

Труды МАИ. 2023. № 133
Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья
УДК 533.6:51-7

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177660>

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОФИЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА PGT

Александр Александрович Никольский

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е.
Жуковского, ЦАГИ,
Жуковский, Московская область, Россия

anikolskii@mail.ru

Аннотация. Предложен метод эффективного приближенного решения обратной задачи для профиля в вязком потоке, основанный на коррекции эквивалентной невязкой циркуляции и генерирующих функциях метода PGT (Parent function Generating function Transformation). Расчет обтекания профиля выполняется на основе решателя высокого уровня, а коррекция геометрии осуществляется на основе решения хорошо поставленной обратной задачи (ОЗ) для уравнения полного потенциала. Алгоритм реализации условий разрешимости обратной задачи позволяет получать распределения давления близкие к целевому распределению давления по верхнему контуру профиля с использованием корректирующей функции получаемой на основе метода наименьших квадратов.

На примере профиля NACA-23012 проведена верификация метода решения вязкой обратной задачи (ВОЗ), показана возможность восстановления контура профиля, по заданному на нем распределению давления.

Приведен демонстрационный пример, показывающий возможность улучшения аэродинамических характеристик многорежимного профиля на основе решения ВОЗ.

Ключевые слова: метод PGT, аэродинамическое проектирование, аэродинамические профили, обратная задача, распределение давления

Для цитирования: Никольский А.А. Численное решение обратной задачи профиля с использованием метода PGT // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177660>

Original article

NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE AIRFOIL PROBLEM USING THE PGT TECHNIQUE

Alexander A. Nikolsky

Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky, TsAGI, Zhukovsky, Moscow Region, Russia

anikolskii@mail.ru

Abstract. The purpose of the presented work consists in creating an effective method for the viscous inverse problem numerical solution based on a substantiated airfoil geometry

corrector, PGT (Parent function Generating function Transformation) technique developed earlier and the concept of effective non-viscous circulation for the airfoil viscous flow-around. The possibility of this method application for the integral aerodynamic characteristics improving of the multi-mode profiles was studied additionally.

Universal model, allowing developing arbitrary profile, consisted of the functions generating the aerodynamic airfoil contour based on the universal parental function and two parameters, was developed earlier based on the PGT method for the aerodynamic design tasks. The PGT method distinctive feature is the fact that generating functions increase monotonically from 0 to 1 on the $[0, 1]$ segment. The presented work employs this universal model for mathematical representation of the velocity circulation distribution around the airfoil contour. The model allowed solution efficiency increasing of a well-posed inverse problem for the full potential equation. The same model was employed for setting and solving the inverse problem for the profile in a viscous flow as well. Verification of the viscous inverse problem solution was performed on the example of the NACA-23012 profile. The examples of the profile contour resurrection by the pressure distribution in it for several flow-around modes were presented.

The article presents demonstration example, which reveals the possibility of the multi-mode airfoil aerodynamic characteristics improving based on the inverse viscous problem solution.

The author shows that well-posed non-viscous inverse problem solving method application as a corrector allows realizing pressure distribution along the upper contour of the airfoil practically coinciding with the target one.

The presented study revealed that the original mathematical model based on the PGT method and application of the concept of effective non-viscous circulation allows creating an effective method for a viscous inverse problem solving and efficiency improving of the method for the well-posed non-viscous inverse problem solving.

Keywords: PGT technique, aerodynamic design, airfoil, inverse problem, pressure distribution

For citation: Nikolsky A.A. Numerical solution of the inverse airfoil problem using the PGT technique. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177660>

Как известно, для потенциальных течений методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между распределением давления и формой контура аэродинамического профиля. Известные в литературе методы [1-3] позволяют находить только приближенное решение обратной задачи в рамках уравнения для полного потенциала (FPE), поскольку в явном виде не используют условия ее разрешимости. Поэтому в ходе приближенного решения обратных задач, вообще говоря, получают распределения давления настолько близкие к целевому распределению, насколько позволяют нарушенные условия разрешимости обратной задачи. Также не известны подходы к решению ОЗ, которые позволяют максимально приблизиться к распределению давления по верхнему контуру профиля, что важно для задач аэродинамического проектирования. Поэтому результат решения обратной задачи такими методами близок к целевому тогда,

когда можно заранее предположить, что условия разрешимости нарушены слабо. Это означает, что целевое распределение давления должно быть задано малой вариацией распределения давления, полученного из решения прямой задачи.

В работах [4, 5] условия разрешимости записаны в явном виде, что позволяет использовать их в методе численного решения обратной задачи в рамках уравнения для полного потенциала (ОЗ FPE). Предложенный там алгоритм реализации условий разрешимости позволяет в частности находить такое численное решение ОЗ FPE, которое практически обеспечивает сохранение распределения давления по верхнему контуру профиля.

Для решения обратных задач для вязких течений используют итерационные схемы, в которых последовательно на основе прямого решателя высокого уровня вычисляют отличия текущего и целевого распределений давления. Затем на основе этого отличия выполняется коррекция геометрии и происходит переход к следующей итерации (в зарубежной литературе такие методы называют residual correction [6-10]). Далее для таких методов будем использовать сокращение КГНД (коррекция геометрии на основе невязки давления). Распределения давления вычисляют на основе решателей высокого уровня, в том числе 3-d CFD RANS, а коррекцию геометрии либо на основе приближенного решения обратной задачи низкого уровня [9-10] или на основе дополнительных уравнений с использованием эмпирических параметров [7, 8]. Недостатком известных корректоров геометрии является отсутствие обоснованных алгоритмов выполнения условий разрешимости обратной задачи, в частности замыкание задней кромки осуществляют принудительными методами [10].

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы расширить возможности метода КГНД за счет использования в качестве корректора геометрии хорошо поставленной обратной задачи FPE, в частности, с возможностью дополнительного контроля над целевым распределением давления по верхнему контуру профиля.

Далее, говоря о решении обратной задачи, будем считать, что целевое распределение давления задается в зависимости от длины дуги. В отличие от методов КГНД вместо коррекции геометрии на основе невязки давления будем использовать коррекцию геометрии на основе невязки эквивалентной невязкой циркуляции (КГНЦ).

Постановка и метод решения обратной задачи FPE

Как известно, обратная задача для произвольно заданного распределения давления по контуру профиля, вообще говоря, некорректна в том, что:

- число Маха заранее не известно и должно быть найдено в процессе ее решения (первое условие разрешимости);
- в результате решения может быть получен сильно разомкнутый или самопересекающийся (двулистный) контур профиля.

Поэтому в процессе решения для разрешимости ОЗ необходимо тем или иным образом корректировать исходное распределение давления. Далее под решением ОЗ понимаем нахождение такого контура профиля, распределение давления по длине дуги которого несколько отличается от исходного, но наиболее близко к нему в смысле метода наименьших квадратов. Как и в работе Лайтхилла [11], для формулировки обратной задачи используем аппарат теории функций комплексного

переменного ТФКП. Выполним конформное отображение внешности профиля в физической плоскости z на внешность единичного круга в расчетной плоскости ζ , следуя работе [12].

