \tau_0(x)$  выбираются в качестве величин начального приближения в последовательности уравнений (5). В результате последовательных подстановок в последовательность уравнений все искомые величины выражаются через функции  $u_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_0$ , которые назовем основными неизвестными задачи.

Подставим величины начального приближения  $w_{(0)} = w_0, \tau_{(0)} = \tau_0$  в первые два

уравнения системы (5), вычислим через них  $u_{(0)}$  и  $\sigma_{z(0)}$  в нулевом приближении.

Затем деформацию  $\varepsilon_{x(0)}$  и по соотношениям упругости —  $\sigma_{x(0)}$  и  $\varepsilon_{z(0)}$ . По двум

последним величинам находим  $w_{(1)}$  и  $\tau_{(1)}$  уже в первом приближении. Таким образом

в результате первой итерации получаем следующие формулы, выражающие

искомые неизвестные задачи теории упругости через основные неизвестные

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0',$$

$$\sigma_{x(0)} = -E\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[ E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E\varepsilon u_0' - E\alpha T + \nu \sigma_{z_0} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[ \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + (1+\nu)\alpha T + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z_0}$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] +$$

$$+ \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + \int_0^z (1+\nu)\alpha T dz + w_0$$

$$\begin{aligned}
\tau_{(1)} = & \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] - \\
& - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz + \int_0^z \varepsilon E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^z \nu dz + \tau_0 \\
\sigma_{z(1)} = & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}, \dots
\end{aligned}$$

Входящие в эти формулы интегралы от заданных функций легко вычисляются.

Из формул видно, что задав в качестве единиц измерения искомых функций  $w_0(x)$  и  $\tau_0(x)$  как величины  $O(\varepsilon^0)$ , величины, вычисленные в нулевом и первом приближении, приобретают дополнительные члены с множителем  $\varepsilon^2$ , показывающие в практических задачах порядок поправки относительно главной величины.

Получив аналитические выражения для всех искомых неизвестных задачи, можно приступить к выполнению граничных условий на длинных и коротких сторонах заданной прямоугольной области.

**2. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах.** На лицевых сторонах полосы  $z^* = \pm h$  граничные условия, соответствующие условиям нагружения поверхностными силами, в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\sigma_z = Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z = 1 \quad (7)$$

$$\sigma_z = Z_-(x), \tau = X_-(x) \text{ при } z = -1$$

Безразмерные функции нагрузки получены делением соответствующих размерных величин на жесткость  $E_h$ . Считается, что нагрузка задана медленно меняющимися функциями координаты  $x$ .

Условиям (7) будем удовлетворять величинами первого приближения из соотношений (6), предполагая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые неизвестные исходной задачи. Полученная таким образом система уравнений

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \int_0^1 E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E dz + \\
& \quad + \varepsilon \int_0^1 E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^1 \nu dz + \tau_0 = X_+ \\
& \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{-1} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[ \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E dz + \\
& \quad + \varepsilon \int_0^{-1} E (\alpha T)' dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^{-1} \nu dz + \tau_0 = X_- \\
& -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^1 \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^1 \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z0} = Z_+
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[ \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z E (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-
\end{aligned}$$

может быть разрешена относительно основных неизвестных  $u_0, \sigma_{z_0}, w_0, \tau_0$  после вычисления в общем случае шестнадцати интегральных коэффициентов

$$\left\{ \begin{array}{cc} \int_0^1 E z dz & \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz & \int_0^1 E dz & \int_0^1 \nu dz \\ \int_0^{-1} E z dz & \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz & \int_0^{-1} E dz & \int_0^{-1} \nu dz \\ \int_0^1 \int_0^z E z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E dz dz & \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz \\ \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz \end{array} \right\} \quad (9)$$

от заданных безразмерных физических функций  $E(z)$  и  $\nu(z)$ .

