Труды МАИ. Выпуск № 110 http://trudymai.ru/

УДК 539.3 DOI: 10.34759/trd-2020-110-3

Систематизация одномерных краевых задач механики деформируемого твердого тела

Коровайцева Е.А.

Научно-исследовательский институт механики Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, 1,

Москва, 119192, Россия

e-mail: katrell@mail.ru

Статья поступила 17.01.2020

Аннотация

В работе представлена систематизация одномерных краевых задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ), основанная на использовании систем дифференциальных и алгебраических уравнений, записываемых в векторно-матричной форме. Для линейных и нелинейных задач выделены три типа канонических форм без дополнительных алгебраических соотношений: двухточечная, многоточечная неразветвленная и многоточечная разветвленная краевые задачи. Описаны формы задач с дополнительными алгебраическими соотношениями. Обоснована необходимость введения предлагаемой систематизации в практику решения задач МДТТ на этапе математической формулировки задачи, связанная с возможностью минимизации круга задач, требующих решения, при одновременном повышении универсальности и эффективности разрабатываемых алгоритмов решения.

Ключевые слова: каноническая форма, двухточечная краевая задача, многоточечная краевая задача, векторно-матричная формализация.

Введение

Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) является одним из наиболее развитых направлений механики в целом. По мере научного прогресса с одной стороны все шире и сложнее становится круг решаемых задач, а с другой стороны все большие возможности решения любых задач предоставляются непрерывно и порой резко идущим развитием компьютерной техники.

Постепенно круг охватываемых моделей расширяется, и сейчас трудно найти область человеческой деятельности, развитию которой не способствовало бы ее моделирование, приводящее к принципиальной необходимости привлечения ЭВМ. Синхронно с этими процессами происходят изменения в уровне информатизации решаемых на практике задач. Можно выделить четыре способа описания моделей задач механики: скалярный, операторный, тензорный и векторно-матричный. Скалярное описание характерно начальному этапу разработки моделей, методов и алгоритмов решения задач механики, предшествовавшему периоду интенсивного развития вычислительной техники. Однако и в настоящее время запись разрешающих соотношений задач механики в скалярной форме широко распространена [1-9]. Также часто используемой является векторно-матричная формулировка уравнений, описывающих математические модели задач механики. Следует выделить работы, в которых компоненты вводимых в рассмотрение векторов имеют единый механический смысл (вектор перемещений, вектор напряжений и т.п.) [4, 10], и работы, в которых под вектором понимается совокупность скалярных величин или функций, имеющих различный механический смысл [2, 11-18].

Тензорная запись разрешающих соотношений задач механики менее распространена по сравнению с указанными выше [10, 19, 20]. Наконец, судя по проанализированным источникам, наименее распространенной является операторная запись [21, 22].

С позиций компьютерной математики указанные четыре описания сопровождает увеличение мерности используемых переменных, структурности представления информации. Так, скалярное описание является наименее структурным, зачастую приводя к необходимости построения громоздких выкладок и усложняя формулировку и последующее программирование алгоритмов решения задач. Использование операторного подхода при формулировании разрешающих соотношений и алгоритмов решения, как показала практика расчетов, может привести к принципиальному замедлению скорости сходимости итераций численных процессов и увеличению времени расчета в несколько раз по сравнению с организацией процедуры вычислений, основанной на векторно-матричной формализации. Применение тензорного аппарата в доступной литературе используется лишь для описания моделей задач механики. При разработке алгоритмов решения тензорные формулировки разрешающих соотношений приводятся к скалярным. Аналогичным образом изменяется векторно-матричная формулировка задач механики, основанная на использовании векторов, имеющих физический смысл. Таким образом, последние два указанных способа описания моделей задач механики по сути не приводят к возможности построения алгоритмов решения, отличающихся от алгоритмов, свойственных скалярному описанию.

Далее в работе будем рассматривать направление решения задач механики, которое связано с необходимостью использования систем дифференциальных уравнений, описываемых с помощью векторно-матричной формализации как одного из описательных инструментов компьютерного моделирования. Следует отметить, что, несмотря на интенсивное развитие компьютерных технологий, и до сих пор эта формализация, по нашему мнению, развита слабо – работы, в которых она используется, датируются преимущественно 70-ми – 80-ми годами прошлого века. Вместе с тем возможности решения задач механики, возникающие при применении векторно-матричной формы описания моделей, недоступны скалярным, тензорным или операторным подходам.