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta^2} (1-\zeta)^{1-\varepsilon} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n\right),$$

где θ - полярный угол в плоскости ζ , ε - угол раствора задней кромки (угол между касательными к верхнему и нижнему контуру) профиля выраженный в долях π , $c_n = a_n + ib_n$.

Известно, что для потенциальных течений модуль отображающей функции $H = \frac{ds}{d\theta}$, модуль скорости $u(s)$ в плоскости z и модуль скорости $u(\theta)$ в плоскости ζ связаны следующим, определяющим для постановки и решения обратной задачи соотношением:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{u(\theta)}{u(s)}, \quad (1)$$

Методы ТФКП позволяют определить интегральные условия разрешимости обратной задачи, которые для случая линейных потенциальных течений традиционно записывают для скорости $u(s)$. В работах [4, 5] предложена альтернативная форма их записи, справедливая для общего случая нелинейных потенциальных течений:

$$\int_0^{2\pi} \ln H d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \ln H \sin(\theta) d\theta = 0. \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln H \cos(\theta) d\theta = c_{te}.$$

Здесь $c_{te} = (1 - \varepsilon) - \frac{\Delta y_{te}}{2\pi}$, Δy_{te} - толщина задней кромки, отнесенная к хорде профиля.

В отличие от формы записи Лайтхилла, условия (2) имеют то преимущество, что они сформулированы для функции H , взаимно-однозначно определяющей форму контура профиля. Это позволяет применить их и к нелинейному случаю, когда скорость $u(\theta)$ заранее неизвестна. В процессе решения ОЗ вводим корректирующую функцию g . Переход от неразрешимой функции H_0 к разрешимой функции H выполним по формуле:

$$H = H_0 \exp g. \quad (3)$$

Подставляя (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g d\theta &= - \int_0^{2\pi} \ln H_0 d\theta = -a_0 2\pi \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} g \cos \theta d\theta &= - \int_0^{2\pi} \ln H_0 \cos \theta d\theta = -(a_1 - c_{te})\pi \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} g \sin \theta d\theta &= - \int_0^{2\pi} \ln H_0 \sin \theta d\theta = -b_1\pi \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a_0 , a_1 , b_1 - коэффициенты в разложении в ряд Фурье для функции H_0 .

Система уравнений (4) имеет следующее точное решение:

$$g = -a_0 - (a_1 - c_{te}) \cos \theta - b_1 \sin \theta. \quad (5)$$

Для линейных потенциальных течений соотношение (5) позволяет свести решение обратной задачи к квадратурам, а координаты профиля найти в параметрическом виде $x(\theta)$, $y(\theta)$.

Для нелинейных потенциальных течений численное решение ОЗ находим методом последовательных приближений на основе метода решения прямой задачи [4, 5], начиная с некоторого начального контура профиля.

После определенного цикла итераций прямого метода из уравнения (1) определяем функцию H_0 , по соотношениям (3-5) определяем H и переходим к следующему циклу итераций. Существенен тот факт, что величина угла атаки в прямом расчете заранее неизвестна и определяется в процессе решения из условия Жуковского по заданной величине параметра $\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\min}}$ - отношения полной циркуляции по контуру профиля к циркуляции по нижнему контуру от задней кромки до точки торможения.

Важным классом решений ОЗ являются такие решения, когда распределение давления по верхнему контуру остается максимально близким к целевому, а диапазон модификации соответствует нижнему контуру, $0 \leq \theta \leq \theta_*$, где θ_* - задает интервал зоны коррекции.

В этом случае функцию g представим в виде конечного ряда Фурье, а решение системы уравнений (4) ищем методом наименьших квадратов:

$$\int_0^{\theta_*} g^2 d\theta + \lambda_1 g(0) + \lambda_2 g' (0) + \lambda_3 \left(\int_0^{\theta_*} g \sin \theta d\theta + b_1 \pi \right) + \lambda_4 \left[\int_0^{\theta_*} g \cos \theta d\theta + (a_1 - c_{11}) / \pi \right] = \min$$

Задача сводится [4] к решению системы двух линейных уравнений относительно множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_4$. Коэффициенты Фурье в разложении функции g выражаются через множители Лагранжа.

Алгоритм численного решения обратной задачи в целом подобен алгоритму решения прямой задачи. Отличие заключается в том, что при решении прямой задачи задается угол атаки, а при решении обратной задачи - параметр γ . Кроме того через некоторое число итераций решается уравнение (1) и коэффициенты уравнений, зависящие от функции H , обновляются. Это позволяет использовать универсальный решатель FPE для решения, как прямой задачи, так и обратной задачи изменяя один управляющий параметр.

Как только скорость на k -й итерации в расчетной плоскости $u(\theta)$ известна, решение уравнения (1) сводится к квадратурам:

$$\int_0^s u(s) ds = \int_0^\theta u_k(\theta) d\theta.$$

После интегрирования получаем нелинейное алгебраическое уравнение для циркуляций:

$$\Gamma(s) = G_k(\theta) \tag{6}$$

Необходимое условие существования решения уравнения (6) есть

$$\gamma = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\min}} = \frac{G_0}{G_{\min}}, \text{ где } \Gamma_0 = \int_0^{s_0} u(s) ds, \quad \Gamma_{\min} = \int_0^{s_*} u(s) ds, \quad s_0 - \text{ полная длина дуги контура}$$

профиля, s_* - длина дуги от задней кромки до точки торможения. Параметр γ

известен, поэтому для определения угла атаки в процессе решения используем

$$\text{соотношение } \frac{G_0}{G_{\min}} = \gamma.$$

Для решения уравнения (6) необходимо использовать ту или иную аналитическую аппроксимацию функции Γ и, как показали численные эксперименты, это существенно влияет на точность и скорость сходимости численного метода. В частности при наличии в течение скачков уплотнения для обеспечения необходимой гладкости функции $\frac{ds}{d\theta}$ необходимо ее сглаживание [4]. В данной работе для решения уравнения (6) используем метод PGT (Parent function Generating function Transformation), обеспечивающий необходимую гладкость функции $\frac{ds}{d\theta}$ и значительно улучшающий сходимость численного метода.

Краткое описание метода PGT

Метод PGT был использован в работах [13-14] для генерации класса функций имеющих один экстремум и монотонных до и после него на основе родительской функции и генерирующих функций, обладающих важным свойством монотонного изменения от 0 до 1 на интервале $[0,1]$.

Функции Γ и G представим в виде $\Gamma(\bar{s}) = -\Gamma_{\min} f_1(\bar{s})$, $G(\bar{\theta}) = -G_{\min} f_2(\bar{\theta})$. Здесь введены масштабированные переменные $\bar{s} = s/s_0$, $\bar{\theta} = \theta/2\pi$ и функции формы $f_1(\bar{s})$, $f_2(\bar{\theta})$.

