УДК 531.396

О возможности формирования автоколебаний перевернутого двухзвенного маятника с подвижной точкой опоры

Александров В.В.*, Сидоренко Г.Ю.**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия

**e-mail: vladimiralexandrov366@hotmail.com*

***e-mail: gingrul@yandex.ru*

Аннотация

Рассматривается движение перевернутого двухзвенного маятника с подвижной точкой опоры и ограниченными ресурсами по возмущению. Путем анализа задачи о максимальном отклонении центра масс маятника, обосновывается выбор ускорения нижнего подвижного основания в виде кусочно-постоянной функции от угловой скорости. Посредством построения точечного отображения на секущей плоскости в четырехмерном пространстве в системе четвертого порядка построен орбитально-устойчивый предельный цикл, которому соответствуют автоколебания. Полученный алгоритм движения нижнего основания маятника может быть использован в качестве тестирующего движения имитационного стенда для тестирования вестибулярных протезов.

Ключевые слова: перевернутый маятник, автоколебания, предельный цикл, наихудшие возмущения, вестибулярный протез

1. Введение.

Ранее был рассмотрен перевернутый однозвенный маятник, установленный на тележке с помощью мотора постоянного тока [1]. Было показано, что при внешнем ускорении тележки $\delta_1 sign(\dot{\varphi})$ удается организовать автоколебания маятника, которым соответствует асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл. Данное возмущение является наихудшим, т.е. доставляет максимальный размах колебаний по углу φ на каждом полупериоде. При действии этого возмущения автоколебания имеют место как в редуцированной системе второго порядка, так и в исходной системе третьего порядка с малым параметром [1,2].

Полученный алгоритм был предложен в качестве тестирующего движения имитационного динамического стенда для тестирования вестибулярных протезов [3,4].

В данной статье полученный алгоритм расширен на случай маятника с двумя степенями свободы, а именно показано, что при выборе ускорения нижнего основания в виде кусочно-постоянной функции от угловой скорости в системе четвертого порядка возможно организовать автоколебания.

2. Рассмотрим перевернутый двухзвенный маятник, установленный на подвижном основании с помощью мотора постоянного тока (Рис.1). Звенья маятника однородные и имеют массы m_1, m_2 и длины $OB = l_1, BD = l_2$, соответственно. В узле маятника установлен электромотор массы m_m^1, на верхнем звене маятника расположена платформа массы m_{pl}. Тележка может перемещаться в сагиттальной плоскости с ограниченным ускорением $A(t)$.

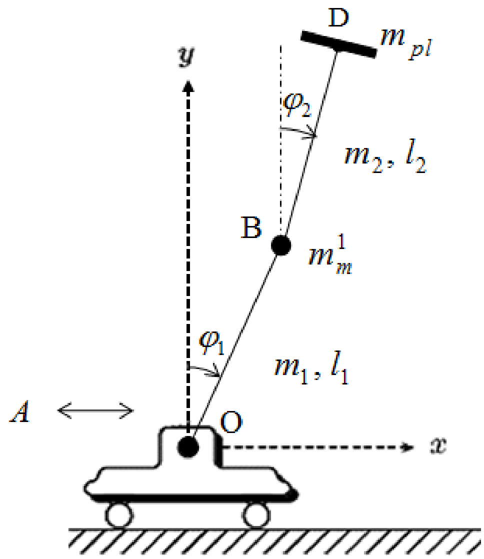

Рис.1. Перевернутый двухзвенный маятник на тележке.

Считая для простоты, что моторы идеальные, то есть их индуктивность мала, и, что параметры нижнего и верхнего моторов одинаковы, будем строить управление в виде обратной связи по показаниям потенциометров, считая их точными. Тогда уравнения движения перевернутого маятника вблизи положения равновесия примут вид:

$$A\ddot{\bar{\varphi}} + B\dot{\bar{\varphi}} - (K+G)\bar{\varphi} = A(t)\cdot A_m \qquad (1)$$

где $A(\cdot)\in \widehat{A} = \left\{\left\|A(t)\right| \le \delta_1, \delta_1 > 0\right\}$.