Основные понятия

Под вектором размерности n будем понимать упорядоченную систему n скалярных величин ($n \geq 1$), которая записывается в виде столбца

$$\vec{a}^T = \{a_1 \quad \dots \quad a_n\},$$

где $(\ )^T$ – символ транспонирования.

В литературе обычно отмечается [23], что описанное понимание вектора используется лишь для наглядности и компактности. Заметим, что с позиций полного раскрытия возможностей используемого понятия вектора несравненно важнее создаваемые при таком понимании возможности структурного подхода к решению прикладных задач, векторно-матричной формализации любого из этапов решения этих задач, алгоритмизации, позволяющей опираться при создании прикладных программ на структурное программирование.

Компонентами вектора в задачах механики могут быть либо вещественные числа, либо функции. В последнем случае вектор является векторной функцией. При разработке алгоритмов решения задач могут использоваться и комплексные числа.

Развитие логики определения вектора не как элемента с естественной геометрической иллюстрацией, а как структурного элемента информатизации решения задачи механики, обобщается на матрицы.

В настоящей работе при описании базовых моделей задач механики деформируемого твердого тела достаточно использования лишь алгебраических и дифференциальных уравнений со скалярными, векторными и матричными параметрами. Системы дифференциальных уравнений заимствуются из числа задач механики тонкостенных деформируемых систем. Но в целом область приложения описываемых ниже форм краевых задач не принципиальна, так как все они направлены на развитие методов и алгоритмов решения задач механики.

Описываемые ниже базовые модели связаны с двумя основными типами машиностроительных конструкций: стержневыми и оболочечными. В качестве элементов классификации конструкций использованы:

- состав конструкции,

- её геометрия,
- материал,
- нагружение,
- закрепление.

Конструкции предполагаются однородными по составу: либо стержневыми, либо оболочечными. Материалы элементов конструкций могут характеризоваться различными моделями: линейно упругой, нелинейно упругой, пластической, эволюционной, моделью материала с памятью формы. Из них последние четыре описываются самыми разнообразными соотношениями, принципиальным отличием которых является нелинейность связи напряжений с деформациями.

Помимо упомянутых параметров исходных данных, трудоемкость решения базовых задач зависит от нагружения и закрепления конструкции. Наименьшая из возможных трудоемкость характерна статическим задачам при непрерывной функции нагрузки. Динамическое нагружение и его дискретность существенно увеличивают трудоемкость решения задачи, поскольку в первом случае все искомые функции состояния конструкции становятся функциями двух переменных, а при дискретном нагружении оболочек задача становится еще сложнее. В этом случае в качестве аргументов в уравнениях в частных производных выступают уже две пространственных переменных. Аналогично при непрерывном по пространственной переменной закреплении конструкции трудоемкость решения задачи существенно меньше, чем при дискретном закреплении. Постановка и решение соответствующих задач могут быть описаны, требуя всего лишь описания дискретности нагружения и закрепления или дискретизации времени. Но они связаны в общем случае с многомерными задачами, блочными векторами и матрицами в алгоритме решения, а принципиальных методических затруднений обычно не вызывают. Поэтому в данной работе рассматриваются только одномерные краевые задачи. Кроме того, независимо от типа конструкций, их состава, геометрии, материала, нагружения и закрепления, при описании исходной задачи используется единая векторно-матричная форма. Привлекаемые дифференциальные уравнения могут быть двух типов: линейные и нелинейные без ограничения на диапазон исследуемых нелинейностей. В каждом из типов краевых задач рассматриваются три формы, считаемые каноническими:

1) двухточечная краевая задача;

2) многоточечная неразветвленная краевая задача;

3) многоточечная разветвленная краевая задача.