**3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах для двухслойной полосы.** При протяженности полосы  $0 \leq x \leq 1$ , примем, что однородный материал верхнего слоя (при  $z_1 \leq z \leq 1$ ), характеризуется модулем упругости, для которого  $E(z) = E_1$ ; в нижнем слое (у которого  $-1 \leq z \leq z_1$ )  $E(z) = E_2$  (константы  $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$ ).

Положим для простоты, что коэффициент Пуассона слоев  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = const$ .

Для краткости приводимых выкладок также будем считать толщину слоев одинаковой, т.е.  $z_1 = 0$ . В конце раздела приведен результат для слоев произвольной толщины.

Вычислим интегральные коэффициенты (9) и подставим их в уравнения (8)

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' E_1 - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_+ - \varepsilon E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz \\
\varepsilon^3 w_0''' E_2 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_2 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_- - \varepsilon E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \\
-\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= \\
&= Z_+ + \varepsilon^2 E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \\
\varepsilon^4 w_0'''' E_2 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_2 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= \\
&= Z_- + \varepsilon^2 E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz
\end{aligned} \tag{10}$$

Сложив и вычтя попарно первые два и последние два уравнения и поменяв порядок записи, получим:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) + 2\tau_0 &= \\
&= X_+ + X_- - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \\
-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \frac{1}{3} (2+\nu) \varepsilon^3 \tau_0''' + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0' &= \\
&= Z_+ - Z_- + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 + E_2) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = \\
& = X_+ - X_- - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \\
& - \varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 - E_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0'''' (E_1 + E_2) + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = \\
& = Z_+ + Z_- + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right]
\end{aligned}$$

Примем представление неизвестного  $\tau_0$  в виде  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ , где  $\tau_0^s$  – медленно меняющаяся функция и  $\tau_0^q$  – быстро меняющаяся функция. (Медленно меняющейся называется функция, применение к которой оператора  $d/dx$  не меняет ее асимптотического порядка по малому параметру  $\varepsilon$ , тогда как быстро меняющейся называется функция, применение к которой оператора  $\varepsilon \cdot d/dx$  не изменяет ее асимптотического порядка). Перепишем с учетом этого первые два уравнения для быстро меняющихся [23]:

$$\begin{aligned}
-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q &= 0 \\
(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

и медленно меняющихся компонент:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2) + 2\tau_0^s = \\
& = X_+ + X_- - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = \\
& = Z_+ - Z_- + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right], \\
& \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = \\
& = X_+ - X_- - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right], \\
& -\varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + 2\sigma_{z_0}^s = \\
& = Z_+ + Z_- + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right].
\end{aligned}$$

Первые два уравнения (13) дают:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{3} (E_1 + E_2) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-' ) + \\
& + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_1 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Из четвертого уравнения (13) следует, что  $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$ . Поэтому в третьем уравнении величина  $2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$   $\sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^5 w_0^s$  и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = X_+ - X_- - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \quad (15)$$

с отброшенным членом  $2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$  и уравнение (14) сводятся к двум разрешающим:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[ \frac{1}{3}(E_1 + E_2) - \frac{1}{4} \frac{(E_1 - E_2)^2}{E_1 + E_2} \right] = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-' ) \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon (E_1 - E_2) \frac{(X_+ - X_-)'}{E_1 + E_2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right] + \\
& + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - E_1 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz \right], \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - X_+ + X_- + \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz - E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \quad (17)$$

После вычисления  $w_0^s$  и  $u_0^s$ , неизвестные  $\sigma_{z_0}^s$  и  $\tau_0^s$  находятся из первого и четвертого уравнений системы (13)

$$\begin{aligned}
2\sigma_{z_0}^s = & Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + \\
& + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right] \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tau_0^s = & X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (E_1 - E_2) - \\
& - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right]
\end{aligned}$$

прямыми действиями без интегрирования.