Здесь $\bar{\varphi}^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2]$ – вектор состояния системы, отвечающий углам между звеньями и вертикалью (Рис.1),

$$A=\begin{bmatrix} l_1^2\left(\frac{m_1}{3}+m_2+m_m^1+m_{pl}\right) & l_1l_2\left(\frac{m_2}{2}+m_{pl}\right) \\ l_1l_2\left(\frac{m_2}{2}+m_{pl}\right) & l_2^2\left(\frac{m_2}{3}+m_{pl}\right) \end{bmatrix}$$ – симметричная матрица кинетической энергии,

$$G=g\begin{bmatrix} l_1[\frac{m_1}{2}+m_2+m_m^1+m_{pl}] & 0 \\ 0 & l_2[\frac{m_2}{2}+m_{pl}] \end{bmatrix}$$ – симметричная матрица потенциальной энергии силы тяжести,

$B=\frac{c_m C}{R}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ – симметричная матрица диссипативных сил,

$K=\frac{c_m}{R}\begin{bmatrix} K_{11}+K_{22} & -K_{22} \\ -K_{22} & K_{22} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов обратной связи моторов,

$$A_m=\begin{bmatrix} l_1(\frac{m_1}{2}+m_2+m_m^1+m_{pl}) \\ l_2(\frac{m_2}{2}+m_{pl}) \end{bmatrix}$$ – вектор возмущающих сил инерции,

R – омическое сопротивление мотора,

C – коэффициент противоЭДС,

c_m – коэффициент пропорциональности между активным электромагнитным моментом мотора и током в цепи якоря.

Наличие матрицы K позволяет обеспечить колебательный характер поведения системы. Добавление сил диссипации $B\dot{\bar{\varphi}}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия $\bar{\varphi}=0$. Таким образом, система (1) является колебательной, а ее нулевое положение равновесия – асимптотически устойчивым.

В качестве функционала, характеризующего поведение системы, рассмотрим отклонение центра масс маятника от положения равновесия в проекции на ось x, жестко связанную с подвижной тележкой:

$$J = \frac{l_1(\frac{m_1}{2} + m_m^1 + m_2 + m_{pl})}{m_1 + m_m^1 + m_2 + m_{pl}} \varphi_1 + \frac{l_2(\frac{m_2}{2} + m_{pl})}{m_1 + m_m^1 + m_2 + m_{pl}} \varphi_2 . \qquad (2)$$

В рассматриваемом классе возмущений $|A(t)| \le \delta_1$ попытаемся найти наихудшее, доставляющее максимальный размах колебаний центра масс на каждом полупериоде.

Перепишем систему (1) в новых координатах, которые являются нормальными для соответствующей ей консервативной системы:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + b_{22}\dot{x}_2 + b_{12}\dot{x}_1 = s_2 A(t) \\ \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + b_{11}\dot{x}_1 + b_{12}\dot{x}_2 = s_1 A(t) \end{cases} . \qquad (3)$$

Заметим, что при проделанной замене функционал J (2) с точностью до коэффициента $(m_1 + m_m^1 + m_2 + m_{pl})^{-1}$ перешел в $\tilde{J} = s_2 x_2 + s_1 x_1$.

Далее ограничимся рассмотрением более узкого подкласса систем четвертого порядка (3) под воздействием внешнего возмущающего воздействия при следующих предположениях:

а) коэффициент перевязки b_{12} мал так, что характеристические корни системы (3) и системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + b_{22}\dot{x}_2 = s_2 A(t) \\ \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + b_{11}\dot{x}_1 = s_1 A(t) \end{cases} \qquad (4)$$

отличаются незначительно.