Согласно используемым определениям в <u>многоточечной задаче</u> выделяются узлы двух типов: внешние и внутренние. В узлах первого типа для описания совместности деформирования элементов конструкции используются граничные условия. Во внутренних узлах конструкции сопрягаются как минимум два деформируемых элемента конструкции. Если во всех внутренних узлах конструкции сопрягаются только по два деформируемых элемента, конструкция называется <u>неразветвленной</u>, а условия совместности деформирования во внутренних узлах конструкции имеют вид условий сопряжения вектора разрешающих переменных без разделения обобщенных перемещений и усилий. При наличии в конструкции хотя бы одного внутреннего узла с сопряжением более двух элементов (разветвленная конструкция) необходимо разделить обобщенные перемещения и усилия. Тогда во внутренних узлах конструкции совместность деформирования элементов конструкции описывается двумя типами соотношений:

1) условия неразрывности обобщенных перемещений для элементов, сопрягаемых в каждом узле элементов конструкции;

2) условия равновесия обобщенных внутренних сил, возникающих в каждом из сопрягаемых в узле элементов конструкции, и внешних узловых обобщенных сил.

Канонические формы одномерных краевых задач МДТТ

На стадии формулировки линейных краевых задач предлагается введение трех простейших канонических форм:

1) двухточечные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма I)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x,\vec{\mu})\vec{y} + \vec{q}(x)\,, \qquad (1)$$

$$B_H(x_H,\vec{\mu}_H)\vec{y}_H + \vec{b}_H(x_H,\vec{\mu}_H) = 0, \qquad н \rightleftarrows к. \qquad (2)$$

Здесь и далее $\vec{y}(x,\vec{\mu},\vec{\mu}_H)$ – вектор разрешающих переменных задачи, $A(x,\vec{\mu})$, $B_н(x_н,\vec{\mu}_н)$ – матрицы коэффициентов, $\vec{q}(x)$ – вектор-функция из l компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок, $\vec{\mu}(x)$, $\vec{\mu}_H$ – функция и вектор исходных значений параметров задачи, *н* и *к* – индексы значений переменных и аргумента в начальной и конечной точках интервала решения краевой задачи, (2) – граничные условия задачи. При этом для простоты записи в функции решения опущена фактическая ее зависимость от полной совокупности функций и векторов исходных значений параметров задачи.

2) многоточечные неразветвленные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма II)

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx} = A_i(x_i, \vec{\mu}_i)\vec{y}_i + \vec{q}_i(x_i, \vec{\mu}_i), \qquad i \in [1,\ N], \tag{3}$$

$$B_1(x_{1,H}, \vec{\mu}_{1,H})\vec{y}_{1,H} + \vec{b}_{1,H}(x_{1,H}, \vec{\mu}_{1,H}) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2,\ x_{1,H} \rightleftarrows x_{N,K}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D_j(x_{j,K})\vec{y}_j(x_{j,K}) = D_{j+1}(x_{j+1,H})\vec{y}_{j+1}(x_{j+1,H}) + \\ + C_{j+1}(x_{j+1,H})\vec{a}_{j+1}(x_{j+1,H}, \vec{\mu}_{j+1,H}),\ \ j \in [1,\ N-1]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь N – число суперэлементов краевой задачи, условия (4) являются граничными, а (5) – условия сопряжения суперэлементов краевой задачи.

3) многоточечные разветвленные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма III)

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx} = A_i(x_i, \vec{\mu}_i)\vec{y}_i + \vec{q}_i(x_i, \vec{\mu}_i), \qquad i \in [1,\ N], \tag{6}$$

$$B_j(x_{j,H}, \vec{\mu}_{j,H})\vec{y}_{j,H} + \vec{b}_{j,H}(x_{j,H}, \vec{\mu}_{j,H}) = 0, \tag{7}$$

$$D_j(x_{j,H})\vec{y}_{j,H} + D_m(x_{m,K})\vec{y}_{m,K} = 0, \tag{8}$$

$$D_j(x_{j,H})\vec{y}_{j,H} + D_m(x_{m,H})\vec{y}_{m,H} = 0, \tag{9}$$

$$D_j(x_{j,K})\vec{y}_{j,K} + D_m(x_{m,K})\vec{y}_{m,K} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{m=1}^{l} D_m(x_{m,H})\vec{y}_{m,H} + \sum_{n=1}^{p} D_n(x_{n,K})\vec{y}_{n,K} + C_q(x_q)\vec{a}_q(x_q, \mu_q) = 0. \tag{11}$$

Здесь вне знаков суммирования значения индексов *j, m, n, l, p, q* определяются топологией конкретной краевой задачи и могут быть любыми из диапазона $[1, N]$. Условия (7) являются граничными, (8)-(10) – условия неразрывности обобщенных перемещений, (11) – условия равновесия внутренних узлов конструкции.

