

Научная статья

УДК 579.3

DOI: [10.34759/trd-2023-129-07](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-07)

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Чжо Йе Ко¹, Лев Наумович Рабинский²✉

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

¹kyawyeko23@gmail.com

²f9_dec@mai.ru✉

Аннотация. В работе рассматривается вариант задачи о плоской свободно опертой пластине, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной со смещением по отношению к центру пластины и действующей по нормали к ее поверхности. Для такой задачи методика топологической оптимизации, сформулированная ранее авторами для моделей пластин переменной толщины, предлагает простое решение по выбору оптимальной ориентации ребер жесткости, обеспечивающей минимальные прогибы пластины под нагрузкой. Возникающие ребра жесткости в решении задачи топологической оптимизации располагаются симметрично относительно центральной плоскости пластины, а угол между ними зависит от величины смещения точки приложения нагрузки. Для проверки эффективности используемой методики

оптимизации предложено рассмотреть аналогичную задачу для плоско-пространственной рамы, в которой структура элементов повторяет расположение ребер жесткости, возникающих в решении задачи топологической оптимизации для пластины. Решение для задачи о деформациях рамы может быть легко построено в аналитической замкнутой форме. На основе этого решения удастся определить оптимальный угол раскрытия элементов рамы для заданного расположения точки приложения нагрузки. Показано, что имеет место качественная согласованность между оптимальной геометрией рамы, найденной из аналитического решения, и оптимальной геометрией соответствующей подкрепленной пластины, найденной из решения задачи топологической оптимизации. В частности, установлена одинаковая характерная зависимость оптимального угла раскрытия ребер жесткости от величины смещения точки приложения нагрузки относительно центра пластины.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, подкрепленные панели, плоско-пространственная рама, аналитическое решение

Для цитирования: Чжо Йе Ко, Рабинский Л.Н. Оценка эффективности метода топологической оптимизации подкрепленных панелей на основе аналитических решений тестовых задач // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-07](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-07)

Original article

EVALUATING THE EFFECTIVENESS OF THE METHOD OF TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF REINFORCED PANELS BASED ON ANALYTICAL SOLUTIONS TO BENCHMARK PROBLEMS

Kyaw Ye Ko¹, Lev N. Rabinskiy²✉

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

¹kyawyeko23@gmail.com

²f9_dec@mai.ru✉

Abstract. This article regards a variant of the problem of a flat freely supported plate loaded with a concentrated force applied at a displacement relative to the center of the plate and acting along the normal to its surface. For such a problem, the topological optimization technique formulated earlier by the authors for the models of plates of variable thickness offers a simple solution for selecting the optimal orientation of stiffening ribs that ensures minimum deflections of the plate under load. In the topological optimization problem, the resulting stiffening ribs are arranged symmetrically relative to the plate central plane, and the angle between them depends on the magnitude of the load application point displacement. To check the efficiency of the applied optimization technique the authors suggested considering a similar problem for a plane-space frame, in which the element structure repeats the arrangement of the stiffness ribs that appear in the solution of the topological optimization problem for the plate. The solution for the frame deformation problem can be easily constructed in analytical closed form. It is possible to determine the optimum angle of opening of the frame elements for a given location of the load application

point based on this solution. The article demonstrates that there is a qualitative consistency between the optimal geometry of the frame found from the analytical solution and the optimal geometry of the corresponding reinforced plate found from the solution of the topological optimization problem. Particularly, the same characteristic dependence of the optimal angle of stiffening ribs opening on the magnitude of load application point displacement relative to the center of the plate is established.

Keywords: topological optimization, reinforced panels, plane-space frame, analytical solution

For citation: Kyaw Ye Ko, Rabinskiy L.N. Evaluating the effectiveness of the method of topological optimization of reinforced panels based on analytical solutions to benchmark problems, *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-07](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-07)

1. Введение

Метод топологической оптимизации (ТО) является одним из современных методов разработки конструкций минимальной массы и максимальной жесткости, удовлетворяющих, при необходимости, дополнительным требованиям по прочности, собственным частотам, устойчивости и т.д. [1-6]. Для достаточно сложных задачи со сложной геометрией области оптимизации, сложной комбинацией нагрузок и сложного напряженного состояния материала, получаемые решения в методе ТО далеко не всегда являются единственными [1,2]. Поэтому для валидации результатов ТО, реализуемого на основе численного моделирования, целесообразно иметь набор тестовых задач, которые допускают элементарное интуитивно понятное решение,

либо для которых аналитические решения могут быть построены в замкнутой форме [Ошибка! Источник ссылки не найден.]. В данной работе предлагается такой вариант тестовой задачи для методики ТО, реализуемой в рамках моделей пластин переменной толщины. Рассматриваемая методика была предложена ранее в работе [6] для оптимизации подкрепленных панелей, и ее численная реализация была выполнена в системе Comsol Multiphysics. Ранее аналогичные методики, применяемые для проектирования оребренных панелей, рассматривались в работах [9-20].