б) оба уравнения системы (4) имеют колебательный характер, причем собственные частоты системы являются кратными, то есть существует такое $k \in N, k > 1$, что $\omega_{22} = k\omega_{11}$, где $\omega_{11}{}^2 = \omega_1{}^2 - \rho_1{}^2, \omega_{22}{}^2 = \omega_2{}^2 - \rho_2{}^2$, $\rho_1 = \dfrac{b_{11}}{2}, \rho_2 = \dfrac{b_{22}}{2}$.

в) $s_1 > 0$, $|s_1/s_2| > 1, \rho_2 > \rho_1$.

3. Для системы (3) при выполнении предположений а)-в) поставим задачу о максимальном отклонении:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 2\rho_2\dot{x}_2 = s_2 v(t) \\ \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + 2\rho_1\dot{x}_1 = s_1 v(t) \end{cases}, \quad v(\cdot) \in V = \left\{ \|v(t)| \le \delta_1, \delta_1 > 0 \right\}$$

$$x_1(0) = \alpha_0, \quad x_2(0) = \beta_0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\tilde{J} = s_2 x_2(T) + s_1 x_1(T) \xrightarrow[-\delta_1 \le v(t) \le \delta_1]{} \min \qquad (5)$$

$$M = \left\{ \dot{\bar{x}}(T) = 0 \right\}, \quad T : \dot{\bar{x}}(t) \ne 0 \ \text{ при } \ 0 < t < T,$$

$$s_1\alpha_0 + s_2\beta_0 > 0, \quad \alpha_0 > -\frac{s_1\delta_1}{\omega_1^2}.$$

Заметим, что в силу линейности минимизация функционала $\tilde{J}$ означает минимизацию функционала J .

Применив к сформулированной задаче (5) принцип максимума Понтрягина [5], получим, что наихудшее возмущение имеет вид $v^0(t) = \delta_1 \cdot sign(s_2\psi_4(t) + s_1\psi_3(t))$, где ψ_4, ψ_3 - сопряженные к $x_4 = \dot{x}_2$, $x_3 = \dot{x}_1$ переменные, являющиеся решением системы:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_4 + \omega_2^2 \psi_4 - 2\rho_2 \dot{\psi}_4 = 0 \\ \ddot{\psi}_3 + \omega_1^2 \psi_3 - 2\rho_1 \dot{\psi}_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

со следующими граничными условиями:

$$\psi_4(T) = \lambda_2, \psi_3(T) = \lambda_1, \dot{\psi}_4(T) = s_2 + 2\rho_2\lambda_2, \ \dot{\psi}_3(T) = s_1 + 2\rho_1\lambda_1, \quad (7)$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа, связанные условием стационарности: $0 = -\omega_2^2 \lambda_2 x_2(T) - \omega_1^2 \lambda_1 x_1(T) + |\lambda_2 s_2 + \lambda_1 s_1| \delta_1$.

Среди всех возможных значений λ_1, λ_2 рассмотрим простой случай: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

Введя функцию P в обратном времени $\tau = T - t$: $P(\tau) = s_2\psi_4(\tau) + s_1\psi_3(\tau)$, можно показать, что наихудшее возмущение равняется $v^0(\tau) = \delta_1 \cdot sign(P(\tau)) = -\delta_1$ при $0 < \tau < \tau_1$.

Выписав в явном виде решение краевой задачи (6–7), получим, что первый момент времени $\tau_1 > 0$, в котором $P(\tau_1) = 0$, есть $\tau_1 = \pi/\omega_{11}$, который соответствует $T = \pi/\omega_{11}$. Далее выписав решение прямой системы при $0 \le t \le \pi/\omega_{11}$, можно убедиться, что $v^0(t) = \delta_1 \cdot sign(P(t)) = \delta_1 \cdot sign(\dot{x}_1(t))$,

Таким образом, $v^0 = \delta_1 \cdot sign(\dot{x}_1)$ может являться решением поставленной задачи о максимальном отклонении (5). Для того, чтобы точно решить задачу о максимальном отклонении, нужно перебрать все возможные пары λ_1, λ_2 множителей Лагранжа, что весьма сложно.

