Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья
УДК 531.011
DOI: 10.34759/trd-2021-121-01

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ВЕКТОР УМОВА, ОБРАТНЫЙ ИМПУЛЬС И ДРУГИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Игорь Павлович Попов
Курганский государственный университет,
Курган, Россия
ip.popow@yandex.ru

Аннотация. Целью исследования является получение макромеханических величин с помощью квантово-механических дифференциальных уравнений. Величины механического движения различных порядков порождаются формальными аналогами уравнения Шредингера. К таким величинам относятся как известные (масса, импульс, кинетическая энергия), так и неизвестные (интегральный вектор Умова для кинетической энергии, обратный импульс и др.). Собственно уравнение Шредингера формально порождает величину механического движения нулевого порядка mv^0 (в том смысле, что она в уравнении Шредингера содержится). Величина механического движения первого порядка mv^1 порождается формальным аналогом уравнения Шредингера, являющимся комбинацией собственно волновой функции и ее градиента. Для величин движения с положительной степенью скорости порядок временных производных выше, чем пространственных. Для величин с отрицательной степенью – выше порядок пространственных производных.

Ключевые слова: интегральный вектор Умова, обратный импульс, движение, величина, порядок

Для цитирования: Попов И.П. Интегральный вектор Умова, обратный импульс и другие механические величины // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: 10.34759/trd-2021-121-01

UMOV INTEGRAL VECTOR, BACK IMPULSE AND OTHER MECHANICAL QUANTITIES

Igor P. Popov
Kurgan State University,
Kurgan, Russia
ip.popow@yandex.ru

Abstract. Due to the widespread application of advanced science-intensive technologies in the space industry, these industries themselves are becoming a source of development not only of applied, but fundamental science as well. In this regard, Umov's integral vector, backward impulse and other mechanical quantities in perspective may be of interest including the applied one. The said quantities are associated with the formal analogs of the Schrödinger equation (FAUSH). Formally, the Schrödinger equation (SH) induces the magnitude of mechanical motion of the zero order (in the sense that it is contained in the

SH). It is noteworthy that the quantum mechanical design generates a macromechanical quantity. Obviously, other ACF can induce values of mechanical motion of other orders. The following theorem is proved: The following theorem is proved: the value of $m_e v^{-1}$ in a hydrogen-like atom is quantized. The value of $m_e v^{-1}$, corresponding to the basic energy level is a fixed (unchanged) quantum. Almost all of the obtained results were a consequence of the quantum mechanical differential equations application, however, the results themselves are predominantly macromechanical. The mechanical motion quantities of various orders are being induced by formal analogs of the Schrödinger equation. These quantities include both known (mass, momentum, kinetic energy) and unknown (Umov's integral vector for kinetic energy, backward momentum, etc.). In all FAUSHs, the orders of the partial derivatives differ by one. For quantities of motion with a positive degree of velocity, the order of the temporal derivatives is higher than that of the spatial ones. For mechanical quantities with a negative degree, the order of spatial derivatives is higher.

Keywords: integral vector of Umov, backward impulse, motion, magnitude, order

For citation: Popov I.P. Umov integral vector, back impulse and other mechanical quantities. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: 10.34759/trd-2021-121-01

В связи с широким использованием в авиационной и космической отраслях передовых наукоемких технологий [1–4] сами эти отрасли становятся источником развития не только прикладной [5–10], но фундаментальной науки [11–14]. В этой связи в перспективе могут представлять, в т.ч., прикладной интерес интегральный вектор Умова, обратный импульс и другие механические величины. Далее устанавливается, что указанные величины связаны с формальными аналогами уравнения Шредингера (ФАУШ).

Волновая функция

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера (УШ) для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad \frac{\hbar^{2}}{2m}\Delta\Psi\ ,$$

$$\Delta\Psi = -\frac{2i}{\hbar}\left(\frac{mv^0}{\ }\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,.$$

Формально УШ порождает величину механического движения нулевого порядка [15–18] (в том смысле, что она в УШ содержится)

$$^{0}p = \frac{mv^0}{0!}\,. \tag{1}$$

Примечательно, что квантово-механическая конструкция порождает макромеханическую величину. В дальнейшем используется преимущественно этот же принцип.