Постановка рассматриваемой далее задачи был предложена в процессе предварительного тестирования метода ТО для плоских панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Было установлено, что имеет типичная геометрией ребер жесткости, которые возникают в решении задачи ТО для плоской пластины, нагруженной единственной сосредоточенной силой, приложенной со смещением от центра. Это геометрия представляет собой три ребра жесткости, пересекающиеся под точкой приложения силы и соединяющие эту точку с контуром панели (рис. 1). В качестве граничных условий используется свободное опирание (simply supported). При этом было установлено, что угол раскрытия между симметрично расположенными ребрами жесткости (см. рис. 1а) зависит от смещения точки приложения силы от центра пластины. Этот эффект было предложено использовать для тестирования реализующегося решения. В частности, предлагается рассмотреть аналогичную задачу для плоско-пространственной рамы, в которой балки играют роль ребер жесткости, а наличием обшивки пренебрегаем. Задача для рамы может быть решена аналитически, и из этого решения может быть найден оптимальный угол

раскрытия ребер жесткости. Сопоставление оптимальных углов раскрытия, найденных в аналитическом решении для рамы и в численном решении задачи для пластины переменной толщины, позволит получить оценку эффективности алгоритмов ТО.

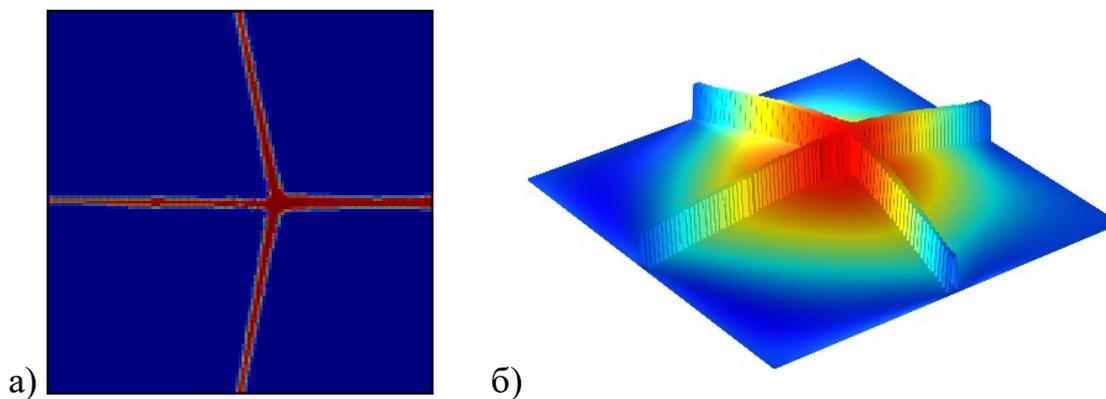


Рис. 1. Пример результатов ТО для задачи о действии сосредоточенной нормальной силы, приложенной со смещением от центра на поверхности свободно опертой пластины, а – геометрия оптимизированных ребер жесткости, б – деформированное состояние подкрепленной панели

2. Формулировка задачи

Рассматривается рама, представленная на рис. 2. Рама вписана в квадратную область с размером грани L . Рама образована продольным ребром жесткости, проходящим по центру пластины и двумя симметрично расположенными подкосными балками. В точке пересечения ребер жесткости приложена сосредоточенная нормальная сила P . Угол между подкосными балками и центральной балкой (α) является неизвестным и его необходимо найти на основе аналитического решения для рассматриваемой задачи из условия максимальной жесткости конструкции. Для этого, необходимо найти решение для прогиба под точкой

приложения силы и определить угол α , при котором этот прогиб становится минимальными. Таким образом, будет обеспечен

