



Научная статья

УДК 534.1: 629.7: 519.6

URL: <https://trudymai.ru/publications.php?ID=188263>

EDN: <https://www.elibrary.ru/YWIHIG>

ДИНАМИКА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ В МЕМБРАННОМ СОСТОЯНИИ ПРИ ЖЁСТКОМ ЗАЩЕМЛЕНИИ И ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ КОНТУРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР

Н.А. Тушавин ✉

Общество с ограниченной ответственностью «КАЛЛИСТО ВИЖН»,

г. Москва, Россия

✉ natushavin@mai.education

Цитирование: Тушавин Н.А. Динамика прямоугольной ортотропной пластины в мембранном состоянии при жёстком защемлении и шарнирном опирании контура под действием нестационарного поля температур // Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188263>

Аннотация. В статье исследуется динамическое поведение тонкой прямоугольной ортотропной пластины в мембранном состоянии при воздействии произвольного нестационарного температурного поля. Рассматривается линейная термоупругая постановка задачи для пластины постоянной толщины при жёстком защемлении и шарнирном опирании по контуру. Учитываются ортотропия упругих характеристик материала и анизотропия температурного расширения. Показано, что в отличие от шарнирного опирания, жёсткое закрепление полностью препятствует плоским перемещениям границы, вследствие чего температурные деформации оказываются стеснёнными, а равномерный нагрев может вызывать внутренние мембранные напряжения. Получена система дифференциальных уравнений движения в плоскости пластины для компонент перемещений средней поверхности. Сформулированы соответствующие начальные и граничные условия. Для прямоугольной области предложен аналитический подход на основе разложения искомых функций по тригонометрическим рядам, позволяющий свести исходную краевую задачу к

системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Показано, что характер динамического отклика существенно зависит от пространственной неоднородности температурного поля, скорости его изменения во времени, а также от соотношения между упругими и температурными параметрами ортотропного материала. Полученные соотношения могут быть использованы при расчёте теплонагруженных элементов конструкций из композиционных и анизотропных материалов.

Ключевые слова: ортотропная пластина; термоупругость; мембранное состояние; динамика пластин; температурное поле; шарнирное опирание; жёсткое защемление; анизотропия; собственные функции.

THE DYNAMICS OF A RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLATE IN A MEMBRANE STATE UNDER CLAMPED AND HINGED EDGE CONDITIONS SUBJECTED TO A NON-STEADY TEMPERATURE FIELD

N.A. Tushavin ✉

CALLISTO VISION, Moscow, Russia

✉ natushavin@mai.education

Citation: Tushavin N.A. The dynamics of a rectangular orthotropic plate in a membrane state under clamped and hinged edge conditions subjected to a non-steady temperature field // Trudy MAI. 2026. No. 148. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188263>

Abstract. This paper examines the dynamic behavior of a thin rectangular orthotropic plate in a membrane state under the influence of an arbitrary nonstationary temperature field. A linear thermoelastic formulation of the problem for a plate of constant thickness with rigid pinching and hinged support along the contour is considered. The orthotropy of the elastic characteristics of the material and the anisotropy of thermal expansion are taken into account. It is shown that, unlike a hinged support, rigid fastening completely prevents flat movements of the boundary, as a result of which temperature deformations are constrained, and uniform heating can cause internal membrane stresses. A system of differential equations of motion in the plane of the plate for the displacement components of the middle surface is obtained. The corresponding initial and boundary conditions are formulated. For a rectangular area, an analytical approach based on the

decomposition of the desired functions in trigonometric series is proposed, which makes it possible to reduce the initial boundary value problem to a system of ordinary differential equations in time. It is shown that the nature of the dynamic response significantly depends on the spatial heterogeneity of the temperature field, the rate of its change over time, and the relationship between the elastic and temperature parameters of the orthotropic material. The obtained ratios can be used in the calculation of heat-loaded structural elements made of composite and anisotropic materials.

Keywords: orthotropic plate; thermoelasticity; membrane state; plate dynamics; temperature field; hinge bearing; rigid pinching; anisotropy; eigenfunctions.

Введение

Современные инженерные конструкции всё чаще изготавливаются из композиционных, армированных и других анизотропных материалов, обладающих направленно-зависимыми механическими и физическими свойствами. Пластинчатые элементы из таких материалов находят широкое применение в авиационной и космической технике, энергетике, приборостроении, судостроении и строительстве. При эксплуатации указанные элементы нередко подвергаются интенсивным тепловым воздействиям, которые могут быть как стационарными, так и нестационарными, локальными или распределёнными по всей поверхности конструкции.

Температурные воздействия вызывают в пластинах дополнительные деформации и напряжения, причём их уровень и характер существенно зависят не только от геометрии и условий закрепления, но и от анизотропии материала. В случае ортотропного тела упругие модули и коэффициенты линейного температурного расширения различны по главным направлениям, что приводит к усложнению структуры напряжённо-деформированного состояния и динамического отклика.

Во многих практических задачах представляет интерес мембранное состояние пластины, когда основную роль играют деформации средней поверхности в её собственной плоскости, а изгибные эффекты не учитываются либо оказываются второстепенными. Такая постановка характерна, например, для анализа плоских волн в пластине, температурно-индуцированных мембранных усилий,

быстропротекающих процессов нагрева, а также для некоторых предварительных оценок прочности и жёсткости.

В отличие от изотропных пластин, ортотропные конструкции обладают направленно-зависимыми упругими и температурными характеристиками. Это приводит к усложнению напряжённо-деформированного состояния, поскольку деформации и внутренние усилия по главным направлениям материала оказываются различными, а в динамическом режиме возникает связность между продольными и поперечными формами движения в плоскости пластины.

Настоящая работа посвящена исследованию динамического поведения прямоугольной ортотропной пластины в мембранной постановке при действии произвольного температурного поля, зависящего от координат и времени. Особый интерес представляют случаи шарнирного опирания и жёсткого защемления пластины по контуру. Для закрепления типа шарнирного опирания возможно построение аналитического решения с использованием разложения по собственным функциям, что позволяет получить явные выражения для модальных амплитуд и проанализировать влияние параметров задачи на характер колебательного процесса. При жёстком защемлении в мембранной постановке это означает полное запрещение плоских перемещений на границе. При таком закреплении температурные деформации оказываются стеснёнными, вследствие чего даже равномерное изменение температуры способно вызвать внутренние напряжения и существенно изменить динамический отклик по сравнению со случаем частично свободного контура.

Цель статьи состоит в построении математической модели задачи, выводе уравнений движения с учётом температурного воздействия, формулировке граничных условий и описании метода решения, пригодного для анализа нестационарного термоупругого отклика ортотропной пластины.

Следует отметить, что на сегодняшний день, теоретическая база исследований пластинчатых элементов сформировалась в рамках классической теории пластин и оболочек, изложенной в трудах С. П. Тимошенко, С. Войновского-Кригера и В. В. Новожилова [1-4]. В этих работах были систематизированы основные подходы к описанию деформирования тонких пластин, сформулированы уравнения равновесия, кинематические гипотезы и методы решения задач изгиба, устойчивости и колебаний. Хотя первоначально основное внимание уделялось изотропным материалам, разработанный математический аппарат стал

фундаментом для дальнейшего распространения на анизотропные и ортотропные конструкции. Существенный вклад в развитие механики анизотропных тел внесён С. Г. Лехницким [2, 8], который разработал общую теорию упругости анизотропного тела и исследовал особенности напряжённо-деформированного состояния материалов с направленно-зависимыми свойствами. В его работах были получены определяющие соотношения для анизотропной среды, изучены вопросы плоского напряжённого состояния и сформирована теоретическая база для анализа тонких пластин из ортотропных материалов. Работы С. А. Амбарцумяна [3], посвящённые теории анизотропных пластин, сыграли ключевую роль в развитии прикладных аспектов данной тематики. В них исследовались задачи изгиба, устойчивости, колебаний и распределения напряжений в пластинах с анизотропными характеристиками, а также влияние структуры материала на их механический отклик.