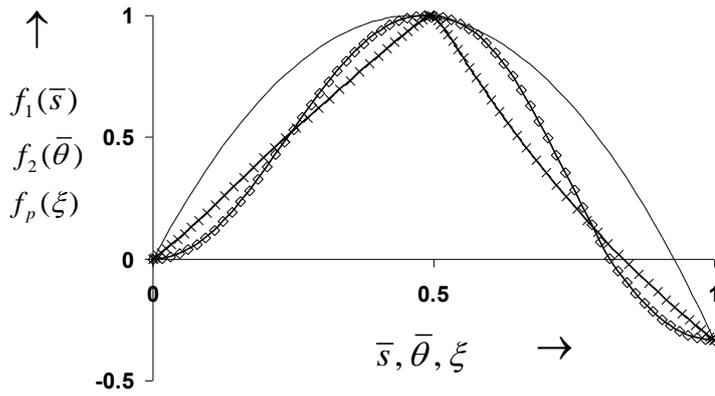


Рисунок 1 Функции формы и родительская функция

Очевидно, что функции формы принадлежат рассматриваемому классу. Это позволяет поставить им в соответствие родительскую функцию $f_p = 4 \xi a_\gamma (1 - a_\gamma \xi)$, где $a_\gamma = (1 + \sqrt{1 - \Gamma_0 / \Gamma_{\min}}) / 2$, множество значений которой упорядочены так же, как и у функций формы, рисунок 1.

Генерирующие функции находим из соотношений $f_s(\bar{s}) = f_p(\xi_s)$ и $f_\theta(\bar{\theta}) = f_p(\xi_\theta)$:

$$\xi_s(\bar{s}) = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - f_s})^2}{2a_\gamma}, \quad \xi_\theta(\bar{\theta}) = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - f_\theta})^2}{2a_{1\gamma}}. \quad (7)$$

На рисунке 2 показаны генерирующие функции и искомая обратная функция $\bar{s}(\xi_s)$.

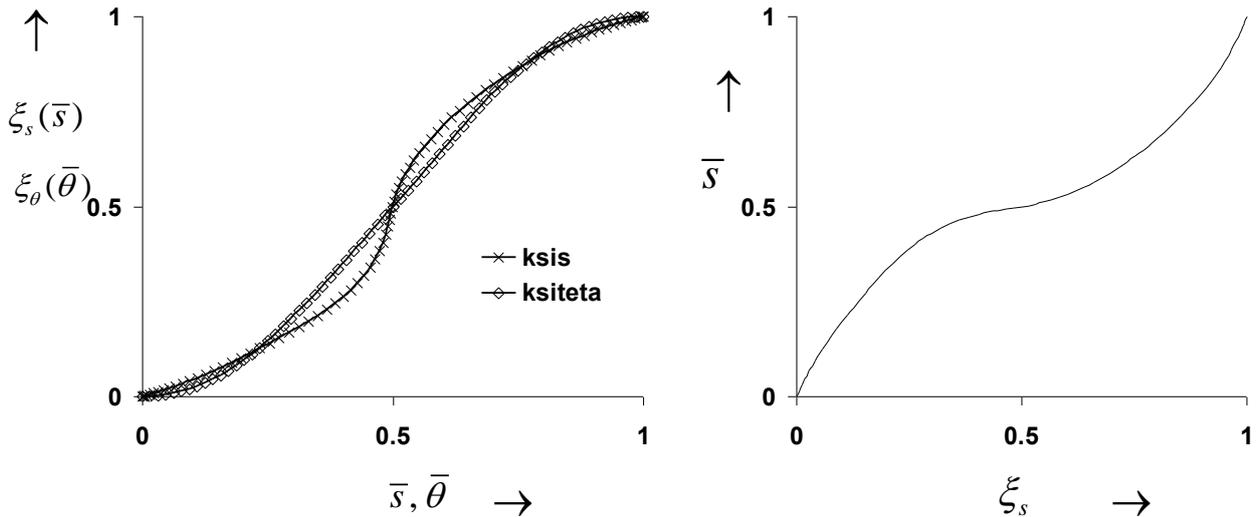


Рисунок 2

Теперь для нахождения искомой зависимости $s(\theta)$ достаточно осуществить сплайн интерполяцию функции $\bar{s}(\xi_s)$ в точках $\xi_i = \xi_{\theta i}$. Таким образом, решение нелинейного уравнения (6) сведено к решению квадратных уравнений (7) и последующей сплайн-интерполяции.

Такой метод кроме простоты его реализации обеспечивает необходимую гладкость функции $\frac{ds}{d\theta}$ без дополнительного ее сглаживания, что заметно улучшает сходимость итераций и точность решения ОЗ, особенно на трансзвуковых режимах обтекания.

Сравнение с методом приближенного решения ОЗ FPE

Рассмотрим отличие методов решения обратной задачи FPE. В методе [10] схема приближенного решения обратной задачи FPE выполняется с помощью привлечения следующих расчетных блоков. Прямой решатель FPE, приближенный

обратный решатель для несжимаемых течений, приближенный решатель Дэвиса [6] для коррекции геометрии с учетом сжимаемости. При этом вместо 3-х условий разрешимости используется принудительное замыкание задней кромки. В настоящем методе решается хорошо поставленная обратная задача. При этом вместо громоздкой схемы корректора используется только прямой решатель FPE, работающий в режиме решения обратной задачи, а алгоритм ее решения позволяет максимально приблизиться к распределению давления по верхнему контуру профиля.

Приближенное решение ОЗ для профиля в вязком потоке (ВОЗ)

В развиваемом далее методе распределению давления, рассчитанному решателем высокого уровня, также, как и решателем FPE ставим в соответствие целевое распределение эквивалентной невязкой циркуляции, которую находим по формулам для изоэнтропического газа.

От целевого распределения давления $C_{pT}(s)$ по формулам для изоэнтропического газа переходим к целевой невязкой циркуляции

$\Gamma_T(s) = -\Gamma_{\min T} f_T(\bar{s})$ и генерирующей ее целевой функции $\xi_T(\bar{s}) = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - f_T})^2}{2a_{\gamma T}}$, где

$$a_{\gamma T} = (1 + \sqrt{1 - \gamma_T}) / 2, \quad \gamma_T = \Gamma_{0T} / \Gamma_{\min T}.$$

Начальный контур профиля и угол атаки находим решая ОЗ FPE для целевой генерирующей функции $\xi_T(\bar{s})$ и параметрами $\Gamma_{\min T}$ и Γ_{0T} .

В свою очередь, как и при решении обратной задачи FPE, распределению циркуляции ставим в соответствие генерирующую функцию и параметры Γ_0 и Γ_{\min} .

Введем обозначения: $C_{pv}^k(s)$ - распределение коэффициента давления полученное на k -й итерации решателем высокого уровня, $C_{pf}^k(s)$ - распределение, полученное на основе ОЗ FPE. Здесь и далее индекс v относится к величинам, полученным на основе решателя высокого уровня, индекс f - к величинам формирующим данные для решения ОЗ FPE.