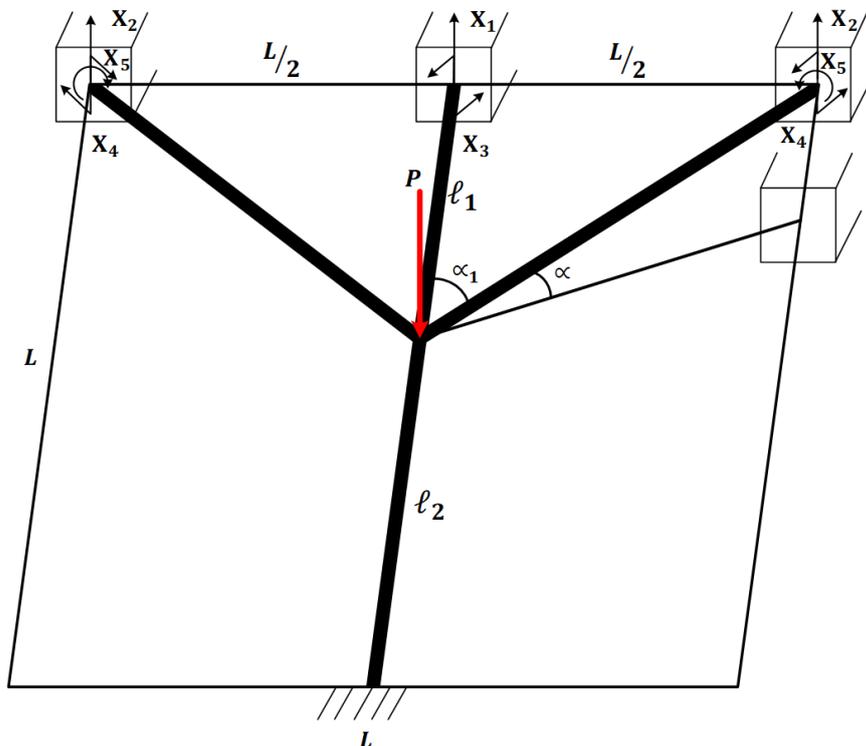


Рис 2. Общий вид эквивалентной системы.

вариант конструкции, соответствующий случаю минимальной работы внешних сил, то есть минимальной энергии деформаций конструкции.

Рама представляет с собой плоско пространственную конструкцию. Внешнее закрепление концов балок, образующих раму, считается консольным. Рассматриваем задачу будем решать с помощью метода сил. Система канонических уравнений метода сил будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 &= 0 \\
 \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 &= 0 \\
 \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 &= 0 \\
 \delta_{4P} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 &= 0 \\
 \delta_{5P} + \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Где X_i $i=1..5$ являются неизвестными силовыми факторами, а δ_{ij} и δ_{ip} коэффициенты системы уравнений (1) причем $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Для решения поставленной задачи построим эквивалентную систему, которая имеет вид, представлены на рис 2. Из этого рисунка видно, что рама пять раз статически неопределима. Для определения коэффициентов системы канонических уравнений (1) будем использовать графоаналитический метод интеграла Мора (правило Верещагина). Для этого необходимо построить эпюры моментов относительно внешней нагрузки (рис.3) и эпюры моментов от единичных нагрузок, изображенных на рис 4-8. Здесь представлены эпюры моментов от неизвестных силовых факторов $X_i=1$.

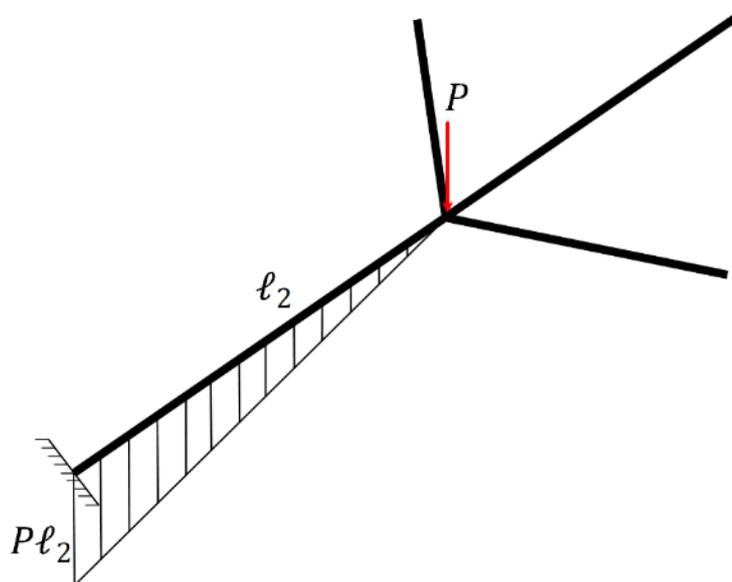


Рис 3. Эпюра моментов относительно внешней нагрузки.