4. Теперь рассмотрим поведение системы (4) при действии найденного возмущения v^0 . При рассматриваемом возмущении система является полусвязанной:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 2\rho_2 \dot{x}_2 = s_2 \delta_1 \cdot sign(\dot{x}_1) \\ \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + 2\rho_1 \dot{x}_1 = s_1 \delta_1 \cdot sign(\dot{x}_1) \end{cases}. \qquad (8)$$

Система (8) легко интегрируется на интервалах знакопостоянства $\dot{x}_1$. Последовательно решая дифференциальные уравнения и согласуя значения координат и скоростей на границах интервалов, можно получить функцию последования на секущей двумерной полуплоскости $M = \{\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_1 > 0\}$:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cdot k_{11}{}^2 + \frac{s_1\delta_1}{\omega_1{}^2}(k_{11}+1)^2, \text{ где } k_{11} = \exp(-\rho_1 \frac{\pi}{\omega_{11}}) \text{ – для координаты } x_1;$$

$$\beta_1 = \beta_0 \cdot k_{12}{}^2 + \frac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2}(k_{12}+(-1)^{k+1})^2, \text{ где } k_{12} = \exp(-\rho_2 \frac{\pi}{\omega_{11}}) \text{ – для координаты } x_2.$$

Здесь (α_0, β_0) - начальные условия, взятые на секущей поверхности M , а (α_1, β_1) - первая точка пересечения секущей полуплоскости фазовой траекторией при $t > 0$.

Так как $|k_{11}| < 1$, $|k_{12}| < 1$, то полученное точечное отображение $(\alpha_0, \beta_0) \mapsto (\alpha_1, \beta_1)$ является сжимающим, а значит, у него существует единственная неподвижная точка (α_*, β_*):

$$\alpha_* = \frac{s_1\delta_1}{\omega_1{}^2} \cdot \frac{(1+k_{11})}{(1-k_{11})} \quad , \qquad (9)$$

$$
\beta_* = \begin{cases} \dfrac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2}\dfrac{(1+k_{12})}{(1-k_{12})}, & k\text{ - нечетное,} \\ \\ \dfrac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2}\dfrac{(1-k_{12})}{(1+k_{12})}, & k\text{ - четное} \end{cases} \qquad (10)
$$

Таким образом, в четырехмерном фазовом пространстве имеется замкнутая траектория, являющаяся предельным циклом, который асимптотически орбитально устойчив [6].

Параметрические уравнения предельного цикла в четырехмерном пространстве имеют вид:

$$
\begin{cases} x_1(t) = \pm[(\alpha_* + \dfrac{s_1\delta_1}{\omega_1{}^2})\cdot e^{-\rho_1 t}\cdot(\cos(\omega_{11}t) + \dfrac{\rho_1}{\omega_{11}}\sin(\omega_{11}t)) - \dfrac{s_1\delta_1}{\omega_1{}^2}] \\ \dot{x}_1(t) = \pm[-(\alpha_* + \dfrac{s_1\delta_1}{\omega_1{}^2})\cdot e^{-\rho_1 t}\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_{11}}\cdot\sin(\omega_{11}t)] \\ x_2(t) = \pm[(\beta_* + \dfrac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2})\cdot e^{-\rho_2 t}\cdot(\cos(\omega_{22}t) + \dfrac{\rho_2}{\omega_{22}}\sin(\omega_{22}t)) - \dfrac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2}] \\ \dot{x}_2(t) = \pm[-(\beta_* + \dfrac{s_2\delta_1}{\omega_2{}^2})\cdot e^{-\rho_2 t}\dfrac{\omega_2{}^2}{\omega_{22}}\cdot\sin(\omega_{22}t)] \end{cases}, \text{ где } 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega_{11}}
$$

Как видно, проекция предельного цикла на плоскость x_1, x_2 является симметричной относительно точки $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, а проекция предельного цикла на плоскость x_3, x_4 является симметричной относительно точки $(x_3 = 0, x_4 = 0)$.