Задачи термоупругости получили систематическое развитие в работах W. Nowacki [5], а впоследствии — R. B. Hetnarski и M. R. Eslami [6], где были рассмотрены фундаментальные вопросы возникновения температурных напряжений, связанного деформирования упругих тел при тепловом воздействии, а также особенности стационарных и нестационарных температурных полей. Большое внимание в этих трудах уделено выводу уравнений термоупругости, анализу начально-граничных условий и построению решений для тел различной геометрии [5, 6]. В термоупругих задачах для тонких пластин особое место занимает связь между температурным полем и условиями закрепления. Если температурные деформации не стеснены, то нагрев может сопровождаться относительно малыми внутренними напряжениями. Напротив, при ограничении свободного расширения возникают значительные температурные усилия [5, 6, 10]. Для анизотропных и ортотропных материалов эта зависимость проявляется ещё сильнее, поскольку коэффициенты линейного расширения по главным направлениям, как правило, различаются [2, 3, 6]. В результате даже при сравнительно простом законе нагрева термоупругое состояние таких пластин оказывается существенно сложнее, чем в изотропном случае [5, 6]. Развитие композитных и слоистых материалов привело к росту интереса к термоупругому анализу анизотропных пластин. В современных монографиях и учебных изданиях, включая труд J. N. Reddy [7], большое внимание уделено моделированию многослойных и ортотропных конструкций, в том числе при тепловом воздействии, колебаниях и устойчивости.

Для шарнирно опёртых пластин накоплен наибольший объём аналитических результатов. Это связано с тем, что для прямоугольной области такие условия удобно согласуются с методом разделения переменных и разложением решения в двойные тригонометрические ряды [1,3,9].

Для жёстко защемлённых пластин ситуация существенно сложнее. Полное закрепление контура приводит к повышению общей жёсткости системы и изменяет спектр собственных частот [1,4, 9]. В задачах изгиба это связано с необходимостью удовлетворения одновременно условиям на прогиб и углы поворота, а в мембранной постановке — условиям отсутствия плоских перемещений на контуре.

Материалы и методы

Работа посвящена моделированию и исследованию теплопереноса в ортотропной пластине под действием динамического нагрева. Свойства материалов слоев, используемых в расчете, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Свойства материалов

Свойство	Обозначение	Значение	Размерность
Плотность	ρ	1550	кг/м ³
Удельная теплоёмкость	C_ρ	900	Дж/(кг·К)
Теплопроводность (X)	k_x	7,7	Вт/(м·К)
Теплопроводность (Y)	k_y	2,4	Вт/(м·К)
Теплопроводность (Z)	k_z	2,4	Вт/(м·К)
Модуль упругости (X)	E_x	138	ГПа
Модуль упругости (Y)	E_y	9,65	ГПа
Коэффициент Пуассона	$\nu_{xy} = \nu_{xz}$	0,28	—
Коэффициент Пуассона	ν_{yz}	0,40	—
Модуль сдвига	$G_{xz} = G_{xy}$	5,24	ГПа
Модуль сдвига	G_{yz}	3,10	ГПа
КТР (X)	α_x	$-0,9 \cdot 10^{-6}$	1/К
КТР (Y, Z)	α_y	$28 \cdot 10^{-6}$	1/К

Математическая постановка задачи по определению температурного поля в пластине

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину из ортотропного материала, занимающую область (рисунок 1.): $\Omega = \{(x, y, z) | 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\}$.

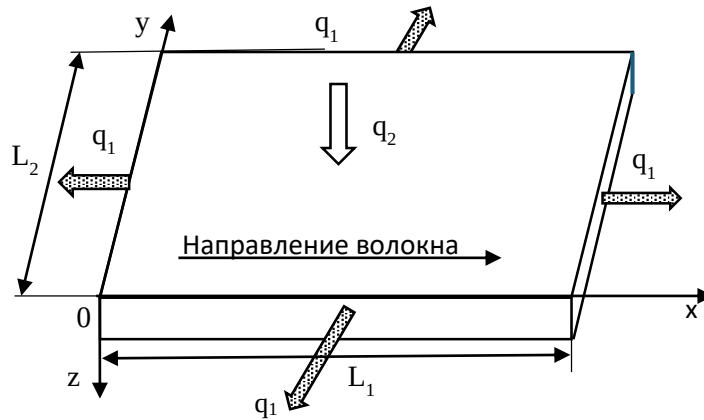


Рисунок 1 - Расчетная область

Предполагается, что материал имеет разные коэффициенты теплопроводности вдоль координатных осей: k_x — вдоль оси x , k_y — вдоль оси y и k_z — вдоль оси z .

На верхнюю грань пластины действует тепловой поток, с плотностью $q_{in}(x, y, t) \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$. На остальных гранях осуществляется отвод тепла с заданной плотностью теплового потока.

Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (x, y, z) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

где $a_x = \frac{k_x}{\rho c}$, $a_y = \frac{k_y}{\rho c}$, $a_z = \frac{k_z}{\rho c}$ — коэффициенты температуропроводности,

Граничные условия второго рода на гранях:

$$\begin{aligned} -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= q_{x0}(y, z, t), & k_x \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= q_{xL}(y, z, t), \\ -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= q_{y0}(x, z, t), & k_y \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} &= q_{yL}(x, z, t), \\ -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= q_{z0}(x, y, t), & k_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} &= q_{zL}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное распределение температуры задаётся произвольной функцией:

$$T(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (3)$$

Аналитическое решение

Построим функцию Грина (функцию источника) $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$, соответствующую начальному условию в виде дельта-функции, и удовлетворяющему однородному уравнению и однородным краевым условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a_x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \quad (x, y, z) \in \Omega, t > 0, \quad (4)$$

$$G(x, y, z, 0; \xi, \eta, \zeta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=L_z} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда общее решение исходной задачи по формуле Грина-Гаусса [10] можно будет записать:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \int_0^t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) \varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ &+ \frac{1}{c\rho} \int_0^t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} [G(x, y, z, t; 0, \eta, \zeta, t - \tau) q_{x0}(\eta, \zeta, \tau) + G(x, y, z, t; L_x, \eta, \zeta, t - \tau) q_{xL}(\eta, \zeta, \tau)] d\eta d\zeta d\tau + \\ &+ \frac{1}{c\rho} \int_0^t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} [G(x, y, z, t; \xi, 0, \zeta, t - \tau) q_{y0}(\xi, \zeta, \tau) + G(x, y, z, t; \xi, L_y, \zeta, t - \tau) q_{yL}(\xi, \zeta, \tau)] d\zeta d\xi d\tau + \\ &+ \frac{1}{c\rho} \int_0^t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} [G(x, y, z, t; \xi, \eta, 0, t - \tau) q_{z0}(\xi, \eta, \tau) + G(x, y, z, t; \xi, \eta, L_z, t - \tau) q_{zL}(\xi, \eta, \tau)] d\eta d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения общего аналитического решения воспользуемся методом функций Грина. Поскольку дифференциальный оператор в уравнении (1)

$L = \alpha_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ представим в виде суммы трех независимых одномерных операторов, трехмерную функцию Грина можно построить как произведение трех одномерных функций Грина:

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = g_1(x, \xi, t) \cdot g_2(y, \eta, t) \cdot g_3(z, \zeta, t). \quad (8)$$

Сначала рассмотрим одномерную задачу по координате x . Функция Грина $g_1(x, \xi, t)$ определяется как решение одномерной задачи:

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} - a_x \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L_x, t > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0, \xi, t) = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x}(L_x, \xi, t) = 0, \quad (10)$$

$$g_1(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi). \quad (11)$$

Задачу (9)-(10) решим методом разделения переменных.

$$g_1(x, \xi, t) = \frac{1}{L_x} + \frac{2}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{L_x}\right) \exp\left(-a_x \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 t\right). \quad (12)$$

Аналогично, составляются и решаются задачи относительно одномерных функций Грина $g_2(y, \eta, t)$ и $g_3(z, \zeta, t)$:

$$g_2(y, \eta, t) = \frac{1}{L_y} + \frac{2}{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{m\pi \eta}{L_y}\right) \exp\left(-a_y \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 t\right), \quad (13)$$

$$g_3(z, \zeta, t) = \frac{1}{L_z} + \frac{2}{L_z} \sum_{l=1}^{\infty} \cos\left(\frac{l\pi z}{L_z}\right) \cos\left(\frac{l\pi \zeta}{L_z}\right) \exp\left(-a_z \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 t\right). \quad (14)$$

Подставляя (12) -(14) в (7), с учетом (8) получим общее решение задачи (1)-(3).

Рассмотрим элемент космического аппарата из композиционного материала, который подвергается тепловому воздействию на внешнюю поверхность (верхняя грань $z = L_z$) с постоянной плотностью теплового потока

$$q_{zL}(x, y, t) = q_{in} = const. \quad (15)$$

Через боковые грани происходит теплоотвод с одинаковой плотностью теплового потока:

$$q_{x0}(y, z, t) = q_{xL}(y, z, t) = q_{y0}(x, z, t) = q_{yL}(x, z, t) = -q_{out}. \quad (16)$$

Нижняя поверхность теплоизолированная:

$$q_{z0}(x, y, t) = 0. \quad (17)$$

Начальная температура постоянная:

$$\varphi(x, y, z) = T_0. \quad (18)$$

С учетом (15) -(18) решение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{t}{c\rho} & \left(\frac{q_{in}}{L_z} - \frac{2q_{out}}{L_x} - \frac{2q_{out}}{L_y} \right) + \\ & - \frac{q_{out}L_x}{k_x\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L_x}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-a_x \left(\frac{2n\pi}{L_x}\right)^2 t\right) \right\} - \\ & - \frac{q_{out}L_y}{k_y\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos\left(\frac{2m\pi y}{L_y}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-a_y \left(\frac{2m\pi}{L_y}\right)^2 t\right) \right\} \\ & + \frac{2q_{in}L_z}{k_z\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} \cos\left(\frac{l\pi z}{L_z}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-a_z \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 t\right) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассматривается работа конструктивного элемента космического аппарата как плоской композитной пластины.

На верхнюю грань действует постоянный тепловой поток с плотностью $q_{in} = 1365 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, а по граням пластины происходит отвод температуры на более холодные элементы, с плотностью тепловых потоков $q_{in} = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Начальная температура $T_0 = 300\text{К}$. Параметры пластины $L_x = L_y = 0,15\text{м}$, $L_z = 0,01\text{м}$. Расчетное время $t = 60\text{с}$. В дальнейшем проведенные

На рисунке 2 представлены температурные поля в различных точках пластины.

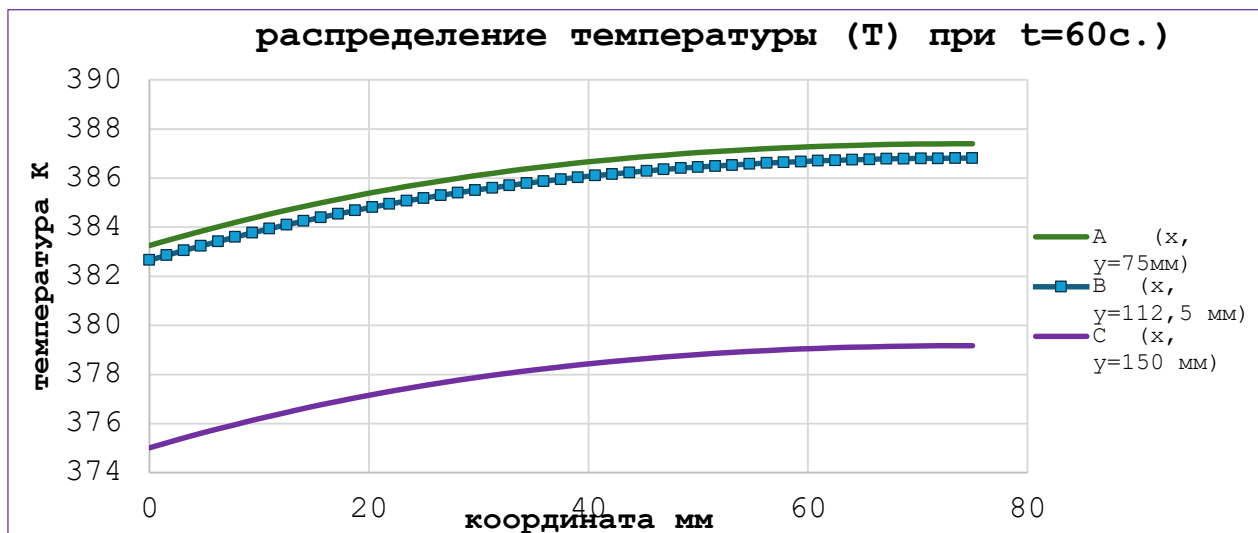


Рисунок 2 - Температурные поля в сечениях (а) - $x = 0$, (б) - $x = 0,075\text{м}$, (в) $x = 0,075\text{м}$

Постановка задачи по определению напряженно-деформированного состояния в ортотропной пластине

В статье рассматривается прямоугольная ортотропная пластина постоянной толщины (см. выше рисунок 1):

$$0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2, \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \quad (20)$$

Пусть приращение температуры относительно опорной температуры T_0 имеет вид:

$$\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_0. \quad (21)$$

Здесь T_0 - температура ненапряжённого состояния отсчёта

Материал ортотропный, оси ортотропии совпадают с осями x, y .

Предполагается материал пластины упругий и ортотропный, справедливы соотношения линейной термоупругости, напряжения по толщине отсутствуют, то есть реализуется плоское напряжённое состояние, изгиб и поперечные перемещения не учитываются, то есть анализ проводится в рамках мембранного состояния.

Кинематические соотношения по гипотезе Кирхгофа-Лява в общем случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t). \end{aligned} \quad (22)$$

В этих выражениях:

$u_0(x, y, t), v_0(x, y, t)$ - перемещения срединной поверхности в плоскости,

$w(x, y, t)$ - прогиб.

В дальнейшем, с учетом того, что изгиб не рассматривается и поперечные перемещения не учитываются деформации пластины будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{23}$$

Физические соотношения для ортотропного материала в условиях плоского напряжённого состояния будут:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix} \theta. \tag{24}$$

В этих выражениях:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, & Q_{22} &= \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{xy} E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx} E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, & Q_{66} &= G_{xy}.
\end{aligned}$$

Где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – нормальные и касательные напряжения по направлениям, Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} – жесткости пластины по направлениям, E_x, E_y – модули Юнга по направлениям, ν_{xy}, ν_{yx} – коэффициенты Пуассона, G_{xy} – модуль сдвига, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – линейные и сдвиговая деформация соответственно, α_x, α_y – коэффициенты линейного расширения материала по направлениям.