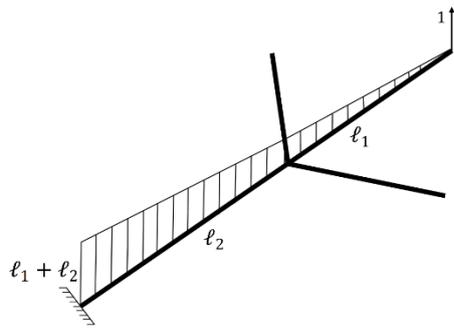


Рис 4

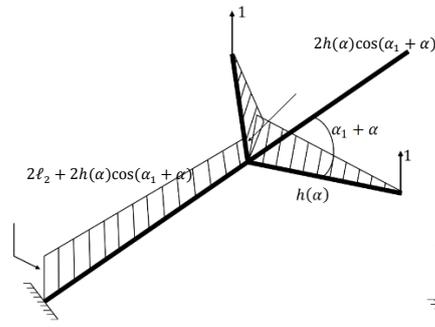


Рис 5

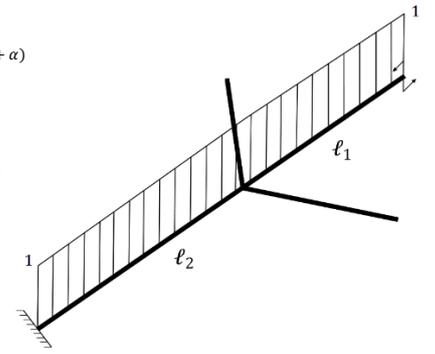


Рис 6

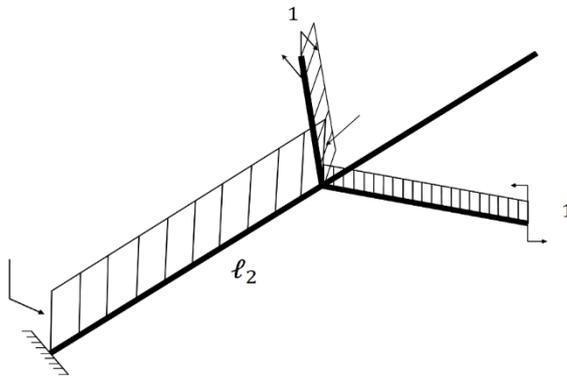


Рис 7

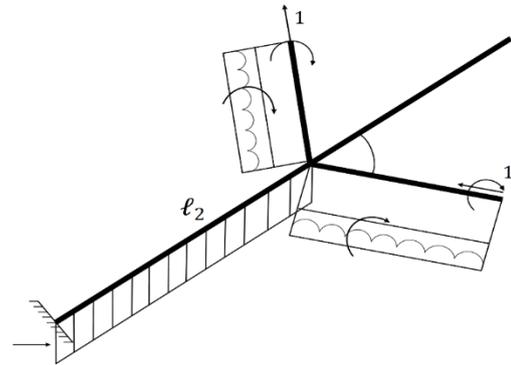


Рис 8

В результате «перемножения» соответствующих эпюр получаем коэффициент

δ_{ij} и δ_{ip} системы (1) в виде:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1P} &= \frac{Pl}{2EJ_z} \left(\frac{1}{3} + \Lambda \right), \sigma_{11} = \frac{\ell}{3EJ_z} (1 + \Lambda), \sigma_{12} = \left[\frac{(1+K)(1+2K)}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) + \frac{2}{3} + K \right], \\
 \delta_{13} &= \frac{\ell}{2EJ_z} (1 + \Lambda)^2, \\
 \delta_{14} &= \frac{\ell}{2EJ_z} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha), \sigma_{15} = -\frac{\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
 \delta_{2P} &= \frac{-Pl}{EJ_z} \left[\frac{1}{3} + \frac{K}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) \right], \\
 \delta_{22} &= \frac{\ell}{EJ_z} \left[(1 + \Lambda) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) (2 + (1 + K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha)) + \frac{4}{3} \right], \\
 \delta_{23} &= \frac{\ell}{EJ_z} [1 + (1 + K) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha)], \\
 \delta_{33} &= \frac{\ell}{EJ_z} (1 + \Lambda), \delta_{24} = \frac{2\ell}{EJ_z} (1 + \Lambda) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha), \\
 \delta_{25} &= -\frac{2\ell}{EJ_z} (1 + \Lambda) \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha), \delta_{3P} = -\frac{Pl}{2EJ_z}, \\
 \delta_{34} &= \frac{2\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \sigma_{35} = -\frac{\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \sigma_{4P} = -\frac{\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