Примем  $Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0$  и характер температурного поля линейным по толщине полосы:

$$\alpha T = \begin{cases} \alpha_2 t_2 (z - z_1), & \text{при } z \geq z_1 \\ \alpha_1 t_1 (z - z_1), & \text{при } z < z_1 \end{cases} \quad (19)$$

где  $t_1 = const, t_2 = const$ . Тогда из уравнений (16)–(18) вытекают следующие асимптотические оценки искомых величин

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-2} \alpha T, u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-1} \alpha T, \sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^2 \alpha T, \tau_0^s \sim \varepsilon \alpha T. \quad (20)$$

Решение уравнений (16)–(18) дает для основных неизвестных зависимости в виде степенных (медленно изменяющихся) функций, применительно к касательным напряжениям — постоянную и экспоненциальные (быстро изменяющихся) составляющие. Для случая слоев различной толщины эти выражения имеют вид:

$$w_0^s = \varepsilon^{-2} \frac{C_{wt1}}{C_{wt0}} \frac{x^2}{2} + \varepsilon^{-2} \frac{C_{wt2}}{C_{wt0}} \frac{x^3}{6} + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0},$$

$$u_0^s = \frac{1}{2} \varepsilon w_0^{s'} \frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)} + C_u \frac{x^2}{2} + C_{u1} x + C_{u0},$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_{\tau_0} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ C_{\tau_1} \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu},$$

$$\begin{aligned} 2\tau_0^s &= -\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] - \\ &\quad - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^{z_1} (\alpha T)' dz + E_2 \int_{z_1}^1 (\alpha T)' dz + E_1 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] = \\ &= -\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[ (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] \end{aligned}$$

$$2\sigma_{z0}^s = \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left[ \begin{array}{l} (E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + \\ + (E_1 + E_2) \end{array} \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^{z_1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_{z_1}^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_1 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right] = 0$$

Постоянные интегрирования (здесь  $C_{w0}, C_{w3}, C_{w2}, C_{w1}, C_{w0}, C_{u1}, C_{u0}$ ) определяются из граничных условий на узких сторонах, в зависимости от геометрии слоев и характеристик их материала. Также остаются справедливыми асимптотические оценки основных неизвестных  $w_0^s, u_0^s, \tau_0^s, \sigma_{z0}^s$  по формулам (20).

Легко проверить, что полученные решения могут рассматриваться как первые члены асимптотического ряда по  $\varepsilon$ . Погрешность оценивается степенью малого параметра отбрасываемого члена. Полное решение получается в виде асимптотических рядов по параметру, коэффициентами которого являются убывающие степенные последовательности по степеням поперечной координаты  $z$ .

**4. Выполнение условий на торцах.** Решение рассматриваемой далее задачи об определении констант интегрирования в аналитическом виде получено для случая слоев равной толщины.

Для краев полосы  $x=0$  и  $x=1$  примем условие жесткого защемления  $u = w = 0$  во всех точках  $z \in [-1, 1]$ . Запишем это с помощью формул (6):

$$u_{(0)} \Big|_{x=0,1} = -\varepsilon w_0' z + 2(1 + \nu) \tau_0 \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 = 0, \quad (21)$$

$$w_{(1)} \Big|_{x=0,1} = \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[ \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] \\ + \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + \int_0^z (1+\nu) \alpha T dz + w_0 = 0.$$

Этими выражениями задаются перемещения как при  $z \geq 0$ , так и при  $z \leq 0$ .

Теперь потребуем обращения каждого коэффициента при различных степенях  $z$  в ноль в выражениях (21). При  $z \geq 0$  эти условия запишутся следующим образом:

$$u_0 = 0, \quad -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \tau_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad (22)$$

$$\sigma_{z_0} \frac{1-\nu^2}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(\nu+1)^2}{E_1} + (1+\nu) \alpha t_1 = 0. \quad (23)$$

Для нижнего слоя (с модулем Юнга материала  $E_2$ ) форма соотношений аналогична.