Аналоги УШ и порождаемые ими величины движения

Градиент волновой функции равен

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar}m\mathbf{v}Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\,.$$

Обе части волновой функции можно умножить на одну и ту же величину

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\ \Bigg|\times\frac{i}{\hbar}m\mathbf{v}\,.$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий (ФАУШ) –

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar} m\mathbf{v}\Psi ,$$

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\mathbf{v}^1}{\,} \right)\Psi ,$$

который порождает величину механического движения первого порядка

$$^1p = \frac{mv^1}{1!} = \frac{m\mathbf{v}}{1!} . \qquad (2)$$

Производная волновой функции равна

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{\,} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{\,}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} .$$

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{\,}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\Bigg| \times -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{\,} .$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий ФАУШ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{\,}\Psi ,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mv^2}{\,} \right)\Psi ,$$

который порождает величину механического движения второго порядка [19, 20]

$$^2p = \frac{mv^2}{2!} . \qquad (3)$$

Величины механического движения (1), (2), (3) известны.

Очевидно, что другие ФАУШ могут порождать величины механического движения других порядков.

Интегральный вектор Умова для кинетической энергии

Далее система координат выбирается таким образом, чтобы одна из осей совпадала с направлением движения. Тогда пространственные производные будут одномерными.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\hbar^{\hat{}}}\frac{m^2v^4}{}Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{}t - m\mathbf{vr})}\Bigg| \times i\hbar, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{i}{\hbar}m\mathbf{v}Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{}t - m\mathbf{vr})}\Bigg| \times \left(-\frac{mv^2\mathbf{v}}{4}\right).$$

ФАУШ –

$$4i\hbar \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad mv^2\mathbf{v}\frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

$$4i\hbar \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad 3!\left(\frac{mv^2\mathbf{v}}{3!}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

Он порождает величину механического движения третьего порядка

$$^3p = \frac{mv^3}{3!} = \frac{mv^2\mathbf{v}}{3!}. \tag{5}$$

Коэффициент $1/3!$ выбран для сохранения преемственности выражений (1), (2), (3).

Для установления смысла величины (5) можно обратиться к дифференциальному вектору Умова

$$d\mathbf{U} = wd\mathbf{v}.$$

здесь w – плотность энергии.

Для кинетической энергии

$$d\mathbf{U} = \frac{mv^2}{2V} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{U}V = \frac{mv^2}{3!} \mathbf{v}.$$

V – объем.

Таким образом, величина (5) – это интегральный вектор Умова для кинетической энергии.

Обратный импульс

Сравнение выражения

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} = -\frac{i}{\hbar} m^3 v^2 \mathbf{v} C e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{\quad} t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}$$

с формулой (4) приводит следующему ФАУШ –

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} = 4 \frac{i}{\hbar} \frac{m}{\quad} \frac{\partial^2 \Psi}{\quad},$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} = 4 \frac{i}{\hbar} \left(0! \frac{m}{\quad} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

который порождает величину механического движения минус первого порядка (обратный импульс)

$${}^{-1}p = 0! \frac{m}{v} = 0! \frac{m\mathbf{v}}{v^2}.$$

Смысл этой величины и ее актуальность устанавливает

Теорема. В водородоподобном атоме величина $m_e v^{-1}$ квантуется. Фиксированным (неизменным) квантом является величина $m_e v_0^{-1}$, соответствующая основному энергетическому уровню.

Доказательство. В водородоподобном атоме полная, потенциальная и кинетическая энергии электрона связаны следующим образом:

$$U_n = 2E_n,$$

$$E_{Kn} = -E_n. \tag{6}$$

При этом

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Для основного энергетического уровня по аналогии с боровским радиусом a_0 скорость электрона можно обозначить v_0.

Из (6) следует

$$E_{K1} = \frac{m_e v_0^2}{2} = -E_1 = \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_0} = \pm\frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2},$$

$$E_{Kn} = \frac{m_e v_n^2}{2} = -E_n = \frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_n} = \pm n\frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2} = n\frac{m_e}{v_0}.$$

Теорема доказана.