Мембранные усилия определяются интегрированием соответствующих напряжений по толщине и будут иметь вид:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz. \tag{25}$$

Тогда получаем мембранные усилия с учетом (24):

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \theta) + Q_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \theta)] dz = \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \left\langle Q_{11} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} - \alpha_x [T(x, y, z, t) - T_0] \right\} + Q_{12} \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial y} - \alpha_y [T(x, y, z, t) - T_0] \right\} \right\rangle dz = \\
&= \left(Q_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) h - N_x^T
\end{aligned} \tag{26}$$

Аналогичным образом получаем остальные мембранные усилия:

$$\begin{aligned} N_y &= \left(Q_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) h - N_y^T, \\ N_{xy} &= Q_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) h - N_{xy}^T. \end{aligned} \quad (27)$$

В выражениях (26- 27) температурные мембранные усилия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} N_x^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}\alpha_x + Q_{12}\alpha_y) [T(x, y, z, t) - T_0] dz \\ N_y^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{12}\alpha_x + Q_{22}\alpha_y) [T(x, y, z, t) - T_0] dz \end{aligned} \quad (28)$$

Так как материал ортотропный и температурные коэффициенты ориентированы по x, y , то обычно полагают:

$$N_{xy}^T = 0. \quad (29)$$

Соотношения (28) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} N_x^T(x, y, t) &= (Q_{11}\alpha_x + Q_{12}\alpha_y) N(x, y, t) \\ N_y^T(x, y, t) &= (Q_{12}\alpha_x + Q_{22}\alpha_y) N(x, y, t) \end{aligned} \quad (30)$$

где:

$$N(x, y, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [T(x, y, z, t) - T_0] dz \quad (31)$$

Поскольку пластина имеет толщину h , удобно перейти от напряжений к мембранным усилиям:

$$N_x = h\sigma_x \quad N_y = h\sigma_y \quad N_{xy} = h\tau_{xy} \quad (32)$$

Рассмотрим динамические уравнения равновесия в плоскости срединной поверхности

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя в (33) соотношения (26-27) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(Q_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) h - N_x^T \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Q_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) h - N_{xy}^T \right] &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[Q_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) h - N_{xy}^T \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(Q_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) h - N_y^T \right] &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (34)$$

Делая соответствующие преобразования окончательно получаем уравнения движения в плоскости срединной поверхности

$$\begin{aligned} Q_{11} h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Q_{66} h \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (Q_{12} + Q_{66}) h \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} N_x^T &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ Q_{66} h \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + Q_{22} h \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (Q_{12} + Q_{66}) h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} N_y^T &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим ортотропную пластину с различными краевыми условиями. Пусть тепловое воздействие согласно (19) выражается формулой:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{t}{c\rho} \left(\frac{q_{in}}{L_z} - \frac{2q_{out}}{L_x} - \frac{2q_{out}}{L_y} \right) + \\ - \frac{q_{out} L_x}{k_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \left(\frac{2n\pi x}{L_x} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_x \left(\frac{2n\pi}{L_x} \right)^2 t \right) \right\} - \\ - \frac{q_{out} L_y}{k_y \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \left(\frac{2m\pi y}{L_y} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_y \left(\frac{2m\pi}{L_x} \right)^2 t \right) \right\} \\ + \frac{2q_{in} L_z}{k_z \pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} \cos \left(\frac{l\pi z}{L_z} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_z \left(\frac{l\pi}{L_z} \right)^2 t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее вычисляем функцию входящую в (31) для температурных усилий:

$$\begin{aligned} N(x, y, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [T(x, y, z, t) - T_0] dz = \\ = \frac{t}{c\rho} \left(\frac{q_{in}}{L_z} - \frac{2q_{out}}{L_x} - \frac{2q_{out}}{L_y} \right) h - \\ - \frac{q_{out} L_x}{k_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \left(\frac{2n\pi x}{L_x} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_x \left(\frac{2n\pi}{L_x} \right)^2 t \right) \right\} h - \\ - \frac{q_{out} L_y}{k_y \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \left(\frac{2m\pi y}{L_y} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_y \left(\frac{2m\pi}{L_x} \right)^2 t \right) \right\} h \\ + \frac{2q_{in} L_z}{k_z \pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} \frac{2L_z}{l\pi} \sin \left(\frac{l\pi h}{2L_z} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-a_z \left(\frac{l\pi}{L_z} \right)^2 t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Начальные условия предполагаются однородными.

Шарнирно опертая пластина.

В мембранной задаче шарнирное опирание обычно понимается как запрещение перемещений по нормали к границе, но допускается перемещение вдоль неё. Кроме того, касательное усилие на контуре принимается равным нулю, тогда получаем:

$$\begin{aligned} u_0(t, x, y)|_{x=0} = 0 \quad u_0(t, x, y)|_{x=L_1} = 0 \quad \frac{\partial u_0(t, x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(t, x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, L_1} \\ v_0(t, x, y)|_{y=0} = 0 \quad v_0(t, x, y)|_{y=L_2} = 0 \quad \frac{\partial u_0(t, x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(t, x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0, L_2} \end{aligned} \quad (38)$$

Выражения для начальных перемещений $u_0(t, x, y), v_0(t, x, y)$ можно принять в виде:

$$\begin{aligned} u_0(t, x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^u(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_2}\right) \\ v_0(t, x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^v(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_2}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

Температурную составляющую представим в виде:

$$\theta(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{\theta}(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (40)$$

Выражения для температурных слагаемых в (35) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_x^T(x, y, t) &= (Q_{11}\alpha_x + Q_{12}\alpha_y) \frac{2n\pi}{L_x} \frac{q_{out} L_x}{k_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L_x}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-a_x \left(\frac{2n\pi}{L_x}\right)^2 t\right) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} N_y^T(x, y, t) &= (Q_{12}\alpha_x + Q_{22}\alpha_y) \frac{2m\pi}{L_y} \frac{q_{out} L_x}{k_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2m\pi y}{L_x}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-a_x \left(\frac{2n\pi}{L_y}\right)^2 t\right) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Подставляя соотношения (39-40) в уравнения (35) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции времени.

$$\begin{aligned} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h \left[-\left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 Q_{11} f_{mn}^u(t) - \left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2 Q_{66} f_{mn}^u(t) - \rho \frac{d^2 f_{mn}^u(t)}{dt^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. + h \left[(Q_{12} + Q_{66}) \left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] f_{mn}^v(t) \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{\partial}{\partial x} N_x^T = \\ = h \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{\theta}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h \left\{ \left[-\left(\frac{m\pi x}{a} \right)^2 Q_{66} f_{mn}^v(t) - \left(\frac{n\pi y}{b} \right)^2 Q_{22} f_{mn}^v(t) - \rho \frac{d^2 f_{mn}'(t)}{dt^2} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + h \left[(Q_{12} + Q_{66}) \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right] f_{mn}^u(t) \right\} \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\rangle dx dy = \frac{\partial}{\partial y} N_y^T = \\
& = -h \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^\theta(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy
\end{aligned} \tag{43}$$

Тогда после подстановки разложений в уравнения движения и использования ортогональности тригонометрических функций для каждой пары индексов (m, n) получаем систему двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d^2 f_{mn}^u(t)}{dt^2} + (Q_{11} \lambda_m^2 + Q_{66} \lambda_n^2) f_{mn}^u(t) + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^v(t) &= (Q_{11} \alpha_x + Q_{12} \alpha_y) \lambda_m f_{mn}^\theta(t) \\
\rho \frac{d^2 f_{mn}^v(t)}{dt^2} + (Q_{66} \lambda_m^2 + Q_{22} \lambda_n^2) f_{mn}^v(t) + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^u(t) &= (Q_{12} \alpha_x + Q_{22} \alpha_y) \lambda_n f_{mn}^\theta(t)
\end{aligned} \tag{44}$$