Из уравнений (16)–(18) можно определить решения для основных неизвестных:

$$w_0^s = \frac{3\varepsilon^{-2}}{2} \frac{\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \frac{E_1 \alpha_1 t_1 - E_2 \alpha_2 t_2}{4} - \frac{E_1 \alpha_1 t_1 + E_2 \alpha_2 t_2}{3}}{(E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]} x^2 + \\ + C_{w3} x^3 + C_{w2} x^2 + C_{w1} x + C_{w0}, \quad (24)$$

$$u_0^s = \varepsilon w_0^{s'} \frac{1}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{E_1 + E_2} (E_1 \alpha_1 t_1 - E_2 \alpha_2 t_2) \frac{x}{2} + C_{u1} x + C_{u0}, \quad (25)$$

$$2\tau_0^s = \frac{9\varepsilon^{-1}C_{w3}}{(E_1 + E_2) \left[ 1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]} \left[ \frac{(E_1 - E_2)^2}{E_1 + E_2} - (E_1 + E_2) \right] - \varepsilon \left[ E_1 \int_0^1 (\alpha T)' dz + E_2 \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right], \quad (26)$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} B_0 \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ B_1 \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \frac{6}{2+\nu}, \quad (27)$$

$$2\sigma_{z0}^s = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 \left[ E_1 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + E_2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right]. \quad (28)$$

Из (22)–(28) следует:

$$w_0^s(x) = C_{w1}(x - x^2), \quad C_{w1} = \varepsilon^{-1} \frac{2(1+\nu)\alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)}$$

$$\tau_0^s = 0, \quad \tau_0^q = \begin{cases} B_0 \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0 \\ B_1 \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1 \end{cases}, \quad (29)$$

$$B_0 = -B_1 = \frac{E_1 \alpha_1 t_1}{4\nu\varepsilon - k(\nu+1)}$$

$$u_0^s(x) \cong 0, \quad \sigma_{z0}^s(x) \cong 0$$

Тогда из (6) и (29), для исходных неизвестных задачи имеем:

$$\begin{aligned}
w(x, z) &= \left( \varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon \tau_0' \frac{(\nu+1)^2}{E_1} + (1+\nu) \alpha_1 t_1 \right) \frac{z^2}{2} + w_0, \\
u(x, z) &= -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \frac{2(1+\nu)}{E_1} z, \\
\tau(x, z) &= -\varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2+\nu) \frac{z^2}{2} + \tau_0^q = \tau_0^q (1-3z^2), \\
\sigma_z(x, z) &= \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} (2+\nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0^{q'} z = \varepsilon \tau_0^{q'} z (z^2 - 1), \\
\sigma_x(x, z) &= \left[ 2E_1 \varepsilon^2 C_{w1} + \varepsilon (2+\nu) \tau_0^{q'} - E_1 \alpha_1 t_1 \right] z, \\
\varepsilon_x(x, z) &= \left[ 2\varepsilon^2 C_{w1} + \varepsilon \tau_0^{q'} \frac{2(1+\nu)}{E_1} \right] z, \\
\varepsilon_z(x, z) &= \left[ -2\nu \varepsilon^2 C_{w1} - \varepsilon \tau_0' \frac{(\nu+1)^2}{E_1} + (1+\nu) \alpha_1 t_1 \right] z.
\end{aligned} \tag{30}$$

Выражения даны в записи для верхнего слоя; для нижнего слоя они аналогичны.