 \delta_{44} &= \frac{2\ell}{EJ_z} \left[\frac{1 + K}{2 \sin(\alpha_1 + \alpha)} + 2 \cos^2(\alpha_1 + \alpha) \right], \\
 \delta_{45} &= -\frac{4\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \sigma_{5P} = \frac{\ell}{EJ_z} \cos(\alpha_1 + \alpha), \\
 \delta_{55} &= \frac{2\ell}{EJ_z} \left[2 \cos(\alpha_1 + \alpha) + \frac{1 + K}{2 \sin(\alpha_1 + \alpha)} \beta \right] \beta = \frac{EJ_z}{GJ_k}
 \end{aligned} \tag{2}$$

В этих выражениях E, G модули упругости первого и второго рода, J_z, J_k -

моменты инерции на изгиб и кручение соответственно, $K = \frac{\ell}{\ell}$

Далее, решая систему канонических уравнений (1), получаем неизвестные силовые факторы X_i $i = 1..5$. Тогда искомый прогиб будет иметь следующий вид:

$$\delta = \frac{P\ell}{EJ_z} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{X_1}{2P} \left(K + \frac{2}{3} \right) - \frac{X_2}{P} \left[\frac{1+K}{2} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha) + \frac{2}{3} \right] - \frac{1}{2} \frac{X_3}{P} - \frac{X_4}{P} \cos(\alpha_1 + \alpha) + \frac{X_5}{P} \cos(\alpha_1 + \alpha) \right\}$$

Для определения искомого прогиба используем среду Maple. Проведены тестовые расчеты для следующих параметров: размер области $L = 300$ мм, модуль Юнга рамы 1 ГПа, смещение точки приложения силы определяется величиной параметра $K = 0..0.37$. На рис. 9 показан найденный оптимальный угол между ребрами жесткости, найденный для плоско-пространственной рамы в зависимости от координаты приложения внешней нагрузки K . На этом же рисунке показано соответствующее изменение оптимального угла раскрытия ребер жесткости, найденного на основе метода ТО. Постановка и принципы численной реализации привлекаемой методики ТО для панели переменной толщины была описана ранее в работе [10]. Видно, что имеет место одинаковая тенденция в изменении оптимального угла между ребрами жесткости в аналитическом и численном решении.