Итерационный метод решения ВОЗ сводим к следующей последовательности действий:

1. Решателем высокого уровня рассчитываем $C_{pv}^k(s)$ и определяем эквивалентную невязкую циркуляцию $\Gamma_v^k(\bar{s}) = \Gamma_{\min v}^k f_v^k(\bar{s})$

2. Вычисляем функцию, генерирующую эквивалентную циркуляцию:

$$\xi_v^k(\bar{s}) = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - f_v^k})}{2a_{\gamma v}^k}, \text{ где } a_{\gamma v}^k = (1 + \sqrt{1 - \gamma_v^k}) / 2, \gamma_v^k = \Gamma_{0v}^k / \Gamma_{\min v}^k$$

3. Вычисляем функцию, генерирующую эквивалентную циркуляцию для решения ОЗ FPE на следующей итерации и параметры циркуляции по формулам:

$$\xi_f^{k+1}(\bar{s}) = \xi_f^k(\bar{s}) + (\xi_v^k(\bar{s}) - \xi_T) \omega$$

$$\Gamma_{\min f}^{k+1} = \Gamma_{\min f}^k + (\Gamma_{\min T}^k - \Gamma_{\min v0}) \omega$$

$$\Gamma_{0f \min}^{k+1} = \Gamma_{0f \min}^k + (\Gamma_{0v \min}^k - \Gamma_{0v0 \min}) \omega, \quad (8)$$

где ω - параметр релаксации, регулирующий процесс сходимости итераций.

4. Решаем задачу ОЗ FPE и переходим к следующей итерации (пункт 1)

Таким образом, процесс решения ВОЗ заключается в попеременном решении прямой задачи высокого уровня и обратной задачи FPE, данные для которой получаются из алгебраических соотношений (8).

Процесс решения заканчивается при достижении заданного уровня среднеквадратичной ошибки $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^L \Delta(C_{pvi}^k - C_{pTi})^2 / L}$, L - число точек на контуре профиля или заданного числа итераций N .

Решатель участвует в схеме решения ВОЗ в качестве черного ящика. Поэтому, для демонстрации возможностей метода, распределения давления будем рассчитывать на основе быстрого вязко-невязкого решателя VISTRAN [15]. Решатель использует определенные критерии для определения точки ламинарно-турбулентного перехода и позволяет рассчитывать обтекания с локальными отрывными зонами. Понятно, что аналогичные результаты могут быть получены и на основе решателя более высокого уровня.

Покажем возможность восстановления контура профиля из решения ВОЗ на примере профиля NASA23012. Рассмотрим три характерных режима обтекания профиля при его функционировании в системе лопасти несущего винта:

$M_\infty=0.6, C_{ya}=0.6, M_\infty=0.8, C_{ya}=0, M_\infty=0.4, C_{ya}=1.4$. Для первых двух режимов результаты решения ВОЗ представлены на рисунках 3- 6.

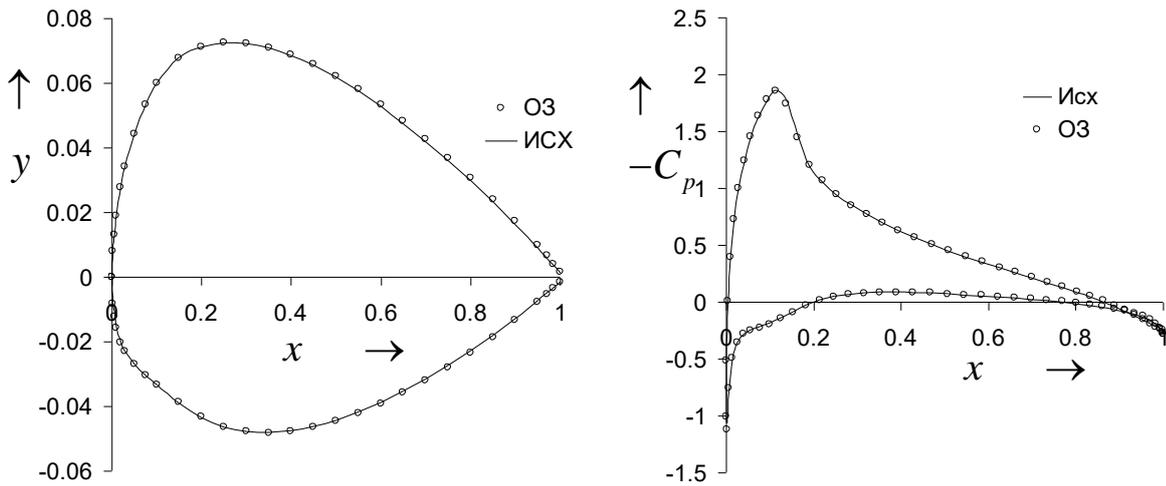


Рисунок 3 Профиль NASA230, $M_\infty=0.6$, $C_{ya}=0.6$: исходный и восстановленный контуры профилей; целевой и восстановленный коэффициенты распределения давления.

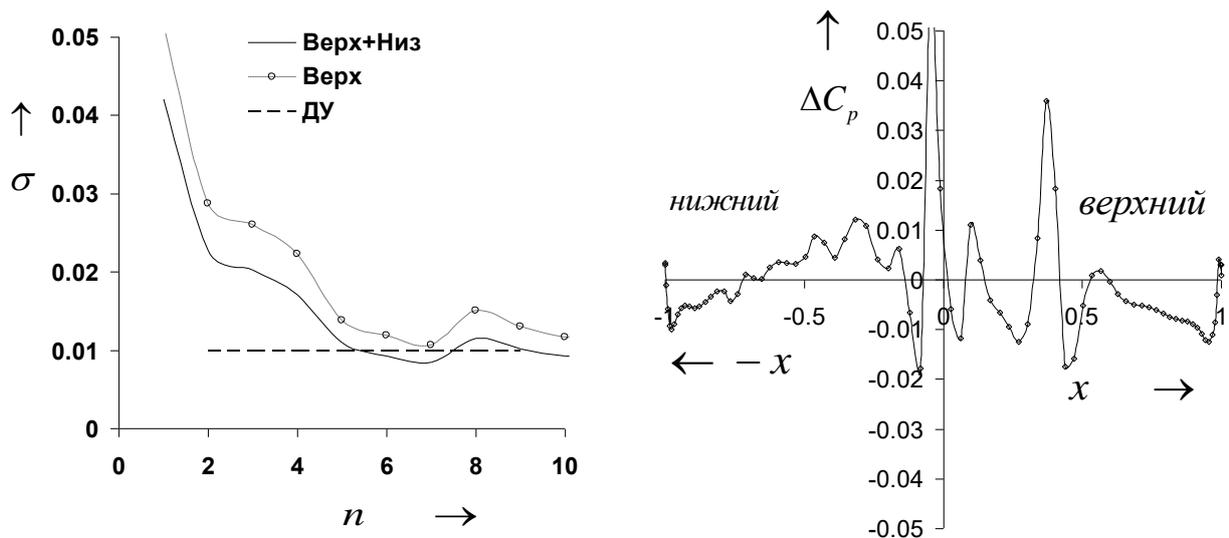


Рисунок 4 Профиль NASA230, $M_\infty=0.6$, $C_{ya}=0.6$: среднеквадратичная ошибка в распределении коэффициента давления по всему контуру (слева); невязка распределений коэффициента давления по нижнему и верхнему контуру (справа)