Распространение области деформирования конструкций на большие перемещения, повороты и деформации в принципе не изменяет структуры соотношений (1)-(11), но все линейные функции в дифференциальных уравнениях становятся нелинейными. Тогда получаем нелинейные краевые задачи со следующими основными формами дифференциальных уравнений:

1) двухточечные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма IV)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\,(x, \vec{y}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha), \tag{12}$$

$$\vec{\psi}_1(x_н, \vec{y}_н, \vec{\mu}_н, \vec{q}_н, \alpha) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \; x_н \rightleftarrows x_к. \tag{13}$$

Здесь и далее α – параметр нагрузки; $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$ – вектор-функции заданных краевых соотношений с числом компонент соответственно *p* и *s*, где $p + s = n$; $\vec{f}$ – вектор-функция из *n* компонент правых частей разрешающей системы уравнений.

2) многоточечные неразветвленные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма V)

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i} = \vec{f}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N], \tag{14}$$

$$\vec{\psi}_1(x_{1,н}, \vec{y}_{1,н}, \vec{\mu}_{1,н}, \vec{q}_{1,н}, \alpha) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \; x_{1,н} \rightleftarrows x_{N,к}, \tag{15}$$

$$D_j(x_{j,к})\cdot\vec{y}_{j,к}(x_{j,к})=D_{j+1}(x_{j+1,н})\cdot\vec{y}_{j+1,н}(x_{j+1,н})+ \\ +C_{j+1}(x_{j+1,н})\cdot\vec{a}_{j+1}(x_{j+1,н},\vec{\mu}_{j+1,н})\alpha,\quad j\in[1,N-1]. \tag{16}$$

Здесь N – число суперэлементов, условия (15) являются граничными, а (16) – условия сопряжения суперэлементов краевой задачи.

3) многоточечные разветвленные нелинейные краевые задачи без дополнительных соотношений (каноническая форма VI)

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i}=\vec{f}_i(x_i,\vec{y}_i,\vec{\mu}_i,\vec{q}_i,\alpha),\quad i\in[1,N], \tag{17}$$

$$\vec{\psi}_j(x_{j,н},\vec{y}_{j,н},\vec{\mu}_{j,н},\vec{q}_{j,н},\alpha)=\vec{0}, \tag{18}$$

$$D_j(x_{j,н})\vec{y}_{j,н}+D_m(x_{m,к})\vec{y}_{m,к}=\vec{0}, \tag{19}$$

$$D_j(x_{j,н})\vec{y}_{j,н}+D_m(x_{m,н})\vec{y}_{m,н}=\vec{0}, \tag{20}$$

$$D_j(x_{j,к})\vec{y}_{j,к}+D_m(x_{m,к})\vec{y}_{m,к}=\vec{0}, \tag{21}$$

$$\sum_{m=1}^{l}D_m(x_{m,н})\cdot\vec{y}_{m,н}+\sum_{n=1}^{p}D_n(x_{n,к})\cdot\vec{y}_{n,к}+C_q(x_q)\cdot\vec{a}_q(x_q,\vec{\mu}_q)\alpha=\vec{0}. \tag{22}$$

Здесь смысл соотношений (18)-(22) аналогичен смыслу условий (7)-(11).