Для анализа динамических свойств сначала рассмотрим однородную задачу, соответствующую отсутствию внешнего температурного воздействия полагая $f_{mn}^\theta(t) = 0$

Далее для свободных гармонических колебаний примем:

$$f_{mn}^u(t) = f_{mn}^u e^{i\omega_{mn} t} \quad f_{mn}^v(t) = f_{mn}^v e^{i\omega_{mn} t} \tag{45}$$

Подстановка (45) в (44) дает систему алгебраических уравнений для определения собственной частоты:

$$\begin{aligned}
(-\rho \omega_{mn}^2 + Q_{11} \lambda_m^2 + Q_{66} \lambda_n^2) f_{mn}^u + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^v &= 0 \\
(-\rho \omega_{mn}^2 + Q_{66} \lambda_m^2 + Q_{22} \lambda_n^2) f_{mn}^v + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^u &= 0
\end{aligned} \tag{46}$$

В результате получаем характеристическое уравнение для собственных частот:

$$\rho^2 \omega_{mn}^4 + (Q_{22} + Q_{66}) \lambda_n^2 \omega_{mn}^2 - \rho (Q_{11} + Q_{66}) \lambda_m^2 + \Theta_{mn} = 0 \tag{47}$$

$$\text{В этом уравнении } \lambda_m = \frac{m\pi}{L_1} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L_2} \quad \Theta_{mn} = (Q_{11} \lambda_m^2 + Q_{66} \lambda_n^2)(Q_{66} \lambda_m^2 + Q_{22} \lambda_n^2) - (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2$$

Таким образом собственная частота находится из квадратного уравнения (47) относительно ω_{mn}^2

Для свободных колебаний в мембранной постановке перемещения будем искать как произведение пространственной формы на гармонический закон по

времени. Для шарнирно опёртого контура перемещения определяются по формулам (39) а временные функции $f_{mn}^u(t)$ и $f_{mn}^v(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (44).

Жёстко заземленная пластина.

В мембранной постановке жёсткое заземление означает отсутствие перемещений точек контура в обоих координатных направлениях. Поэтому на всех сторонах прямоугольной пластины задаются условия:

$$\begin{aligned} u_0(t, x, y)|_{x=0} = 0 \quad u_0(t, x, y)|_{x=L_1} = 0 \\ v_0(t, x, y)|_{y=0} = 0 \quad v_0(t, x, y)|_{y=L_2} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Такие граничные условия отражают полное стеснение температурных и механических деформаций на контуре пластины. В отличие от случая шарнирного опирания, здесь отсутствует возможность свободного касательного смещения вдоль границы, что приводит к более высокому уровню температурных напряжений и изменяет структуру динамического отклика. Для шарнирного опирания можно выбирать базисные функции типа $\sin$ и $\cos$, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям. Но для заземлённого контура необходимо, чтобы на каждой кромке одновременно обращались в нуль обе компоненты перемещения. Для мембранной задачи это допустимо. Однако для системы двух связанных уравнений удобнее выбирать такие аппроксимирующие функции. Для этого используют разложение по нескольким координатным функциям:

$$u_0(t, x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}(t) \varphi_{mn}(x, y) \quad v_0(t, x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N r_{mn}(t) \psi_{mn}(x, y) \quad (47)$$

Где координатные функции можно принять в виде $\varphi_{mn}(x, y) = \psi_{mn}(x, y) = x^m (L_1 - x) y^n (L_2 - y)$, а температурная составляющая будет

$$\theta(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(t) \varphi_{mn}(x, y) \quad (48)$$

Подставляя соотношения (47-48) в уравнения (35) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции времени.

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\langle \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h \left\{ \left[A_1(x, y) Q_{11} q_{mn}(t) + A_2(x, y) Q_{66} q_{mn}(t) - \rho A_3(x, y) \frac{d^2 q_{mn}(t)}{dt^2} \right] A_3(x, y) + \right. \right. \quad (49)$$

$$\left. \left. + h(Q_{12} + Q_{66}) A_4(x, y) r_{mn}(t) \right\} A_3(x, y) dx dy = \frac{\partial}{\partial x} N_x^T = h \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(t) A_3(x, y) dx dy$$

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\langle \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h \left\{ \left[A_1(x, y) Q_{66} r_{mn}(t) + A_2(x, y) Q_{22} r_{mn}(t) - \rho A_3(x, y) \frac{d^2 r_{mn}(t)}{dt^2} \right] A_3(x, y) + \right. \right. \quad (50)$$

$$\left. \left. + h(Q_{12} + Q_{66}) A_4(x, y) q_{mn}(t) \right\} A_3(x, y) dx dy = \frac{\partial}{\partial y} N_y^T = h \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(t) A_3(x, y) dx dy$$

В этих выражениях:

$$A_1(x, y) = mx^{m-2} y^n [L_1(1-m) + x(1+m)](L_2 - y)$$

$$A_2(x, y) = nx^m y^{n-2} [L_2(1-n) + y(1+n)](L_1 - x)$$

$$A_3(x, y) = x^m y^n (L_1 - x)(L_2 - y)$$

$$A_4(x, y) = x^m y^n \left(m+1 - \frac{mL_1}{x} \right) \left(n+1 - \frac{nL_2}{y} \right)$$

Тогда после подстановки разложений в уравнения движения и использования ортогональности тригонометрических функций для каждой пары индексов (m, n) получаем систему двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\rho \frac{d^2 q_{mn}(t)}{dt^2} + (Q_{11} \lambda_m^2 + Q_{66} \lambda_n^2) q_{mn}(t) + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^v(t) = (Q_{11} \alpha_x + Q_{12} \alpha_y) \lambda_m \theta_{mn}(t) \quad (51)$$

$$\rho \frac{d^2 r_{mn}(t)}{dt^2} + (Q_{66} \lambda_m^2 + Q_{22} \lambda_n^2) r_{mn}(t) + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n f_{mn}^u(t) = (Q_{12} \alpha_x + Q_{22} \alpha_y) \lambda_n \theta_{mn}(t)$$

Далее для свободных гармонических колебаний примем:

$$q_{mn}(t) = q_{mn} e^{i\omega_{mn} t} \quad r_{mn}(t) = r_{mn} e^{i\omega_{mn} t} \quad (52)$$

Подстановка (52) в (51) дает систему алгебраических уравнений для определения собственной частоты:

$$\begin{aligned} (-\rho \omega_{mn}^2 + Q_{11} \lambda_m^2 + Q_{66} \lambda_n^2) q_{mn} + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n r_{mn} &= 0 \\ (-\rho \omega_{mn}^2 + Q_{66} \lambda_m^2 + Q_{22} \lambda_n^2) r_{mn} + (Q_{12} + Q_{66}) \lambda_m \lambda_n q_{mn} &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

здесь

$$\lambda_m^2 = - \frac{m L_2^{3+2n} L_1^{2m+1}}{(3+2n)(2n+1)(n+1)(2m-1)(2m+1)}$$

$$\lambda_n^2 = - \frac{n L_2^{1+2n} L_1^{2m+3}}{(3+2m)(2n-1)(2n+1)(m+1)(2m+1)}$$

При интегрировании уравнений (49-50) выражения содержащие смешанную производную обращаются в ноль. В этом в этом случае собственная частота системы будет иметь вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Q_{66}\lambda_m^2 + Q_{22}\lambda_n^2}{Q_{11}\lambda_m^2 + Q_{66}\lambda_n^2} \quad (54)$$

Решение для временных коэффициентов $q_{mn}(t)$ и $r_{mn}(t)$ может быть получено стандартными методами решения линейного дифференциального уравнения второго порядка при нулевых начальных условиях оно имеет вид интеграла Дюамеля:

$$q_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h \omega_{mn}} \int_0^t \theta(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (55)$$

Это выражение наглядно показывает, что модальный отклик определяется свёрткой температурного воздействия с колебательным ядром системы. Таким образом, перемещения для мембранного состояния ортотропной будут определяться выражениями (47).