Достижимая прямая l^0, лежащая на двумерной секущей поверхности M, проходит через начало координат и имеет вид $\{x_2 = Kx_1, x_3 = 0, x_4 = 0\}$, где коэффициент наклона $K = \frac{\beta_*}{\alpha_*}$. Начав свое движение с l^0, система снова возвращается на нее за конечное время T.

Заметим, что предельный цикл имеет место в системе четвертого порядка (8) даже, если ограничения $|s_1/s_2| > 1, \rho_2 > \rho_1$ не выполняются.

5. Ниже приведены результаты численного моделирования. В качестве значений параметров системы были взяты следующие значения:

$$
\begin{aligned}
& m_1 = 0.35\,\text{кг},\ \ m_2 = 0.15\,\text{кг},\ \ m_m^1 = 0.3\,\text{кг},\ \ m_{pl} = 0.1\,\text{кг}, \\
& l_1 = 0.4\,\text{м},\ \ l_2 = 0.3\,\text{м}, \\
& R = 2.5\,\text{Ом},\ \ C = 0.52\,\text{Н}\cdot\text{м/А},\ \ c_m = 0.052\,\text{Н}\cdot\text{м/А}, \\
& \delta_1 = 0.005\,\text{м/с}^2
\end{aligned}
$$

Выбор коэффициентов обратной связи управляющих сигналов моторов, равными $K_{11} = -250.72\,\text{В},\ K_{22} = -102.34\,\text{В}$, позволяет получить в системе собственные частоты: $\omega_1 = 0.47$ Гц, $\omega_2 = 6 * 0.47 =\ 2.82$ Гц.

Графики изменения «нормальных» координат x_1 и x_2 от времени приведены на Рис.2, Рис.3. На Рис.4 представлена проекция предельного цикла на плоскость $\{x_1, x_2\}$. На Рис.5 показано поведение исходных координат φ_1, φ_2 от времени.

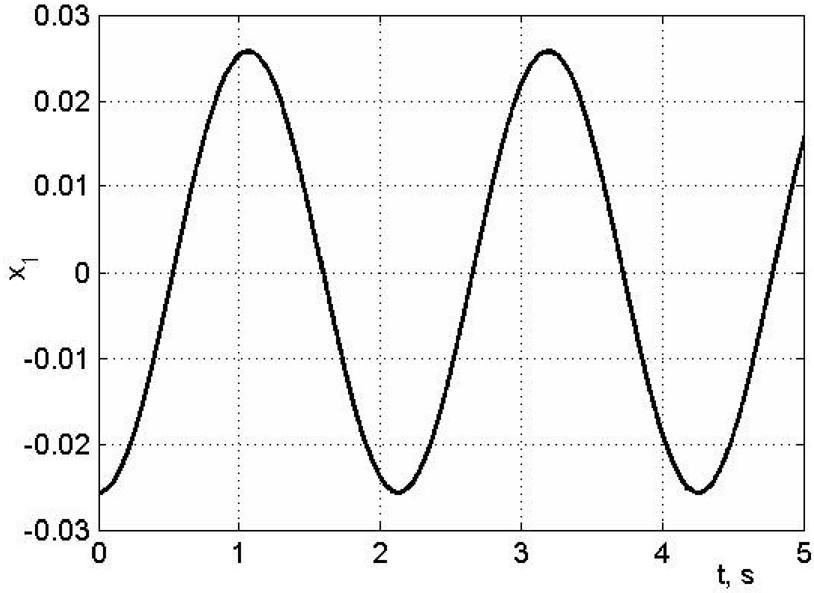

Рис.2. График изменения координаты x_1 от времени.