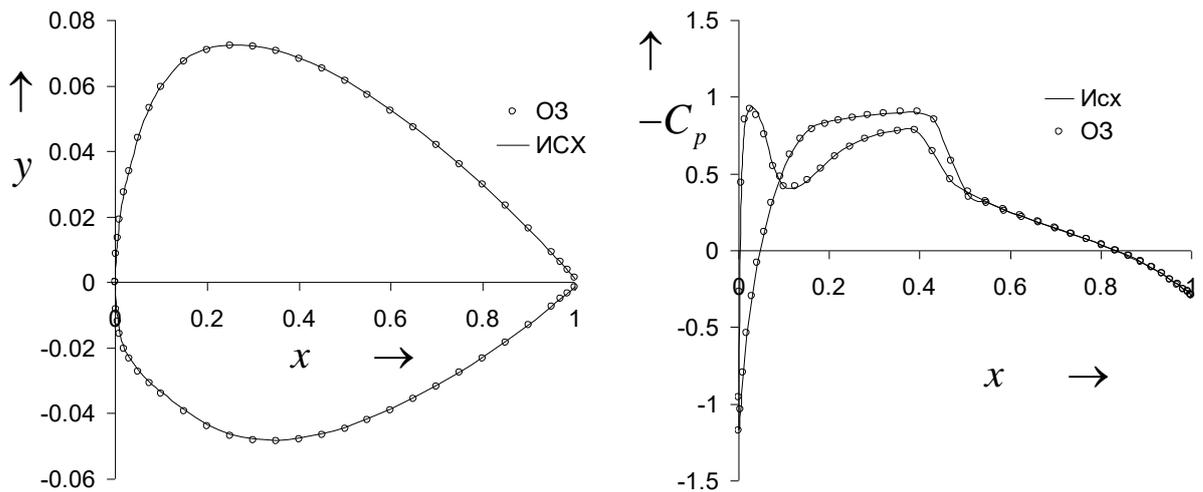


Рисунок 5 Профиль NASA230, $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$: исходный и восстановленный контуры профилей; целевой и восстановленный коэффициенты распределения давления

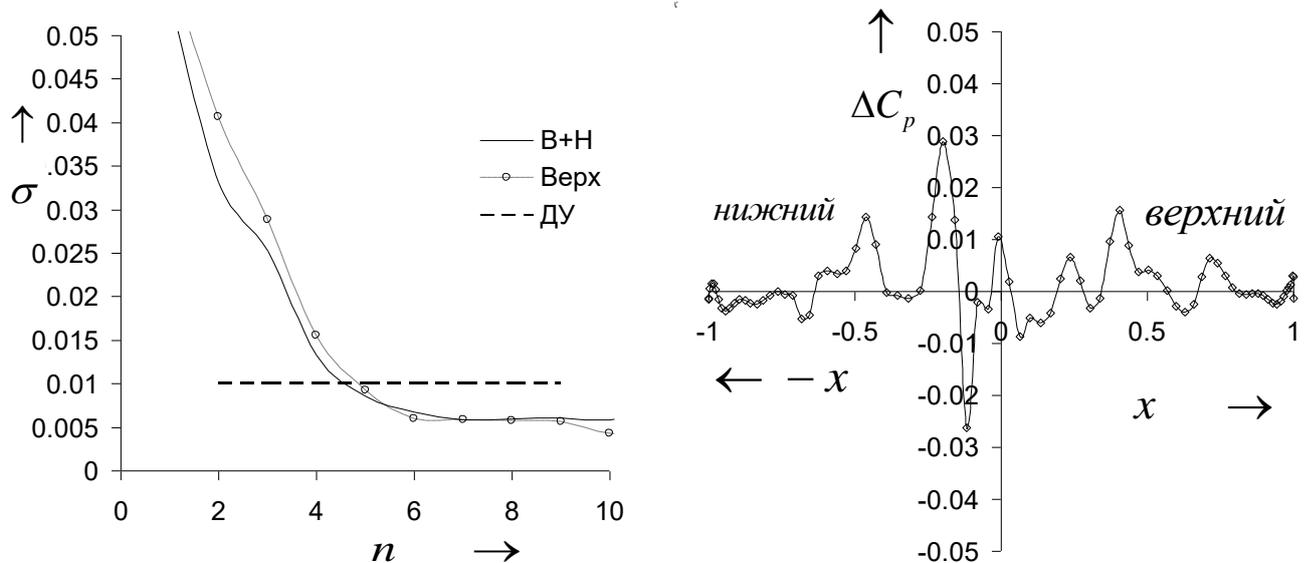


Рисунок 6 Профиль NASA230. $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$: среднеквадратичная ошибка в распределении коэффициента давления по всему контуру (слева); невязка распределений коэффициента давления по нижнему и верхнему контуру

Численный эксперимент показал, что допустимый уровень (ДУ) среднеквадратичной ошибки σ в распределении коэффициента давления C_p ,

позволяющий обеспечить неизменность интегральных аэродинамических характеристик на других характерных режимах составляет $\sigma_0 \approx 0.01$ и достигается за 5-10 больших итераций (вызовов решателя высокого уровня). Наибольшие отклонения достигнутого коэффициента давления от целевого наблюдаются в областях больших градиентов давления, в окрестности точки торможения и в окрестности скачков уплотнения, и являются неизбежным следствием приближенного характера постановки ВОЗ.

Для третьего режима, $M_\infty=0.4$, $C_{ya}=1.4$, результаты решения ВОЗ показали, что допустимый уровень (ДУ) среднеквадратичной ошибки в распределении коэффициента давления превышен, и контур профиля восстановлен быть не может. Это объясняется появлением в течении протяженных отрывных зон и ограничивает область применимости метода.

Для практики наиболее интересна такая модификация исходного C_p , при которой возможно сохранение интегральных аэродинамических характеристик на других характерных режимах. Предположительно таким режимом может быть трансзвуковой режим вблизи критического числа Маха, например $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$.

Изменим коэффициент давления профиля НАСА230-12 на режиме $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$ таким образом, чтобы уменьшить волновое сопротивление профиля, рис. 7. Здесь s/s_0 - отношение длины дуги к полной длине дуги контура профиля. Выбор варианта модификации сделан в демонстрационных целях.

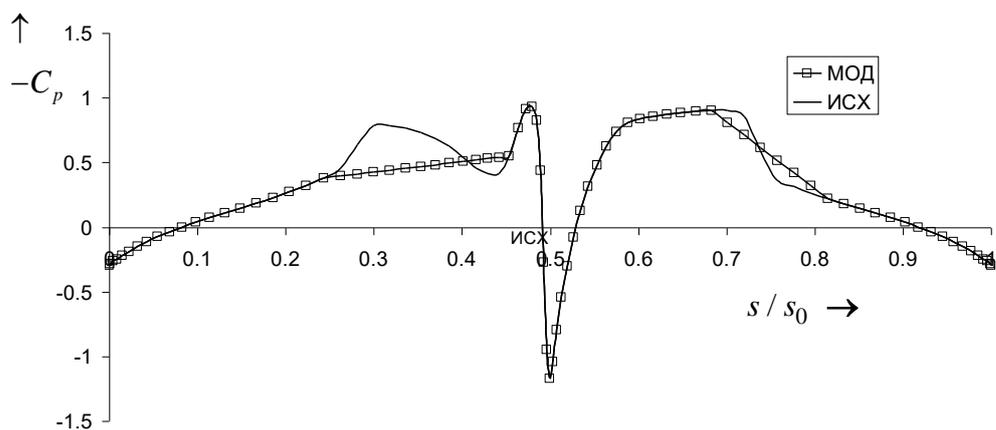


Рисунок 7 Исходный и модифицированный коэффициент давления. $M_\infty=0.8$,

$$C_{ya}=0$$

При решении ВОЗ для реализации условий разрешимости ОЗ рассмотрим три типа корректора геометрии:

- корректор на основе хорошо поставленной ОЗ FPE с коррекцией распределения давления по всему контуру (КОР1);
- корректор на основе хорошо поставленной ОЗ FPE с коррекцией распределения давления по нижнему контуру (КОР2);
- приближенный корректор, в котором условия разрешимости не используются, а контур в процессе итераций замыкается “вручную” добавлением линейной функции к функции определяющей контур профиля (КОР3);

На рисунках 8- 10 показаны исходный и модифицированные контуры профилей и целевой и достигнутые коэффициенты распределения давления, полученные с использованием разных корректоров.