Следует отметить, что в простейшем случае для неоднородного температурного поля могут использоваться комбинации синусов и косинусов, согласованные со структурой его пространственных производных аналогично пластине с шарнирным опиранием. После подстановки разложений в уравнения движения и проецирования на выбранный базис задача сводится к бесконечной системе связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных амплитуд. При этом структура системы сохраняет общий вид аналогичный (45). Где коэффициенты определяются упругими параметрами материала и волновыми числами. В общем случае для жёсткого защемления аналитическое разложение оказывается менее простым, чем для частично свободного контура, поскольку условия на обе компоненты перемещения накладываются на всех сторонах области одновременно. Тем не менее метод разложения по собственным функциям остаётся эффективным инструментом анализа.

Численная реализация полученных соотношений для ортотропной композитной пластины в мембранном состоянии при нестационарном тепловом воздействии

Рассматривается прямоугольная пластина толщиной 2 мм с размерами в плане 150×150 мм (рисунок 3). Ось X совпадает с направлением армирования волокна, ось Y направлена поперек волокна в плоскости пластины, ось Z — нормаль к плоскости пластины. В нестационарной тепловой постановке на верхнюю грань пластины действует постоянный тепловой поток плотностью 1365 Вт/м², моделирующий солнечный нагрев. На всех четырёх боковых гранях задан постоянный отвод тепла с плотностью -1000 Вт/м² (знак минус соответствует выходу тепла из тела). Нижняя грань (Z = 0) теплоизолирована. Начальная температура всей пластины принята равной 300 К. Такая совокупность граничных условий соответствует положительному тепловому дисбалансу, что приводит к монотонному росту температуры во времени.

В структурном расчёте в качестве нагрузок выступают температуры, импортированные из решения тепловой задачи.

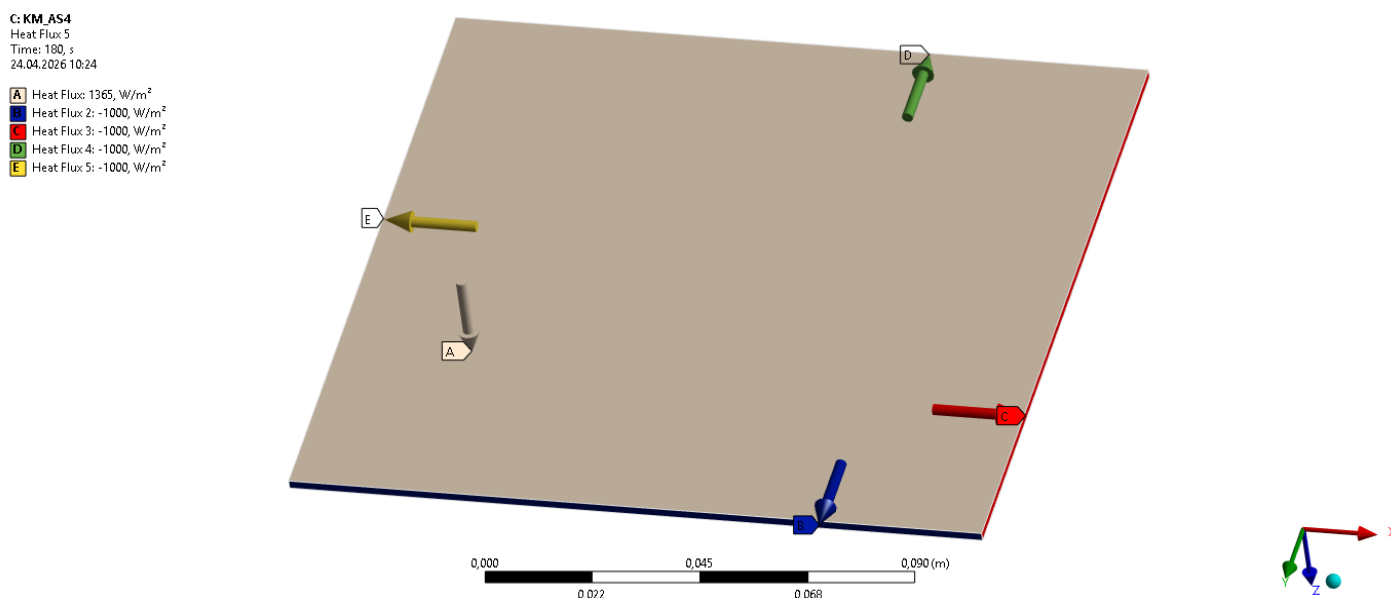


Рисунок 3 – Геометрия модели и граничные условия

Для дискретизации расчётной области построена структурированная сетка из гексаэдрических элементов (Hex20) — тип SOLID186 для структурного расчёта и SOLID278 для теплового. По толщине пластины создано 2 слоя элементов с равномерным шагом 1 мм. Такой дискретизации достаточно для адекватного

разрешения температурного градиента по толщине, поскольку поперечная теплопроводность материала невелика. В плоскости пластины размер элемента принят равным 1 мм. Общее количество элементов в сетке составляет 439, число узлов — 2140.

Анализ результатов численного моделирования

На рисунке 4 представлены изотермы и графики распределения температуры в пластине толщиной 2 мм для четырёх моментов времени: $t = 120$ с. Слева для каждого момента времени показано температурное поле в виде изотерм, а справа – распределение температуры вдоль горизонтального направления X при $Y = 75$ мм и вдоль вертикального направления Y при $X = 75$ мм.

Изотермы $t=120$ сек. (толщина = 2 мм)

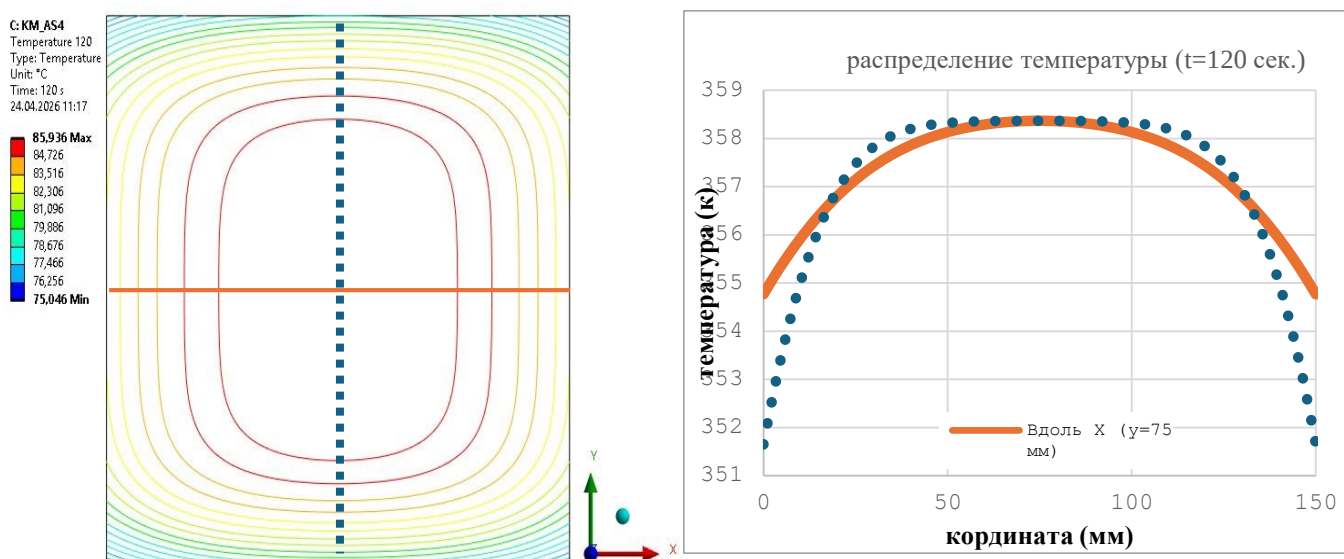


Рисунок 4 — Изотермы и распределение температуры в пластине толщиной 2 мм в моменты времени $t = 120$ с