Введенные в итоге шесть форм краевых задач считаются каноническими. Условно введенная канонизация форм определяется следующими положениями:

1) вектор $\vec{y}$ искомых переменных, дифференцируемый по координате x, считается в простейшем случае разрешающим, так как как дифференциальные уравнения, так и граничные условия, кроме него и координаты x, зависят только от исходных данных краевой задачи, описываемых векторной функцией $\vec{\mu}(x)$ и её дискретными значениями на краях $\vec{\mu}_н$, $\vec{\mu}_к$;

2) векторные величины $\vec{\mu}(x)$, $\vec{\mu}_н$, $\vec{\mu}_к$, хотя и должны быть заданы до решения краевой задачи, специально выделяются в канонической форме: во-первых, от их конкретных значений непосредственно зависит обусловленность краевой задачи, а во-вторых, они являются принципиально необходимыми структурными величинами для параметрического анализа решения краевых задач.

Подчеркнем, что в доступной литературе в большинстве работ, использующих рассматриваемое нами описание моделей задач механики, формулируются постановки и разрабатываются алгоритмы решения лишь двухточечных краевых задач. Полная совокупность задач, описывающих поведение как неразветвленных, так и разветвленных конструкций, рассмотрена, по-видимому, только в работе [15]. Однако предлагаемая нами каноническая форма III отличается от принятой в работе [15] формы строгим разделением исходных векторно-матричных соотношений, не связанных с граничными условиями (7), на два типа: условия неразрывности обобщенных перемещений (8)-(10) и условия равновесия узлов (11).

Формы одномерных краевых задач МДТТ с дополнительными алгебраическими соотношениями

На основании введенных шести канонических форм краевых задач могут быть построены еще шесть форм краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями. Хотя новые формы краевых задач могут быть приведены к каноническим, они выделены в работе сознательно, так как при решении прикладных задач механики деформирования конструкций такие формы наиболее употребительны и оставлять неструктурированными соответствующие описания и преобразования нельзя в принципе на современном уровне возможностей использования ЭВМ для решения прикладных задач:

1) линейная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x,\vec{\mu}) \cdot \vec{y} + C(x,\vec{\mu}) \cdot \vec{z} + \vec{a}(x,\vec{\mu}), \tag{23}$$

$$D(x,\vec{\mu}) \cdot \vec{y} + E(x,\vec{\mu}) \cdot \vec{z} + \vec{d}(x,\vec{\mu}) = \vec{0}, \tag{24}$$

$$B_1(x_н,\vec{\mu}_н)\vec{y}_н + G_1(x_н,\vec{\mu}_н)\vec{z}_н + \vec{b}_1(x_н,\vec{\mu}_н) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad x_н \rightleftarrows x_к, \tag{25}$$

$$H_1(x_н,\vec{\mu}_н) \cdot \vec{y}_н + K_1(x_н,\vec{\mu}_н) \cdot \vec{z}_н + \vec{h}_1(x_н,\vec{\mu}_н) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad x_н \rightleftarrows x_к. \tag{26}$$

Здесь и далее $\vec{z}$ – вектор дополнительных переменных, т.е. переменных, которые не входят под знак производной в дифференциальных уравнениях задачи, а рассчитываются по соотношениям линейной алгебры (24). Условия (25)-(26) являются граничными.

2) линейная многоточечная неразветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i} = A_i(x_i,\vec{\mu}_i)\vec{y}_i + C_i(x_i,\vec{\mu}_i) \cdot \vec{z}_i + \vec{a}_i(x_i,\vec{\mu}_i), \quad i \in [1,N], \tag{27}$$

$$D_i(x_i,\vec{\mu}_i) \cdot \vec{y}_i + E_i(x_i,\vec{\mu}_i) \cdot \vec{z}_i + \vec{d}_i(x_i,\vec{\mu}_i) = \vec{0}, \tag{28}$$

$$B_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н})\vec{y}_{1,н} + G_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н})\vec{z}_{1,н} + \vec{b}_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н}) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad x_{1,н} \rightleftarrows x_{N,к}, \tag{29}$$

$$H_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н}) \cdot \vec{y}_{1,н} + K_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н}) \cdot \vec{z}_{1,н} + \vec{h}_1(x_{1,н},\vec{\mu}_{1,н}) = \vec{0}, \; 1 \rightleftarrows 2, \; x_{1,н} \rightleftarrows x_{1,к}, \tag{30}$$

$$D_j(x_{j,к})\cdot\vec{y}_j(x_{j,к}) = D_{j+1}(x_{j+1,н})\cdot\vec{y}_{j+1}(x_{j+1,к}) + \\ + C_{j+1}(x_{j+1,н})\cdot\vec{a}_{j+1}(x_{j+1,н},\vec{\mu}_{j+1,н}), \quad j\in[1,N-1]. \tag{31}$$

Здесь (29)-(30) – граничные условия, а (31) – условия сопряжения суперэлементов краевой задачи.