Полученные зависимости могут быть проиллюстрированы графиками для сочетания материалов слоев полосы:

- верхний слой – сталь: высота  $h_1 = 0.05$  м, длина  $l_1 = 1$  м, модуль упругости  $E_1^* = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная величина  $E_1 = 1.3125$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ ;
- нижний слой – медный сплав: высота  $h_2 = 0.05$  м, длина  $l_2 = 1$  м, модуль упругости

$E_2^* = 1.1 \cdot 10^{11}$  Па, безразмерная величина  $E_2 = 0.6875$ , коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_2 = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_2 = 0.34$ . В связи с принятыми допущениями и близостью значений коэффициентов Пуассона в расчетах принято  $\nu = 0.3$

В расчетах температура на лицевых сторонах полосы принята: для верхнего слоя  $32^\circ \text{C}$ , для нижнего  $12^\circ \text{C}$ . Поле распределение температур по поперечной координате, полученное по классической теории теплопроводности численно показано на Рис. 1. В качестве температуры, при которой тепловые деформации отсутствуют, принято значение в середине ( $14.7^\circ \text{C}$ ), при этом градиенты температуры по слоям составили  $t_1^o = 17.3^\circ \text{C}$ ,  $t_2^o = 2.7^\circ \text{C}$ .

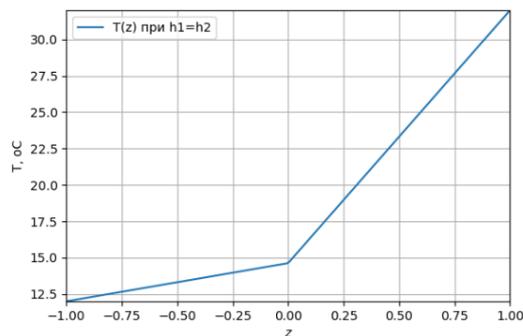


Рис. 1. Распределение температуры ( $^\circ \text{C}$ ) по безразмерной ширине полосы

Форма температурного коробления полосы показана на Рис. 2 (здесь и далее расчеты проведены по формулам (30) с учетом соотношений (29)). В терминах классической теории можно сказать, что в целом для найденного решения действие изгибающего момента, образующегося в заделке (от продольного расширения и

сжатия нагретых и, соответственно, охлажденных продольных волокон) оказывается сильнее, чем выпучивание от градиента температуры по толщине полосы. Видно, что свойственное для балочной теории и теорий пластин и оболочек представление о равенстве угла наклона касательной к срединной линии в заделке для случая температурного деформирования является осредняющим приближением, и, поскольку в SVPB решение находится на пространственных уравнениях теории упругости, здесь результат наблюдается более детально.

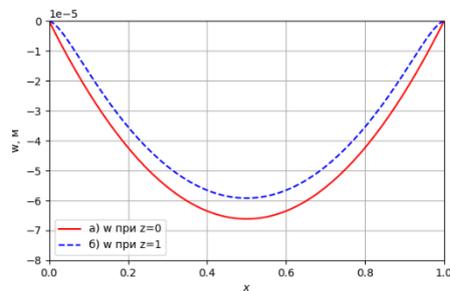


Рис. 2. Вертикальные перемещения [м] в зависимости от продольной координаты:

- а) на срединной линии                      б) вдоль верхнего края полосы

Краевой эффект в рассматриваемых зависимостях проявляется через присутствие функции  $\tau_0$ , содержащей быстро изменяющиеся компоненты решения. Эта функция, отвечающая величине касательных напряжений при  $z = 0$ , показана на Рис. 3.

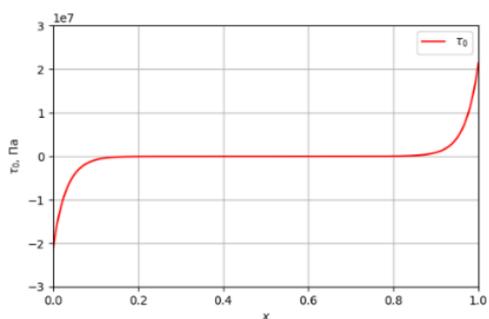


Рис. 3. Касательные напряжения [Па] на срединной линии

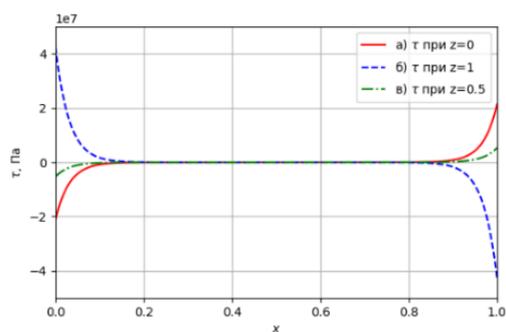


Рис. 4. Касательные напряжения [Па] в зависимости от продольной координаты:

- а) на срединной линии б) вдоль верхнего и нижнего краев (функция симметрична)  
в) вдоль линии, проходящей по центру верхнего слоя

Условие равенства нулю касательных напряжений на лицевых сторонах выполнено асимптотически – для основного решения, – на некотором удалении от «особых» угловых точек (Рис. 4). Распределение напряжений по толщине показано на Рис. 5. Поведение решения вблизи особой угловой точки требует отдельного исследования.

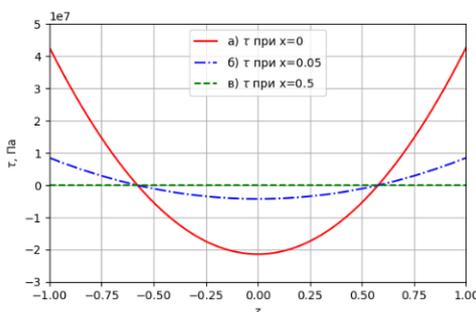


Рис. 5. Касательные напряжения [Па] в зависимости от координаты высоты:

а) в левой заделка    б) на удалении  $0,05l$  от нее    в) посередине полосы

Графики нормальных продольных напряжений (Рис. 6, 7) и продольных перемещений (Рис. 8) соответствуют классическому представлению о поведении балки при изгибе с добавлением к ним краевого эффекта и учетом различия упругих свойств слоев.

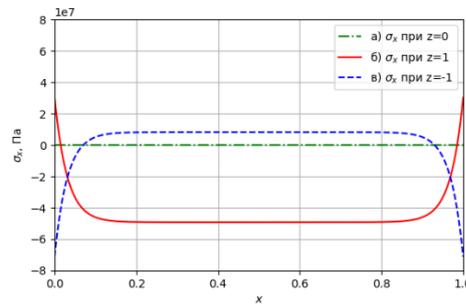


Рис. 6. Нормальные продольные напряжения [Па] в зависимости от продольной координаты:

а) на середине    б) вдоль верхнего    в) нижнего краев полосы

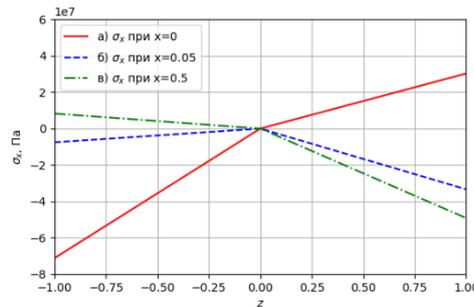


Рис. 7. Нормальные продольные напряжения [Па] в зависимости от координаты высоты:

а) в левой заделка    б) на удалении  $0,05l$  от нее    в) посередине полосы

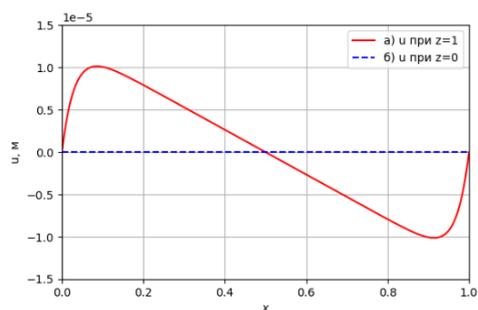


Рис. 8. Продольные перемещения [м] в зависимости от продольной координаты:

а) вдоль верхнего            б) на середине

Нормальные вертикальные перемещения, как это свойственно классической теории пластин и оболочек, интегрально, в основном равны нулю. Условие отсутствия поперечных нормальных напряжений на продольных сторонах полученным решением выполнено точно; также поперечные нормальные напряжения равны нулю при  $z = 0$  (рис. 9).