Моделирование реализовано в программном комплексе ANSYS с использованием связанных анализов Transient Thermal (нестационарный тепловой расчёт) и Static Structural (термоупругий расчёт с импортом температурного поля). Для приближения к одномерной постановке задачи (теплоперенос только по глубине) используется плоская двумерная модель (2D Plane). Расчётная область представляет собой прямоугольник малой ширины, что позволяет минимизировать поперечные градиенты температуры и деформаций.

В нестационарной тепловой постановке на всю верхнюю поверхность задаётся равномерный тепловой поток, после чего поток становится равным нулю. Начальная температура всей системы составляет 25 °С. Все внешние границы, за исключением зоны нагрева, теплоизолированы.

В структурном расчёте используется то же температурное поле, импортируемое из Transient Thermal. Для исключения движения модели как жёсткого тела задаются минимально необходимые кинематические ограничения: на одной боковой грани принимается $u_x = 0$, а в одной точке нижней грани — $u_y = 0$. Такой выбор граничных условий не вносит существенного дополнительного стеснения термического расширения и позволяет анализировать термоупругий отклик системы, близкий к одномерному случаю.

Для дискретизации области построена единая конечно-элементная сетка, используемая как для теплового, так и для структурного расчёта. Применяются плоские четырёхугольные элементы с квадратичной аппроксимацией: PLANE77 — для тепловой задачи, PLANE183 — для структурной. Общее число элементов в сетке составляет 439, число узлов — 2140.

На рисунках 5 и 6 приведены зависимости горизонтальных перемещений по времени, а на рисунке 7 – распределение продольного перемещения по координате при фиксированном времени, точками указаны аналитические решения.

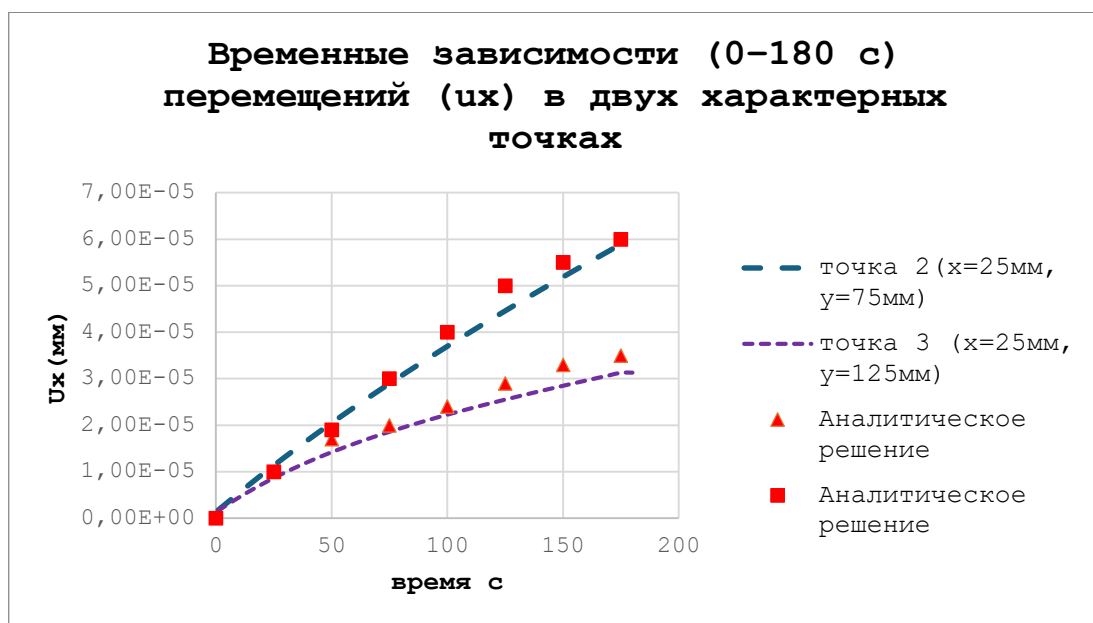


Рисунок 5 - Распределение продольного перемещения по времени

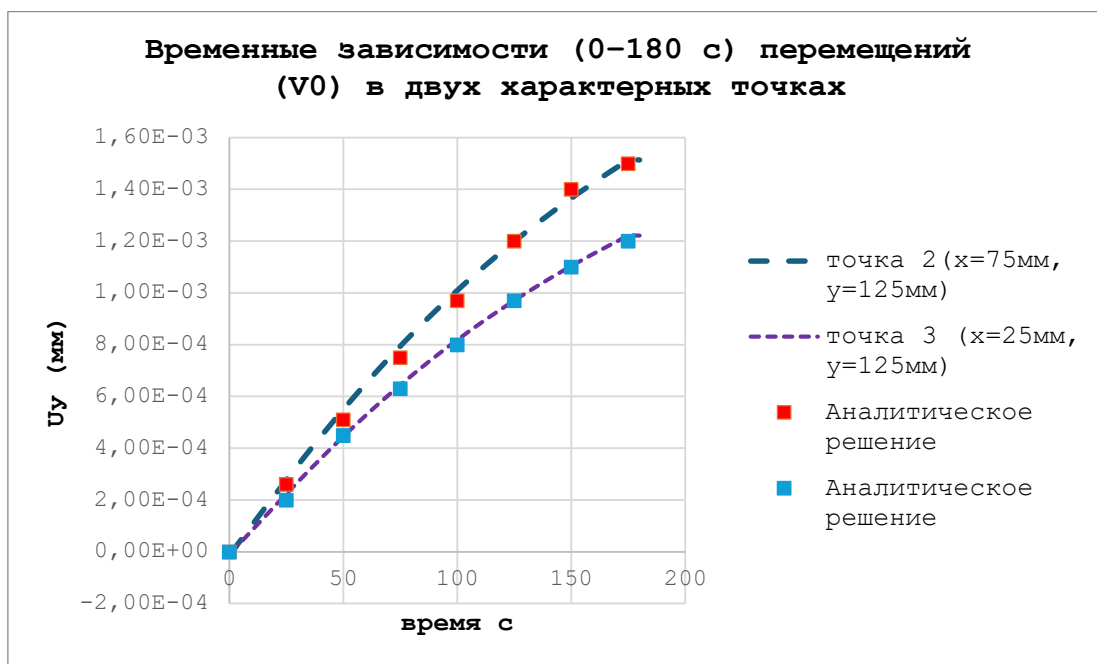


Рисунок 6 - Распределение продольного перемещения по координате в различных точках пластины