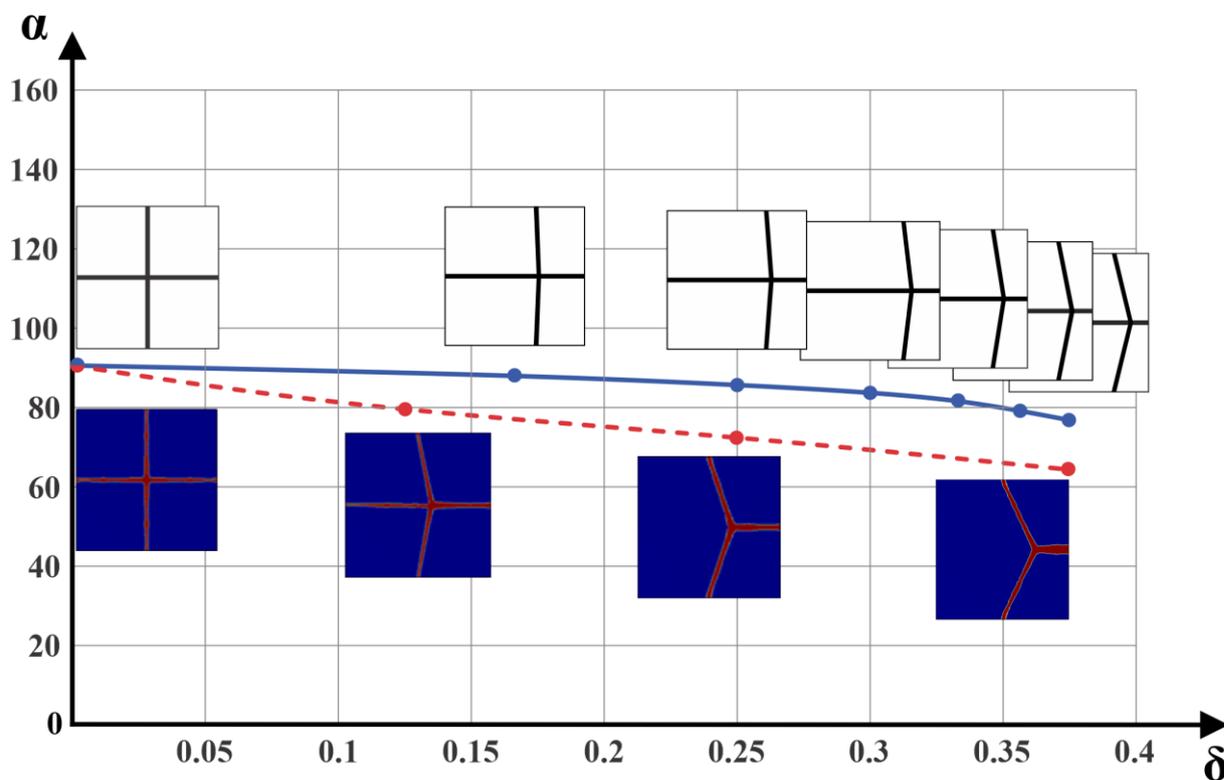


Рис. 9. Сопоставление аналитического и численного решения для оптимальной ориентации ребер жесткости в подкрепленной панели.

Точного совпадения между решения не реализуется, так как, во-первых, аналитическая балочная модель является только начальным приближением для реальной конструкции подкрепленной панели, а во-вторых, как следует из представленного рис. 9, при достаточно большом смещении точки приложения силы в ТО происходит изменение оптимальной геометрии рамы – исчезает часть центральной балки, а оставшиеся ребра жесткости увеличиваются в размерах. Характеристики оптимальной геометрии ребер жесткости, найденные в результате решения задачи ТО, представлены в таблицах 1-4. Для больших значений K и при сохранении одинакового объема подкрепляющих элементов, более оптимальным, оказывается вариант с видоизмененной геометрией ребер жесткости, которые

становятся шире и обладают увеличенной площадью поперечного сечения и увеличенным моментом инерции.

Таблица 1. Параметры оптимальной геометрии панели, при центральном приложении силы.

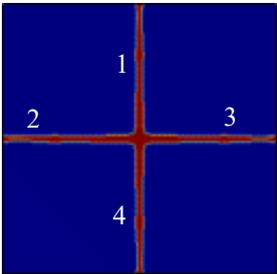
Типы	i	Толщина (mm)	Высота (mm)	Площадь поперечного сечения (S)	Момент инерции	
					(I_x)	(I_y)
	1	8	30	240 mm ²	18×10 ³	1280
	2	8	30	240 mm ²	18×10 ³	1280
	3	8	30	240 mm ²	18×10 ³	1280
	4	8	30	240 mm ²	18×10 ³	1280

Таблица 2. Параметры оптимальной геометрии панели, при приложении силы со смещением $K = 1.88$.

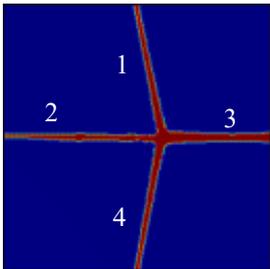
Типы	i	Толщина (mm)	Высота (mm)	Площадь поперечного сечения (S)	Момент инерции	
					(I_x)	(I_y)
	1	7.3	30	219 mm ²	16425	972.5
	2	5.5	30	165 mm ²	12375	415.9
	3	10.5	30	315 mm ²	23625	2894.1
	4	7.3	30	219 mm ²	16425	972.5

Таблица 3. Параметры оптимальной геометрии панели, при приложении силы со смещением $K = 2.794$.

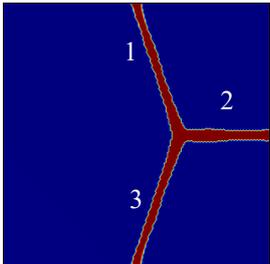
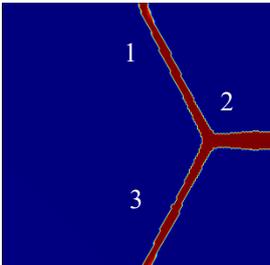
Типы	i	Толщина (mm)	Высота (mm)	Площадь поперечного сечения (S)	Момент инерции	
					(I_x)	(I_y)
	1	10	30	300 mm ²	22500	2500
	2	12.5	30	375 mm ²	28125	4882.8
	3	10	30	300 mm ²	22500	2500

Таблица 4. Параметры оптимальной геометрии панели, при приложении силы со смещением $K = 4.71$.