Если материал слоев рассматривать как композитный и спроектированный в первую очередь для восприятия продольных усилий, то наиболее опасными можно считать краевые расслаивающие нормальные напряжения внутри охлажденного слоя и сдвиговые напряжения между слоями у торцов полосы.

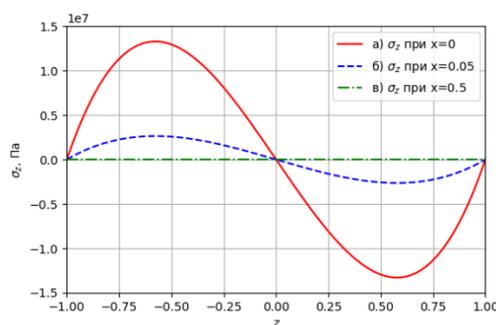


Рис. 9. Нормальные напряжения в вертикальном направлении [Па] в зависимости от координаты высоты:

а) в левой заделка    б) на удалении 0,05l от нее    в) посередине полосы

### Заключение

Решена задача теории упругости об определении напряженно-деформированного состояния находящейся в температурном поле двухслойной полосы. Для построения решения используется метод, названный в [1] методом Сен-Венана–Пикара–Банаха (SVPB). Будучи основанным на обобщении идей полуобратного метода Сен-Венана [2] и метода последовательных приближений Пикара [3], он позволяет для системы уравнений теории упругости найти все неизвестные путем последовательных вычислений без каких-либо предварительных гипотез. Решения сходятся в силу теоремы Банаха о неподвижной точке (называемой в литературе также принципом сжатых отображений) независимо от выбора величин начального приближения. Произведя замену дифференциальных уравнений на интегральные по Пикару относительно поперечной координаты и интегрируя двух величин начального приближения, получены формулы для

четырёх основных неизвестных задачи, через которые выражаются все искомые неизвестные исходной задачи теории упругости. С помощью этих формул записываются граничные условия на длинных сторонах полосы, представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения для произвольных функций интегрирования по поперечной координате. Уравнения содержат медленно меняющиеся решения по продольной координате  $x$  и быстро меняющиеся решения типа краевого эффекта, зависящие от координаты  $x/\varepsilon$ . Произвольные постоянные этих решений определяются из граничных условий на коротких сторонах. Подставив полученные решения в формулы для неизвестных задачи теории упругости, получим полное решение исходной задачи теории упругости для двухслойной полосы, удовлетворяющее всем граничным условиям.

### Список источников

1. Зверьев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126)
2. Ляв А. Математическая теория упругости. - М. – Л.: ОНТИ, 1935. - 674 с.
3. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Мир, 1984. - 584 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

5. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society, 1955, vol. 61, no. 6, pp. 485–504. DOI: [10.1090/S0002-9904-1955-09976-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2)
6. Milton Gr. W. The theory of composites. Cambridge University Press, 2004, 719 p.
7. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
8. Baker A., Dutton S., Kelly D. Composite materials for Aircraft structures, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2004, 603 p.
9. Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 95. DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000)
10. Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=55762>
11. Chakrabarti A., Sheikh A.H., Griffith M., Oehlers D.J. Analysis of composite beams with partial shear interactions using a higher order beam theory // Engineering Structures, 2012, no. 36, pp. 283–291. DOI: [10.12989/sem.2015.53.4.625](https://doi.org/10.12989/sem.2015.53.4.625)
12. Фирсанов В.В., Фам В.Т, Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)

13. Грищенко С.В., Попов Ю.И. Разработка макромодели слоистого композита для анализа напряженно-деформированного состояния нерегулярных зон типовых конструкций планера самолета // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35854>