3) линейная многоточечная разветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i} = A_i(x_i,\vec{\mu}_i)\vec{y}_i + C_i(x_i,\vec{\mu}_i)\cdot\vec{z}_i + \vec{a}_i(x_i,\vec{\mu}_i), \quad i\in[1,N], \tag{32}$$

$$D_i(x_i,\vec{\mu}_i)\cdot\vec{y}_i + E_i(x_i,\vec{\mu}_i)\cdot\vec{z}_i + \vec{d}_i(x_i,\vec{\mu}_i) = \vec{0}, \tag{33}$$

$$B_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н})\vec{y}_{j,н} + G_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н})\vec{z}_{j,н} + \vec{b}_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н}) = \vec{0}, \tag{34}$$

$$H_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н})\cdot\vec{y}_{j,н} + K_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н})\cdot\vec{z}_{j,н} + \vec{h}_j(x_{j,н},\vec{\mu}_{j,н}) = \vec{0}, \tag{35}$$

$$D_j(x_{j,H})\vec{y}_{j,H} + D_m(x_{m,K})\vec{y}_{m,K} = 0, \tag{36}$$

$$D_j(x_{j,H})\vec{y}_{j,H} + D_m(x_{m,H})\vec{y}_{m,H} = 0, \tag{37}$$

$$D_j(x_{j,K})\vec{y}_{j,K} + D_m(x_{m,K})\vec{y}_{m,K} = 0, \tag{38}$$

$$\sum_{m=1}^{l} D_m(x_{m,н})\cdot\vec{y}_{m,н} + \sum_{n=1}^{p} D_n(x_{n,к})\cdot\vec{y}_{n,к} + C_q(x_q)\cdot\vec{a}_q(x_q,\vec{\mu}_q) = \vec{0}. \tag{39}$$

Здесь (34)-(35) – граничные условия, а смысл соотношений (36)-(39) аналогичен смыслу условий (8)-(11).

Для нелинейных задач дополнительные соотношения как в дифференциальных уравнениях, так и в граничных условиях заменяются на нелинейные функциональные соотношения:

1) нелинейная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha),$$
$$\vec{\varphi}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha) = \vec{0},$$
$$\vec{\psi}_1(x_н, \vec{y}_н, \vec{z}_н, \vec{\mu}_н, \vec{q}_н, \alpha) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad x_н \rightleftarrows x_к.$$

Здесь $\vec{\varphi}$ – вектор-функция нелинейных дополнительных алгебраических соотношений, а остальные обозначения аналогичны принятым выше.

2) нелинейная многоточечная неразветвленная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i} = \vec{f}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N],$$
$$\vec{\varphi}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i, \alpha) = \vec{0},$$
$$\vec{\psi}_1(x_{1,н}, \vec{y}_{1,н}, \vec{z}_{1,н}, \vec{\mu}_{1,н}, \vec{q}_{1,н}, \alpha) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad x_{1,н} \rightleftarrows x_{N,к},$$

$$D_j(x_{j,к}) \cdot \vec{y}_{j,к}(x_{j,к}) = D_{j+1}(x_{j+1,н}) \cdot \vec{y}_{j+1,н}(x_{j+1,н}) + C_{j+1}(x_{j+1,н}) \cdot \vec{a}_{j+1}(x_{j+1,н}, \vec{\mu}_{j+1,н})\alpha,$$
$$j \in [1, N-1].$$