Следствие

$$\frac{m_e}{v_{n+1}} = \frac{m_e}{v_n} + \frac{m_e}{v_0}.$$

Порядки величин движения

Определение. Величина движения порядка n – это

$$
{}^{n}p = k_n m v^n,\; k_n = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{n!},\, n \ge 0 \\ (-1)^{n+1}(n+1)!,\, n < 0 \end{array} \right\}.
$$

Величина движения любого порядка порождается соответствующим ФАУШ.

Нетрудно заметить, что

$$
{}^{n-1}p = \frac{d}{dv}\,{}^{n}p,\, n \ne 0\,.
$$

Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ сведены в таблицу.

Таблица – Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ

Величины движения	ФАУШ
${}^{n}p = \dfrac{mv^n}{n!}$	$(-1)^n i\hbar \dfrac{\partial^{n-1}\Psi}{\partial t^{n-1}} \quad 2^{-n+1} m v^n \dfrac{\partial^{n-2}\Psi}{\partial x^{n-2}}$ при $n \ge 2$
${}^{3}p = \dfrac{mv^2\mathbf{v}}{3!} = \dfrac{mv^3}{3!}$	$-i\hbar \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad \dfrac{mv^2\mathbf{v}}{2^2}\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}$
${}^{2}p = \dfrac{mv^2}{2!}$	$i\hbar \dfrac{\partial\Psi}{\partial t} \quad \dfrac{mv^2}{2^1}\Psi$
${}^{1}p = \dfrac{m\mathbf{v}}{1!} = \dfrac{mv^1}{1!}$	$-i\hbar \dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \quad \dfrac{m\mathbf{v}}{2^0}\Psi$
${}^{0}p = \dfrac{mv^0}{0!}$	$i\hbar \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} \quad {}^{1}m\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$
${}^{-1}p = 0!\dfrac{m\mathbf{v}}{v^2} = 0!mv^{-1}$	$-i\hbar \dfrac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} \quad 2^2\dfrac{m\mathbf{v}}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
${}^{-2}p = -1!mv^{-2}$	$i\hbar \dfrac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} \quad {}^{3}mv^{-2}\dfrac{\partial^3\psi}{\partial t^3}$

${}^{-3}p = 2!\frac{m\mathbf{v}}{v^4} = 2!mv^{-3}$	$-i\hbar\frac{\partial^5\Psi}{\partial x^5} \quad 2^4\frac{m\mathbf{v}}{v^4}\frac{\partial^4\Psi}{\partial t^4}$
${}^{-n}p = (-1)^{n-1}(n-1)!mv^{-n}$	$(-1)^n i\hbar\frac{\partial^{n+2}\Psi}{\partial x^{n+2}} \quad 2^{n+1}mv^{-n}\frac{\partial^{n+1}\Psi}{\partial t^{n+1}}$ при $n \geq -1$

Заключение

Почти все полученные результаты явились следствием использования квантово-механических дифференциальных уравнений, однако, сами по себе результаты являются преимущественно макромеханическими.

Величины механического движения различных порядков порождаются формальными аналогами уравнения Шредингера. К таким величинам относятся как известные (масса, импульс, кинетическая энергия), так и неизвестные (интегральный вектор Умова для кинетической энергии, обратный импульс и др.).

Во всех ФАУШ порядки частных производных отличаются на единицу. Для величин движения с положительной степенью скорости порядок временных производных выше, чем пространственных. Для величин с отрицательной степенью – выше порядок пространственных производных.

Интегральный вектор Умова характеризует движение энергии тела.

Обратный импульс квантуется в водородоподобном атоме.

Список источников

1. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Новые подходы в оценке динамических свойств колебательных структур: частотные функции и связность

движений // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=161421. DOI: 10.34759/trd-2021-120-08

2. Юдин Д.А., Фирсанов В.В. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкции изделия при ударе о твердую преграду // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=116343. DOI: 10.34759/trd-2020-112-8

3. Попов И.П. К расчетам параметров пассивных гравитационных маневров межпланетных космических аппаратов // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158089. DOI: 10.34759/trd-2021-118-01

4. Кузьмичёв В.С., Филинов Е.П., Остапюк Я.А. Сравнительный анализ точности математических моделей массы турбореактивных двухконтурных двигателей // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93362