Типы	i	Толщина (mm)	Высота (mm)	Площадь поперечного сечения (S)	Момент инерции	
					(I_x)	(I_y)
	1	10	30	315 mm ²	22500	2500
	2	15	30	510 mm ²	33750	8437.5
	3	10	30	315 mm ²	22500	2500

Заключение

В работе представлен вариант тестовой задачи, позволяющей приближенной оценить эффективность методики топологической оптимизации, реализуемой для подкрепленных плоских панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Показано, что в оптимальном численном решении, построенном для пластин

переменной толщины, и в соответствующем аналитическом решении для плоско-пространственной рамы реализуется одинаковая тенденция изменения оптимального угла между ребрами жесткости. Таким образом, можно утверждать, что по крайней мере, приближенной численной методика ТО валидирована на примере рассматриваемой тестовой задачи для свободно опертой панели, нагруженной сосредоточенной силой.

Список источников

1. Bendsøe M., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications, Springer, 2003.
2. O. Sigmund, K. Maute. Topology optimization approaches // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, vol. 48 (6), pp. 1031–1055. DOI:[10.1007/S00158-013-0978-6](https://doi.org/10.1007/S00158-013-0978-6)
3. Wang C. et al. Structural topology optimization considering both performance and manufacturability: strength, stiffness, and connectivity // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, vol. 63, pp. 1427-1453. DOI:[10.1007/s00158-020-02769-z](https://doi.org/10.1007/s00158-020-02769-z)
4. Ferrari F., Sigmund O. Revisiting topology optimization with buckling constraints // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, vol. 59, no. 5, pp. 1401-1415. DOI:[10.1007/s00158-019-02253-3](https://doi.org/10.1007/s00158-019-02253-3)
5. Picelli R., Vicente W.M., Pavanello R., Xie Y.M. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic–structure interaction // Finite Elements in Analysis and Design, 2015, vol. 106, pp. 56–64. URL: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.07.010>

6. K. Svanberg. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization // International Journal for numerical methods in engineering, 1987, vol. 24 (2), pp. 359–373. DOI:[10.1002/NME.1620240207](https://doi.org/10.1002/NME.1620240207)
7. Lam Y., Santhikumar S. Automated rib location and optimization for plate structures // Struct Multidisc Optim, 2003, vol. 25, pp. 35–45. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0270-7>
8. Linyuan Li, Chang Liu, Weisheng Zhang, Zongliang Du, Xu Guo. Combined model-based topology optimization of stiffened plate structures via MMC approach // International Journal of Mechanical Sciences, 2021, vol. 208, pp. 106682. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106682>
9. Keng-Tung Cheng, Niels Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates // International Journal of Solids and Structures, 1981, vol. 17(3), pp. 305–323. DOI:[10.1016/0020-7683\(81\)90065-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90065-2)
10. Чжо Ёе Ко, Соляев Ю.О. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161420> . DOI: [10.34759/trd-2021-120-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-07)
11. Лурье К.А., Черкаев А.В. О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 6. С. 157-159.
12. Valery V. Vasiliev, Evgeny V. Morozov. Advanced mechanics of composite materials and structures, Elsevier, 2018.

13. Julio Munoz and Pablo Pedregal. A review of an optimal design problem for a plate of variable thickness // SIAM Journal on control and optimization, 2007, vol. 46(1), pp. 1-13. DOI:[10.1137/050639569](https://doi.org/10.1137/050639569)
14. E.A. Träff, O. Sigmund, N. Aage. Topology optimization of ultra high resolution shell structures // Thin-Walled Structures, 2021, vol. 160, pp. 107349. DOI:[10.1016/j.tws.2020.107349](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107349)
15. G. Bouchitté, I. Fragalà, P. Seppecher. Structural optimization of thin elastic plates: the three dimensional approach // Archive for rational mechanics and analysis, 2011, vol. 202 (3), pp. 829–874. DOI:[10.1007/s00205-011-0435-x](https://doi.org/10.1007/s00205-011-0435-x)
16. A. Dugré, A. Vadean, et al. Challenges of using topology optimization for the design of pressurized stiffened panels // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, vol. 53(2), pp. 303–320. DOI:[10.1007/s00158-015-1321-1](https://doi.org/10.1007/s00158-015-1321-1)
17. Rais-Rohani M., Lokits J. Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures // Struct Multidisc Optim, 2007, vol. 34, pp. 75-90. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0066-2>
18. Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Расчётно-экспериментальное исследование поведения плоской подкреплённой панели из углепластика при ударе // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168990>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-04)
19. Дудченко А.А., Ле Ким Кёнг, Лурье С.А. Расчет и проектирование контурно подкреплённой композитной панели, нагруженной поперечной силой // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=28792>