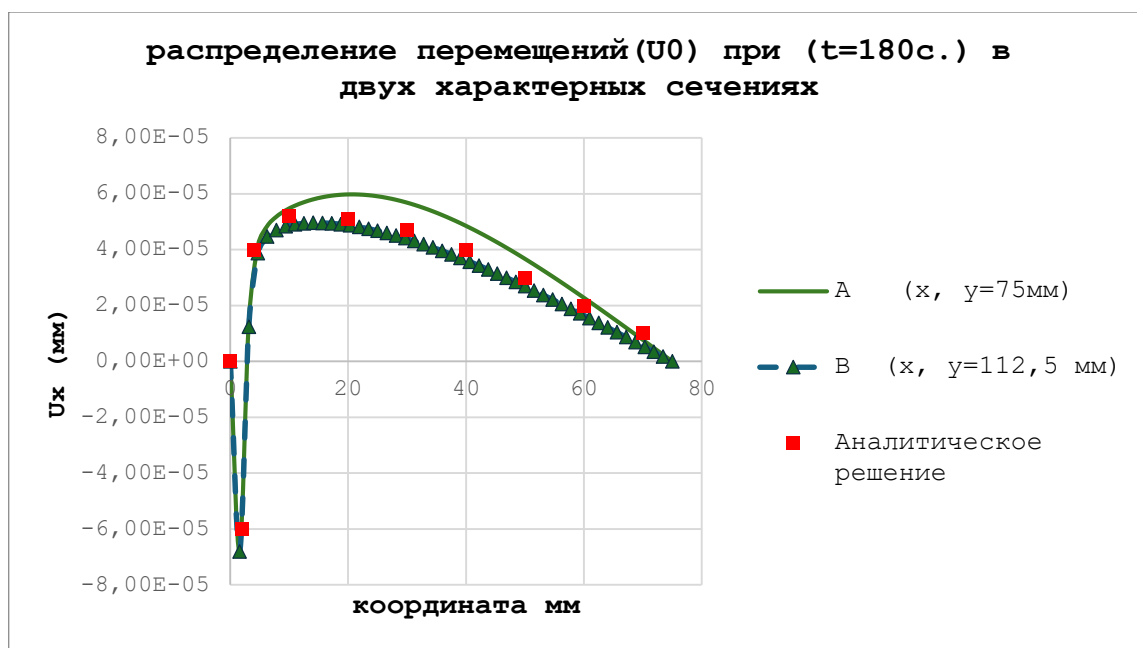


Рисунок 7 - Распределение продольного перемещения по координате в различных точках пластины при фиксированном времени

Результаты

В статье решена нестационарная задача теплопроводности для трехмерной ортотропной пластины с различными коэффициентами температуропроводности, данные исследования могут быть использованы при проектировании элементов конструкции аэрокосмической техники.

Разработана математическая модель, представляющая собой точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для трехмерной ортотропной пластины. Использование функции Грина и метода разделения переменных позволяет рассчитывать температурные поля без накопления численных ошибок, характерных для итерационных методов. Предложенный подход применим к широкому спектру ортотропных композиционных материалов. Аналитические расчеты успешно верифицированы с помощью компьютерного моделирования в ANSYS. Совмещение модулей Transient Thermal и Static Structural позволило не только увидеть распределение тепла, но и подготовить базу для анализа термоупругости.

Далее на основе полученных температурных полей исследована задача динамического поведения прямоугольной ортотропной пластины в мембранном состоянии при произвольном температурном поле опертом и жёстком защемлении контура. На основе линейной термоупругой модели получены уравнения движения для плоских перемещений средней поверхности, учитывающие ортотропию упругих свойств материала и анизотропию температурного расширения.

Сформулированы граничные условия полного закрепления, при которых перемещения на всём контуре обращаются в нуль. Показано, что жёсткое защемление принципиально изменяет характер термоупругого отклика по сравнению с более мягкими условиями опирания: температурные деформации оказываются стеснёнными, внутренние усилия возрастают, а собственные частоты колебаний увеличиваются. Особо отмечено, что даже пространственно однородное температурное поле при полном закреплении контура может вызывать мембранные температурные напряжения.

В мембранном состоянии интерпретация шарнирного опирания требует осторожности. Поскольку изгиб не рассматривается, шарнирность как освобождение от изгибающих моментов теряет прямой смысл. В рамках плоской задачи обычно принимается, что на контуре запрещено нормальное перемещение, но допускается касательное скольжение, а касательные усилия отсутствуют.

Для прямоугольной области предложено построение решения на основе разложения по собственным функциям, позволяющее свести исходную краевую задачу к системе связанных обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Полученные результаты могут быть использованы при анализе теплонагруженных пластинчатых элементов из ортотропных и композиционных материалов, а также служить основой для дальнейших исследований, включающих нелинейность, многослойность, изгибной отклик и численное моделирование.

Анализ видов закрепления показал, что преимуществом шарнирного опирания является то, что часть температурных деформаций свободно от сжимающих напряжений, которые значительно меньше чем при других видах опор и при этом общая жесткость пластины уменьшается.

Для жёсткого защемления характерны меньшие перемещения, но большие температурные напряжения. Таким образом, выбор способа закрепления сильно влияет на поведение пластины при температурном воздействии.

На основе полученных решений получены зависимости поля температур и перемещений в ортотропной пластине в зависимости времени и координат.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / под ред. Г.С. Шапиро; пер. с англ. В.И. Контовта. М.: Наука, 1966. 635 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268 с.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

5. Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford ; New York: Pergamon Press, 1962. 628 p.
6. Hetnarski R.B., Eslami M.R. Thermal stresses: advanced theory and applications Dordrecht: Springer, 2009. 818 p.
7. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
8. Lekhnitskii S.G. Anisotropic plates. New York: Gordon and Breach, 1968. 493p.
9. Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Термоупругость тел при нестационарных температурных полях. Киев: Наукова думка, 1977. 247 с.
10. Hou Z., Komanduri R., General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology // International journal of heat and mass transfer. 2000. Vol. 43, iss. 10. P.1679–1698.

References

1. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plastinki i obolochki [Plates and Shells], Moscow, Nauka, 1966, 635 p.
2. Lekhnitsky S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body], Moscow, Nauka, 1977, 416 p.
3. Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh plastin [Theory of anisotropic plates], Moscow, Nauka, 1967. 268 p.
4. Novozhilov V.V. Teoriya tonkikh obolochek [Theory of thin shells], Leningrad, Sudpromgiz, 1962, 431 p.
5. Nowacki V. Thermoelasticity, Oxford; New York, Pergamon Press, 1962, 628 p.
6. Hetnarski R.B., Eslami M.R. Thermal stresses: advanced theory and applications, Dordrecht, Springer, 2009. 818 p.
7. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd ed., Boca Raton, CRC Press, 2004. 831 p.
8. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates, New York, Gordon and Breach, 1968. 493 p.

9. Podstrigach Ya S., Burak Ya.I. Termouprugost' tel pri nestatsionarnykh temperaturnykh polyakh [Thermoelasticity in non-stationary temperature fields], Kyiv, Naukova Dumka, 1977. 247 p.

10. Hou Z., Komanduri R., General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology. International journal of heat and mass transfer, 2000, vol. 43, iss. 10, pp.1679–1698.

Информация об авторах

Н.А. Тушавин, директор по продажам ООО «Каллисто Вижн», г. Москва, Россия; e-mail: natushavin@mai.education

Information about the authors

Tushavin N.A., Sales Director, CALLISTO VISION, Moscow, Russia; e-mail: natushavin@mai.education

Получено 12 мая 2026 ● Принято к публикации 01 июня 2026 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 12 May 2026 ● Accepted 01 June 2026 ● Published 30 June 2026