3) нелинейная многоточечная краевая задача с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx_i}=\vec{f}_i(x_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i,\vec{\mu}_i,\vec{q}_i,\alpha),\quad i\in[1,N],$$

$$\vec{\varphi}_i(x_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i,\vec{\mu}_i,\vec{q}_i,\alpha)=\vec{0},$$

$$\vec{\psi}_j(x_{j,н},\vec{y}_{j,н},\vec{z}_{j,н},\vec{\mu}_{j,н},\vec{q}_{j,н},\alpha)=\vec{0},$$

$$D_j(x_{j,н})\vec{y}_{j,н}+D_m(x_{m,к})\vec{y}_{m,к}=\vec{0},$$

$$D_j(x_{j,н})\vec{y}_{j,н}+D_m(x_{m,н})\vec{y}_{m,н}=\vec{0},$$

$$D_j(x_{j,к})\vec{y}_{j,к}+D_m(x_{m,к})\vec{y}_{m,к}=\vec{0},$$

$$\sum_{m=1}^{l}D_m(x_{m,н})\cdot\vec{y}_{m,н}+\sum_{n=1}^{p}D_n(x_{n,к})\cdot\vec{y}_{n,к}+C_q(x_q)\cdot\vec{a}_q(x_q,\vec{\mu}_q)\alpha=\vec{0}.$$

Отметим, что описанные шесть форм краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями не только расширяют возможности их использования для решения прикладных задач механики деформирования конструкций, но применительно к нелинейным краевым задачам принципиально изменяют их практическую значимость, так как позволяют описать поведение конструкций из неогуковских материалов при произвольных перемещениях, поворотах и деформациях. Вместе с тем и приведение новых форм краевых задач к каноническим также необходимо, так как учет дополнительных переменных связан лишь с вопросами линейной алгебры, не имеющими принципиального значения для описания алгоритмов решения краевых задач.

Выделенные формы линейных краевых задач с дополнительными соотношениями могут быть приведены к каноническим формам I-III с помощью тождественных преобразований. Аналогично и формы нелинейных краевых задач с дополнительными соотношениями при составлении алгоритма решения, основанного на использовании метода дифференцирования по параметру, могут быть приведены к квазилинейным каноническим формам I-III относительно скоростей разрешающих переменных в итерационном процессе метода. Таким образом, минимально возможный круг алгоритмов решения одномерных задач МДТТ связан с шестью введенными каноническими формами, а при программировании алгоритмов решения всех рассматриваемых типов краевых задач базовыми являются лишь три программы для решения линейных задач, соответствующих первым трем каноническим формам.

Заключение

Предлагаемый в работе структурированный и традиционный неструктурированный подходы к описанию задач МДТТ, очевидно, приводят к одним и тем же результатам решения. Отличие между ними заключается лишь в выполнении принципов структурности на всех этапах решения задачи и в трудностях программирования. Использование структурного подхода позволяет сократить количество рассматриваемых задач и разрабатываемых методик и алгоритмов их решения, одновременно повысив универсальность последних, благодаря введению предложенной в работе систематизации описания задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы (проект 19-38-70005 мол_а_мос).

Библиографический список

1. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

2. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука, 2004. – 276 с.

3. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.

4. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. – Казань: Казанский государственный энергетический университет, 2006. – 208 с.

5. Паймушин В.Н. Статические и динамические формы потери устойчивости сферической оболочки при действии внешнего давления // Известия вузов. Математика. 2016. № 4. С. 46 – 56.

6. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=100589

7. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=90079

8. Гнездилов В.А., Гришанина Т.В., Нагорнов А.Ю. Деформация плоской статически неопределимой стержневой системы при потере устойчивости стержней // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84435

9. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58524

10. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

11. Коровайцев А.В. Нелинейное деформирование тонкостенных элементов конструкций при больших перемещениях и поворотах: Дисс. … д.ф.-м.н. ,Москва, 1988, 432 с.

12. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.

13. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.

14. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1979. – 280 с.

15. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.

16. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ, 1993. – 294 с.

17. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

18. Светлицкий В.А. Механика стержней. Статика. – М.: Высшая школа, 1987. Часть 1. – 320 с.

19. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

20. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

21. Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 115 - 130.

22. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. Т. 159. Кн. 4. С. 395 - 428.

23. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1973. – 260 с.