20. O. Sigmund. On benchmarking and good scientific practise in topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, vol. 65 (11), pp. 1–10. DOI:[10.1007/s00158-022-03427-2](https://doi.org/10.1007/s00158-022-03427-2)

References

1. Bendsøe M., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods, and applications*, Springer, 2003.
2. O. Sigmund, K. Maute. Topology optimization approaches, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, vol. 48 (6), pp. 1031–1055. DOI:10.1007/S00158-013-0978-6
3. Wang C. et al. Structural topology optimization considering both performance and manufacturability: strength, stiffness, and connectivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, vol. 63, pp. 1427-1453. DOI:10.1007/s00158-020-02769-z
4. Ferrari F., Sigmund O. Revisiting topology optimization with buckling constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, vol. 59, no. 5, pp. 1401-1415. DOI:10.1007/s00158-019-02253-3
5. Picelli R., Vicente W.M., Pavanello R., Xie Y.M. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic–structure interaction, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2015, vol. 106, pp. 56–64. URL: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.07.010>
6. K. Svanberg. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, *International Journal for numerical methods in engineering*, 1987, vol. 24 (2), pp. 359–373. DOI:10.1002/NME.1620240207

7. Lam Y., Santhikumar S. Automated rib location and optimization for plate structures, *Struct Multidisc Optim*, 2003, vol. 25, pp. 35–45. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0270-7>
8. Linyuan Li, Chang Liu, Weisheng Zhang, Zongliang Du, Xu Guo. Combined model-based topology optimization of stiffened plate structures via MMC approach, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, vol. 208, pp. 106682. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106682>
9. Keng-Tung Cheng, Niels Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, 1981, vol. 17(3), pp. 305–323. DOI:10.1016/0020-7683(81)90065-2
10. Kyaw Ye Ko, Solyaev Yu.O. Topological optimization of reinforced panels loaded with concentrated forces // *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161420>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-07
11. Lur'e K.A., Cherkaev A.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1976, no. 6, pp. 157-159.
12. Valery V. Vasiliev, Evgeny V. Morozov. *Advanced mechanics of composite materials and structures*, Elsevier, 2018.
13. Julio Munoz and Pablo Pedregal. A review of an optimal design problem for a plate of variable thickness, *SIAM Journal on control and optimization*, 2007, vol. 46(1), pp. 1-13. DOI:10.1137/050639569
14. E.A. Träff, O. Sigmund, N. Aage. Topology optimization of ultra high resolution shell structures, *Thin-Walled Structures*, 2021, vol. 160, pp. 107349. DOI:10.1016/j.tws.2020.107349

15. G. Bouchitté, I. Fragal'a, P. Seppecher. Structural optimization of thin elastic plates: the three dimensional approach *Archive for rational mechanics and analysis*, 2011, vol. 202 (3), pp. 829–874. DOI:10.1007/s00205-011-0435-x
16. A. Dugr'е, A. Vadean, et al. Challenges of using topology optimization for the design of pressurized stiffened panels, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, vol. 53(2), pp. 303–320. DOI:10.1007/s00158-015-1321-1
17. Rais-Rohani M., Lokits J. Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures, *Struct Multidisc Optim*, 2007, vol. 34, pp. 75-90. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0066-2>
18. Martirosov M.I., Khomchenko A.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168990>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-04
19. Dudchenko A.A., Le Kim Kyong, Lur'e S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28792>
20. O. Sigmund. On benchmarking and good scientific practise in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, vol. 65 (11), pp. 1–10. DOI:10.1007/s00158-022-03427-2

Статья поступила в редакцию 16.03.2023

Одобрена после рецензирования 11.04.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 16.03.2023; approved after reviewing on 11.04.2023; accepted for publication on 27.04.2023