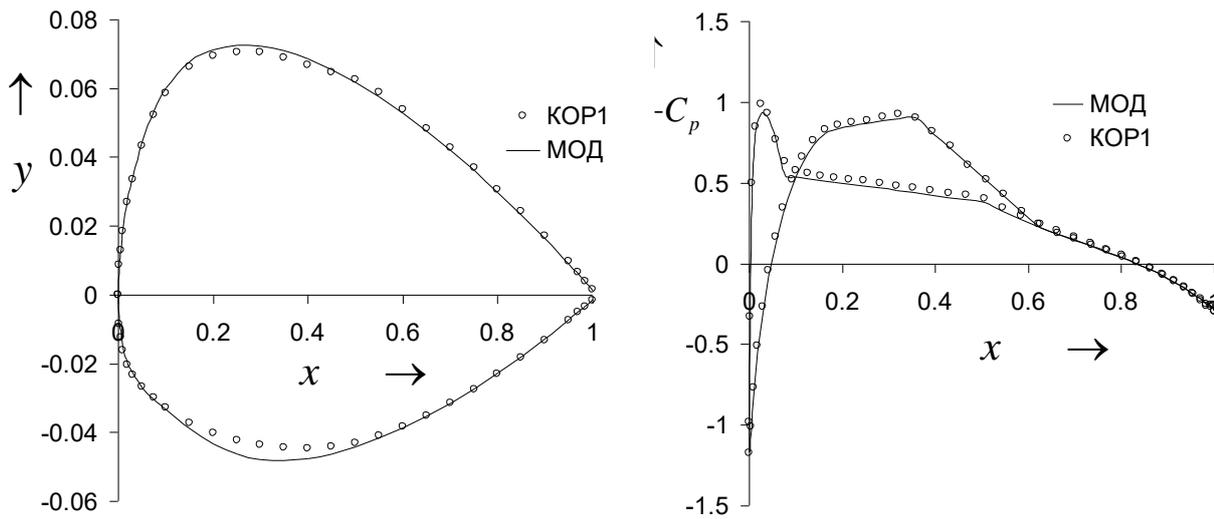


Рисунок 8 Профиль NASA230, $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$: исходный и модифицированный контуры профилей; модифицированный и полученный коэффициенты распределения давления, корректор 1

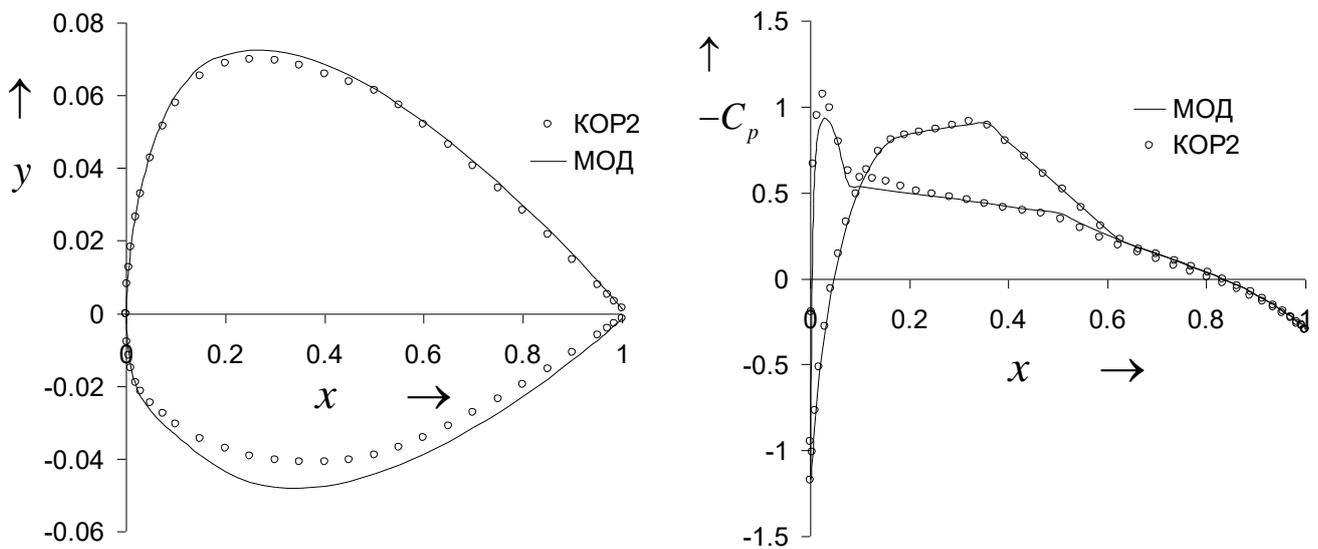


Рисунок 9 Профиль NASA230, $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$: исходный и модифицированный контуры профилей; модифицированный и полученный коэффициенты распределения давления, корректор 2

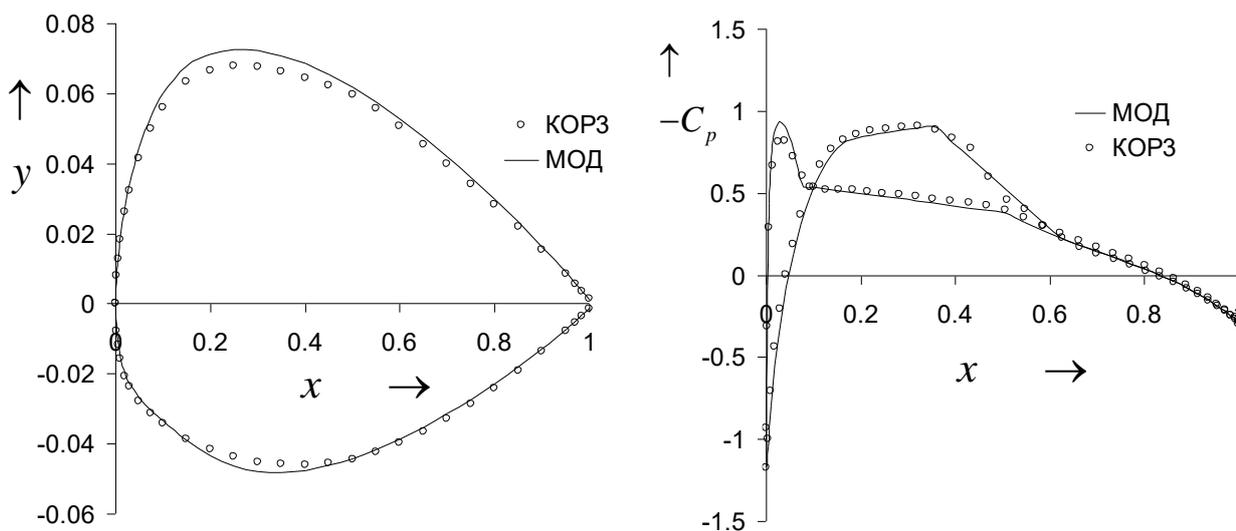


Рисунок 10 Профиль NASA230, $M_\infty=0.8$, $C_{ya}=0$: исходный и модифицированный контуры профилей; модифицированный и полученный коэффициенты распределения давления, корректор 3