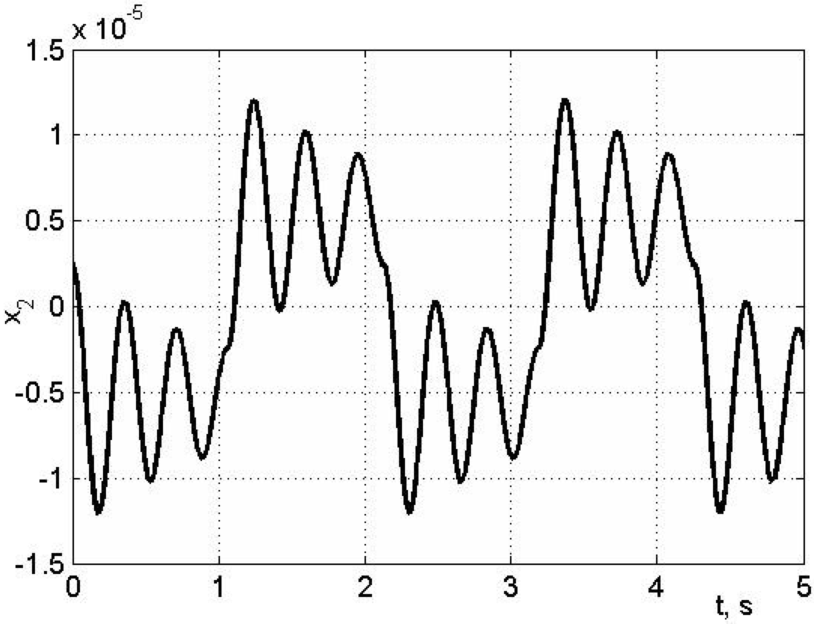

Рис.3 График изменения координаты x_2 от времени.

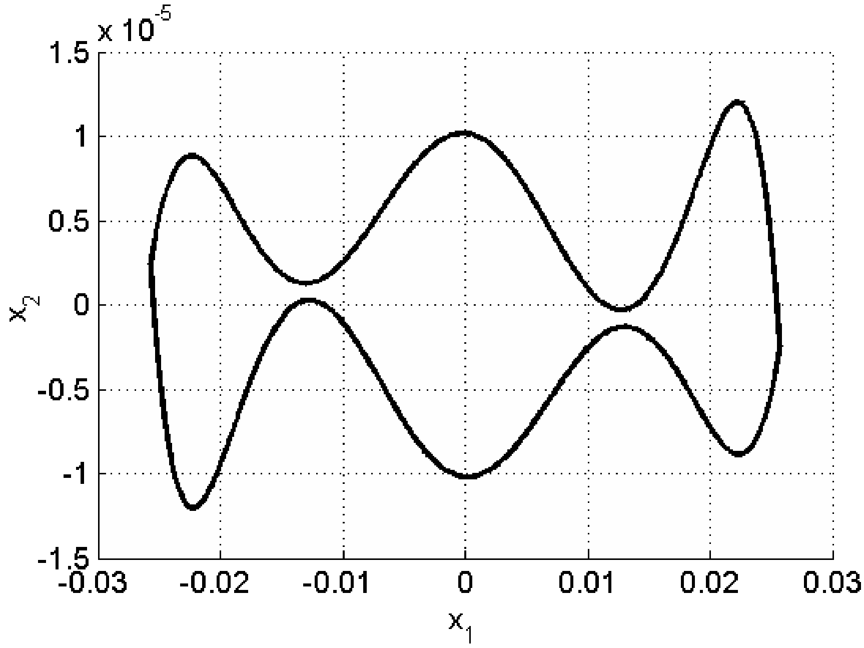

Рис.4. Проекция предельного цикла на плоскость $\{x_1, x_2\}$.