14. Семенцова А.Н. Анализ температурных напряжений и деформаций в кессонных конструкциях из композиционных материалов // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35951>

15. Чигринец Е.Г., Родригес С.Б., Заболотный Д.И., Чотчаева С.К. Численное моделирование температурных полей в полимерном композите // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-17](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-17)

16. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нгуен Д.К., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=47084>

17. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=49674>

18. Зверьев Е.М. Построение математической модели полосы и балки из композиционного материала на основе принципа сжатых отображений // IV

Всероссийский симпозиум «Механика композиционных материалов и конструкций» (Москва, 4-6 декабря 2012): сборник трудов. Т.2. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. С. 226-234.

19. Зверьяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 2. С. 293–304.

20. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. - М. – Л.: ОНТИ. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. - 110 с.

21. Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В. Решение задачи нагружения полосы методом Сен-Венана — Пикара – Банаха // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), Алушта, 4–13 сентября 2021. - М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 214-215.

22. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. - 512 с.

23. Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 83. 19 с. DOI: [10.20948/prepr-2018-83](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-83)

## References

1. Zveryaev E.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2019, vol. 83, no. 5–6, pp. 823–833. DOI: [10.1134/S0032823519050126](https://doi.org/10.1134/S0032823519050126)

2. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* (A treatise on the mathematical theory of elasticity), Moscow-Leningrad, ONTI, 1935, 674 p.
3. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* (Handbook of ordinary differential equations), Moscow, Mir, 1984, 584 p.
4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow, Nauka, 1976, 543 p.
5. Friedrichs K.O. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1955, vol. 61, no. 6, pp. 485–504. DOI: [10.1090/S0002-9904-1955-09976-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2)
6. Milton Gr. W. *The theory of composites*, Cambridge University Press, 2004, 719 p.
7. Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. et al. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik*. (Composite materials: Handbook), Moscow, Mashinostroenie, 1990, 512 p.
8. Baker A., Dutton S., Kelly D. *Composite materials for Aircraft structures*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2004, 603 p.
9. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. *Preprinty IPM im. M.V.Keldysha*, 2014, no. 95. DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000)
10. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55762>
11. Chakrabarti A., Sheikh A.H., Griffith M., Oehlers D.J. Analysis of composite beams with partial shear interactions using a higher order beam theory, *Engineering Structures*, 2012, no. 36, pp. 283–291. DOI: [10.12989/sem.2015.53.4.625](https://doi.org/10.12989/sem.2015.53.4.625)

12. Firsanov V.V., Fam V.T, Chan N.D. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
13. Grishchenko S.V., Popov Yu.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35854>
14. Sementsova A.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35951>
15. Chigrinets E.G., Rodrigues S.B., Zabolotnii D.I., Chotchaeva S.K. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-17](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-17)
16. Lur'e S.A., Solyaev Yu.O., Nguen D.K, Medvedskii A.L., Rabinskii L.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 71. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47084>
17. Lur'e S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49674>
18. Zveryaev E.M. IV *Vserossiiskii simpozium «Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии»*: sbornik trudov. Vol. 2. Moscow, IPRIM RAN, 2012, pp. 226-234.
19. Zveryaev E.M. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya*, 2021, vol. 22, no. 2, pp. 293–304.
20. Lebedev N.N. *Temperaturnye napryazheniya v teorii uprugosti* (Temperature stresses in the theory of elasticity), Moscow-Leningrad, ONTI, Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1937, 110 p.

21. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. *Materialy XXII Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam (VMSPPS'2021)*, Moscow, Izd-vo MAI, 2021, pp. 214-215.
22. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* (Strength of materials), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi lituratury, 1986, 512 p.
23. Zveryaev E.M. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2018, no. 83, 19 p. DOI: [10.20948/prepr-2018-83](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-83)

Статья поступила в редакцию 24.10.2023

Одобрена после рецензирования 26.10.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 24.10.2023; approved after reviewing on 26.10.2023; accepted for publication on 25.12.2023