Корректор 2, рисунок 9, позволяет и для ВОЗ максимально приблизить итоговое распределение давления по верхнему контуру профиля к целевому.

На рисунке 11 построены зависимости, определяющие интегральные характеристики на других основных режимах обтекания профиля.

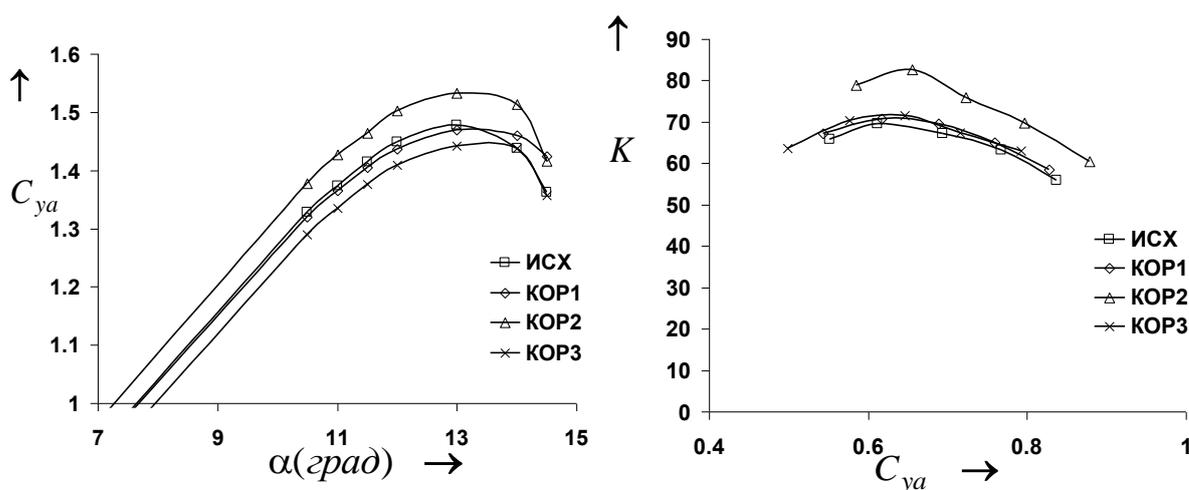


Рисунок 11 Зависимости $C_{ya}(\alpha)$ при $M_\infty=0.4$ (слева) и $K(C_{ya})$ при $M_\infty=0.6$ (справа) для профилей, полученных с использованием разных корректоров

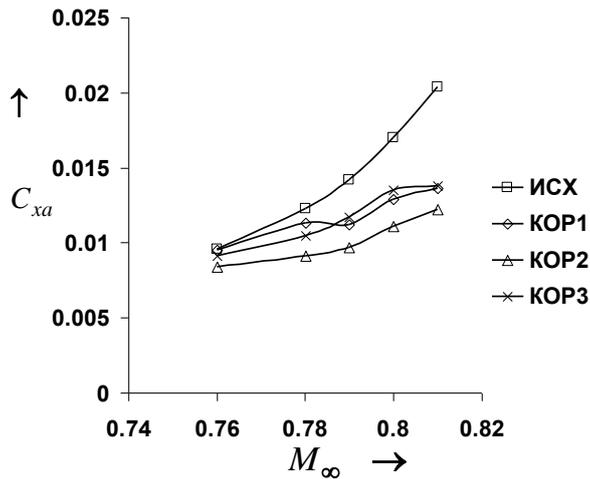


Рисунок 12. Зависимости $C_{xa}(M_\infty)$ для профилей, полученных с использованием разных корректоров.

Расчеты на характерных режимах при $M_\infty=0.4$ и $M_\infty=0.6$, рисунок 11, показали, что корректор 1 имеет преимущество над корректором 3 в том, что позволил сохранить оба исходных уровня величин $C_{ya \max}$ и K_{\max} , а корректор 3 только K_{\max} . Как и следовало ожидать, в результате решения ВОЗ удалось существенно снизить величины коэффициентов сопротивления и критических чисел Маха. На рисунке 12 показано, что корректор 2 позволил и здесь достигнуть наибольшего эффекта.

Корректор 2 показал себя как перспективный инструмент аэродинамического проектирования, позволивший существенно повысить исходные уровни величин $C_{xa}(M_\infty)$, $C_{ya \max}$ и K_{\max} .

Следует заметить, что результаты данной работы дополняют результаты работы [16], в которой величины $C_{ya \max}$ и K_{\max} оптимизировались на основе локальных вариаций коэффициента давления и решения обобщенной обратной

задачи FPE и являются альтернативой методам оптимизации на основе прямых решателей [17-20].

Заключение

Предложен усовершенствованный метод решения обратной задачи FPE, использующий специальный класс функций PGT, генерирующих распределение циркуляции по контуру профиля.

Предложен новый эффективный метод приближенного решения вязкой обратной задачи (ВОЗ), использующий специальный класс функций PGT, генерирующих распределение эквивалентной циркуляции и корректор геометрии, основанный на решении хорошо поставленной обратной задачи FPE.

На примере профиля NASA-23012 проведена верификация метода решения ВОЗ, приведены примеры восстановления контура профиля, по заданному на нем распределению давления, для некоторых режимов обтекания.

Приведен демонстрационный пример, показывающий возможность улучшения аэродинамических характеристик многорежимного профиля на основе решения ВОЗ.

Показано, что применение в качестве корректора при решении ВОЗ метода решения хорошо поставленной ОЗ FPE позволяет реализовать распределение давления по верхнему контуру профиля практически совпадающее с целевым распределением давления.

В отличие от методов КГНД метод КГНЦ избавляет от необходимости использовать дополнительное сглаживание геометрии профиля.