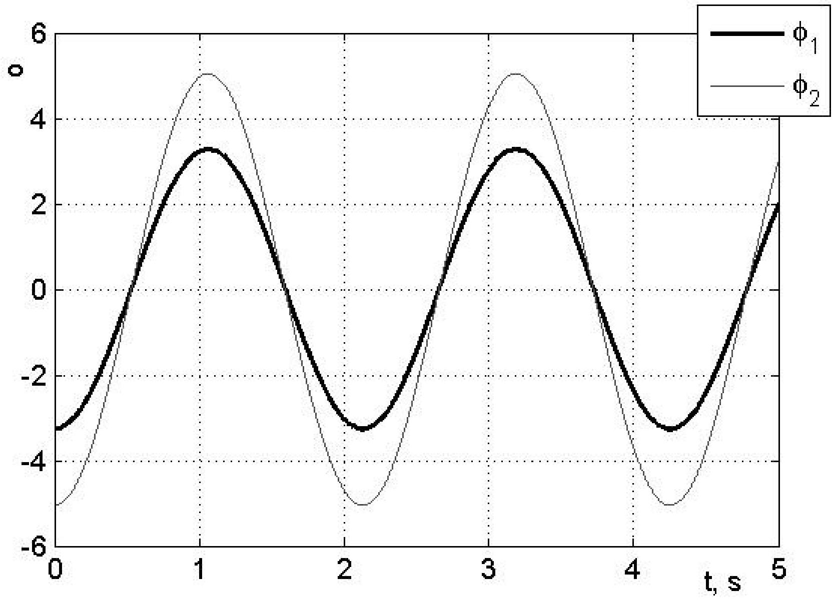

Рис.5. График изменения координат φ_1 , φ_2 (в градусах).

5. Заключение.

В статье показана потенциальная возможность организации автоколебаний двухзвенного маятника с использованием информации об угловой скорости. При этом в системе четвертого порядка с использованием функции последования построен предельный цикл, который является асимптотически орбитально устойчивым. Полученный результат является весьма интересным, так как конкретных примеров построения предельных циклов в системах размерности больше два в литературе встречается мало [2].

Полученные в системе четвертого порядка автоколебания могут являться максимальными, то есть полученный предельный цикл может представлять собой границы множества достижимости для центра масс системы. Заметим, что использование принципа максимума в аналогичных задачах при ограниченных внешних возмущениях часто дает в качестве наихудшего возмущения кусочно-постоянную функцию от координат и позволяет построить в системе предельный цикл, как например, в классической задаче Булгакова для колебательной системы второго порядка [7].

Работы выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-31285.

Библиографический список

1.Александров В.В., Рейес-Ромеро М., Сидоренко Г.Ю., Темолтзи-Ауила Р. Устойчивость управляемого перевернутого маятника при постоянно действующих горизонтальных возмущениях точки опоры// МТТ, №2, 2010, с. 41-48.

2.Сидоренко Г.Ю., Александров В.В. Робастная устойчивость управляемых систем// Труды X международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление". Том 2, 2012. с. 42-52.

3.Садовничий В.А., Александров В.В., Александрова Т.Б., Бугров Д.И., Сидоренко Г.Ю., Сото Э., Шуленина Н.Э., Вега Р., Санчез Г., Рейес Ромеро М. Патент РФ №2379007. Мобильный имитатор вертикальной позы для разработки и тестирования вестибулярных протезов. Дата публикации 20.01.2010.

4.Садовничий В.А., Александров В.В., Александрова Т.Б., Вега Р., Сидоренко Г.Ю., Сото Э., Шуленина Н.Э. Динамическая имитация стабилизации и потери вертикальной позы и тестирование прототипов вестибулярного протеза// Современные проблемы математики и механики. Т.1, прикладные исследования, вып. 1., 2009. с. 154-164.

5.Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимизация динамики управляемых систем// М.: Изд-во МГУ, 2000, 304 с.

6.Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний// М: Наука, 1972, 472 с.

7.Жермоленко В.Н. К задаче Б.В.Булгакова о максимальном отклонении колебательной системы второго порядка// Вестн. Моск. ун-та., сер.1, математика, механика, № 2, 1980, с. 87-91.