5. Виденкин Н.А. Универсальный метод определения параметров тензора инерции космических летательных аппаратов // Труды МАИ. 2015. № 81. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=57857

6. Богушевская В.А., Заяц О.В., Масляков Я.Н., Мацак И.С., Никонов А.А., Савельев В.В., Шептунов А.А. Разработка системы дистанционного энергоснабжения беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2012. № 51. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29047

7. Прокудин О.А., Рабинский Л.Н., Чан Кует Тханг. Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=161419. DOI: 10.34759/trd-2021-120-06

8. Закота А.А., Ефанов В.В., Гунькина А.С. Методика оценки точности определения параметров движения воздушной цели в условиях скрытного наблюдения за ней // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=119951. DOI: 10.34759/trd-2020-115-17

9. Ананьев А.В., Рыбалко А.Г., Иванников К.С., Клевцов Р.П. Динамическая модель процесса поражения временно неподвижных наземных целей группой ударных беспилотных летательных аппаратов малого класса // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=119975. DOI: 10.34759/trd-2020-115-18

10. Шавня Р.А. Математическая модель явления галопирования обледенелых проводов // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=118726. DOI: 10.34759/trd-2020-114-02

11. Попов И.П. Применение методов классической механики к электрическим зарядам // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=159770. DOI: 10.34759/trd-2021-119-01

12. Попов И.П. Источники силы и скорости, резонансы и антирезонансы // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=122184. DOI: 10.34759/trd-2021-117-01

13. Пашенцев В.Н. Модель заряда тонких полимерных пленок пучком электронов с энергией 80 кэВ // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29399

14. Храпко Р.И. Спин не есть момент импульса // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=28834

15. Хейн Тай З.Т., Мельников В.Е. О возможности оперативного определения взлетной массы самолета // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=77132

16. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62975

17. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62995

18. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=55758

19. Загидулин А.Р., Подружин Е.Г., Левин В.Е. Моделирование движения несвободной системы твёрдых тел на примере расчёта амортизации шасси лёгкого самолёта // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98881

20. Никитин П.В., Тушавина О.В. Анализ уравнения баланса энергии в зоне взаимодействия высокоскоростной частицы с твёрдой поверхностью // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=72580

References

1. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Eliseev S.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161421. DOI: 10.34759/trd-2021-120-08

2. Yudin D.A., Firsanov V.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 112. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116343. DOI: 10.34759/trd-2020-112-8

3. Popov I.P. *Trudy MAI,* 2021, no. 118. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158089. DOI: 10.34759/trd-2021-118-01

4. Kuz'michev V.S., Filinov E.P., Ostapyuk Ya.A. *Trudy MAI,* 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93362

5. Videnkin N.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 81. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=57857

6. Bogushevskaya V.A., Zayats O.V., Maslyakov Ya.N., Matsak I.S., Nikonov A.A., Savel'ev V.V., Sheptunov A.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 51. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29047

7. Prokudin O.A., Rabinskii L.N., Chan Kuet Tkhang. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161419. DOI: 10.34759/trd-2021-120-06

8. Zakota A.A., Efanov V.V., Gun'kina A.S. *Trudy MAI,* 2020, no. 115. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119951. DOI: 10.34759/trd-2020-115-17

9. Anan'ev A.V., Rybalko A.G., Ivannikov K.S., Klevtsov R.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119975. DOI: 10.34759/trd-2020-115-18

10. Shavnya R.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118726. DOI: 10.34759/trd-2020-114-02

11. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159770. DOI: 10.34759/trd-2021-119-01

12. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122184. DOI: 10.34759/trd-2021-117-01

13. Pashentsev V.N. *Trudy MAI,* 2012, no. 53. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29399

14. Khrapko R.I. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28834

15. Khein Tai Z.T., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=77132

16. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975

17. Bardin B.S., Panev A.S. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62995

18. Bezglasnyi S.P., Krasnov M.V., Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55758

19. Zagidulin A.R., Podruzhin E.G., Levin V.E. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98881

20. Nikitin P.V., Tushavina O.V. *Trudy MAI,* 2016, no. 89. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72580

Статья поступила в редакцию 07.11.2021; одобрена после рецензирования 15.11.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 07.11.2021; approved after reviewing on 15.11.2021; accepted for publication on 21.12.2021.