Список источников

1. McFadden G.B. An Artificial Viscosity Method for the Design of Supercritical Airfoils. New York University Report COO-3077-158, 1979.
2. Volpe G., Melnik R.E. The Design of Transonic Aerofoils by a Well Posed Inverse Method // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, vol. 22, pp. 341-361. DOI:[10.1002/NME.1620220205](https://doi.org/10.1002/NME.1620220205)
3. Шагаев А.А. Определение формы профиля по заданной хордовой диаграмме чисел Маха в трансзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 4. С. 15-23.
4. Nikolsky A.A. Some aspects of helicopter airfoil design // Proceedings of the Twenty first European Rotorcraft Forum, Saint- Peterburg, 1995, Paper, no. 17 (II), pp. 1-8.
5. Nikolsky A.A. Generalized inverse airfoil problem // Tsagi Science Journal, 2012, vol. 43, no. 6, pp. 775-786. DOI:[10.1615/TSAGISCIJ.2013007253](https://doi.org/10.1615/TSAGISCIJ.2013007253)
6. Davis V.M. Technique for developing design tools from the analysis methods of computational aerodynamics // AIAA paper, 1979, no. 1529. DOI:[10.2514/3.50857](https://doi.org/10.2514/3.50857)
7. Hirose N., Takanashi S., Kawai N. Transonic airfoil design procedure utilizing a Navier-Stokes analysis code // AIAA Journal, 1987, vol. 25, no. 3, pp. 353-359. DOI:[10.2514/3.9629](https://doi.org/10.2514/3.9629)
8. Mani K.K. Design Using Euler Equation // AIAA paper, 1984, no. 2166, pp. 1-9.
9. Simak J., Pelant J. Solution of an Inverse Problem for a 2-D Turbulent Flow Around an Airfoil // Numerical Mathematics and Advanced Applications, 2009, pp. 809-816. DOI:[10.1007/978-3-642-11795-4_87](https://doi.org/10.1007/978-3-642-11795-4_87)

10. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Губанова И.А., Губанова М.А. Решение обратной задачи для профиля в рамках уравнений Навье - Стокса, осредненных по Рейнольдсу // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 3. С. 50-59.
11. Lighthill M.J. A New Method of Two Dimensional Aerodynamic Design, ARC, R and M 2112, 1945, 83 p.
12. Bauer F., Garabedian P., Korn D. Supercritical Wing Sections III, New York, Springer-Verlag, 1978, 184 p.
13. Nikolsky A.A. About a geometric genotype of shapes of airfoils // Tsagi Science Journal, 2014, vol. 45, no.5, pp. 417-429. DOI: [10.1615/TsAGISciJ.2014012219](https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2014012219)
14. Nikolsky A.A. Universal geometric transformation method PGT for aircraft design // 44th European rotorcraft forum, 2018, vol. 1, no. 40, pp. 456-467.
15. Lyapunov S.V., Wolkov A.V. Numerical Prediction of Transonic Viscous Separated Flow Past an Airfoil // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1994, vol. 6, no. 1, pp. 49-63. DOI: [10.1007/BF00417926](https://doi.org/10.1007/BF00417926)
16. Никольский А.А. Аэродинамическое проектирование вертолетных профилей методом решения обобщенной обратной задачи // Труды МАИ. 2013. № 88. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=70417>
17. Никольский А.А. Оптимизация передних кромок вертолетных профилей // Ученые записки ЦАГИ. 2008. Т. XXXIX. № 4. С. 5–8.
18. Усачов А.Е., Исаев С.А., Сапунов О.А., Сустин С.А. Оптимизация обтекания толстых профилей для повышения их аэродинамических характеристик // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173023>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-11](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-11)

19. Пархаев Е.С., Семенчиков Н.В. Некоторые вопросы оптимизации профиля крыла малоразмерного беспилотного летательного аппарата // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56884>
20. Тарасов А.Л. Численное исследование особенностей обтекания вертолетных профилей в эксплуатационном диапазоне изменения углов атаки и чисел Маха // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175919>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-13](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-13)

References

1. McFadden G.B. *An Artificial Viscosity Method for the Design of Supercritical Airfoils*, New York University Report COO-3077-158, 1979.
2. Volpe G., Melnik R.E. The Design of Transonic Aerofoils by a Well Posed Inverse Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, vol. 22, pp. 341-361. DOI: [10.1002/NME.1620220205](https://doi.org/10.1002/NME.1620220205)
3. Shagaev A.A. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1984, vol. 15, no. 4, pp. 15-23.
4. Nikolsky A.A. Some aspects of helicopter airfoil design, *Proceedings of the Twenty first European Rotorcraft Forum*, Saint-Peterburg, 1995, Paper, no. 17 (II), pp. 1-8.
5. Nikolsky A.A. Generalized inverse airfoil problem, *Tsagi Science Journal*, 2012, vol. 43, no. 6, pp. 775-786. DOI: [10.1615/TSAGISCIJ.2013007253](https://doi.org/10.1615/TSAGISCIJ.2013007253)
6. Davis V.M. Technique for developing design tools from the analysis methods of computational aerodynamics, *AIAA paper*, 1979, no. 1529. DOI: [10.2514/3.50857](https://doi.org/10.2514/3.50857)

7. Hirose N., Takanashi S., Kawai N. Transonic airfoil design procedure utilizing a Navier-Stokes analysis code, *AIAA Journal*, 1987, vol. 25, no. 3, pp. 353-359. DOI: [10.2514/3.9629](https://doi.org/10.2514/3.9629)
8. Mani K.K. Design Using Euler Equation, *AIAA paper*, 1984, no. 2166, pp. 1-9.
9. Simak J., Pelant J. Solution of an Inverse Problem for a 2-D Turbulent Flow Around an Airfoil, *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, 2009, pp. 809-816. DOI: [10.1007/978-3-642-11795-4_87](https://doi.org/10.1007/978-3-642-11795-4_87)
10. Bolsunovskii A.L., Buzoverya N.P., Gubanova I.A., Gubanova M.A. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2013, vol. 44, no. 3, pp. 50-59.
11. Lighthill M.J. *A New Method of Two Dimensional Aerodynamic Design*, ARC, R and M 2112, 1945, 83 p.
12. Bauer F., Garabedian P., Korn D. *Supercritical Wing Sections III*, New York, Springer-Verlag, 1978, 184 p.
13. Nikolsky A.A. About a geometric genotype of shapes of airfoils, *Tsagi Science Journal*, 2014, vol. 45, no.5, pp. 417-429. DOI: [10.1615/TsAGISciJ.2014012219](https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2014012219)
14. Nikolsky A.A. Universal geometric transformation method PGT for aircraft design, *44th European rotorcraft forum*, 2018, vol. 1, no. 40, pp. 456-467.
15. Lyapunov S.V., Wolkov A.V. Numerical Prediction of Transonic Viscous Separated Flow Past an Airfoil, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1994, vol. 6, no. 1, pp. 49-63. DOI: [10.1007/BF00417926](https://doi.org/10.1007/BF00417926)
16. Nikol'skii A.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 88. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=70417>
17. Nikol'skii A.A. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2008, vol. XXXIX, no. 4, pp. 5-8.

18. Usachov A.E., Isaev S.A., Sapunov O.A., Sustin S.A. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173023>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-11](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-11)
19. Parkhaev E.S., Semenchikov N.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56884>
20. Tarasov A.L. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175919>. DOI: [10.34759/trd-2023-131-13](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-13)

Статья поступила в редакцию 17.10.2023

Одобрена после рецензирования 23.10.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 17.10.2023; approved after reviewing on 23.10.2023; accepted for publication on 25.12.2023